UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

DEPARTEMENT GENIE ELECTRIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

Notion de base

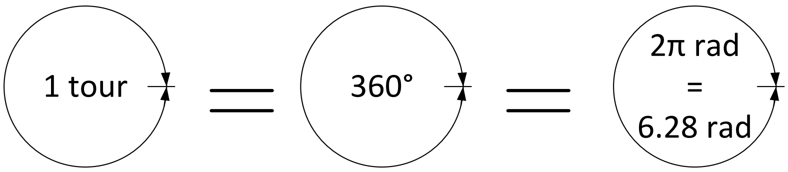
Trigonométrie

Objectif : Réussir

1. Notion de trigonométrie de base :

1.1.a Conversion d'angle degrés radians

On a une proportionnalité entre les tours, les degrés et les radians.



Exercice corrigé :

Convertir un angle de 20° en radian :

$\theta(°) = 20° \rightarrow \theta(\text{rad}) = ?$

$360° \rightarrow 2\pi\ (\text{rad}) = 6.28\ (\text{rad})$

Produit en croix :

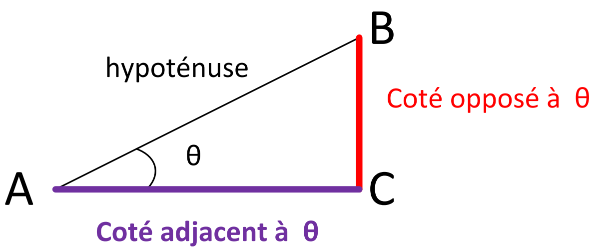
$\theta(\text{rad}) = \frac{20° * 2\pi}{360°} = 0.349$ (rad)

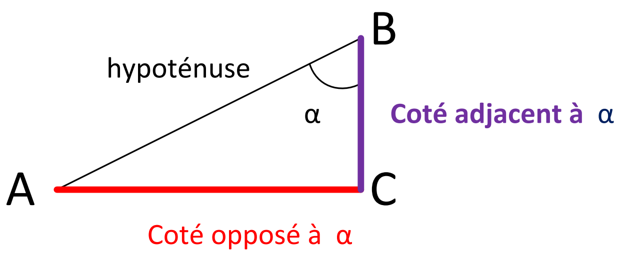
On a donc les relations suivantes :

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\theta(°) * 2\pi}{360} \qquad \theta(°) = \frac{\theta(\text{rad}) * 360}{2\pi}$$

1.1.b Les relations du triangle rectangle

Comme tout triangle, la somme de ses angles est égale à 180°





L'hypoténuse est le plus grand des côtés.
Le coté adjacent dépend de l'angle considéré.

Les relations :

$$\sin(angle) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \cos(angle) = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan(angle) = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

On a donc :

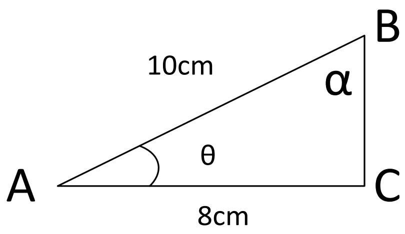
Pour θ :	Pour α:
$\sin\theta = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{BC}}{AB}$	$\sin\theta = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{AC}}{AB}$
$\cos\theta = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{AC}}{AB}$	$\cos\theta = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{\text{BC}}{AB}$
$\tan\theta = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{\text{BC}}{AC}$	$\tan\theta = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}} = \frac{\text{AC}}{BC}$

1.1.c Théorème de Pythagore :

$$\text{hypoténuse}^2 = \text{Côté opposé}^2 + \text{Côté adjacent}^2$$

De manière générale, il faut retenir qu'une fois que l'on connait la longueur d'un côté et d'un angle ou la longueur de 2 cotés, on peut déterminer tous les autres éléments du triangle rectangle.

1.1.d Exercice corrigé :



Comment trouver θ :

$\cos\theta = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{10}$ -> θ=$\cos^{-1}\frac{8}{10}$ =0 ,643 rad ou $\theta(°) = \frac{0{,}643*360}{2\pi} = 36{,}8°$

Déterminer BC :

Méthode 1 : relation trigo :

$\sin\theta = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}$ -> $\text{BC} = \sin\theta \times AB = 0{,}6 \times 10 = 6$ Il est possible de prendre le même raisonnement avec $\tan\theta$

Méthode 2 : Pythagore

$$\text{hypoténuse}^2 = \text{Côté opposé}^2 + \text{Côté adjacent}^2$$

On a donc :

$$\text{Côté opposé}^2 = \text{hypoténuse}^2 - \text{Côté adjacent}^2$$
$$\text{Côté opposé}^2 = \sqrt{\text{hypoténuse}^2 - \text{Côté adjacent}^2}$$

$BC^2 = \sqrt{\text{AB}^2 - \text{AC}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

Déterminer α :

La somme des angles est 180° on a donc : $\alpha = 180 - 90 - \theta = 53{,}2°$

Ou utiliser la trigo, exemple $\cos\alpha = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BC}{AB}$ => $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{BC}{AB}\right)$

2. La fonction sinus en temporelle :

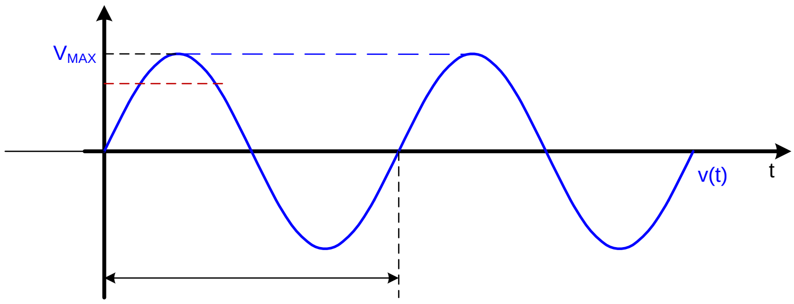
2.1. La tension sinusoïdale :

Sur le réseau de distribution électrique, la tension est sinusoïdale :

Son expression est :

$$v(t) = Vmax \times \sin(\omega.t)$$

avec $\omega = 2.\pi.f$



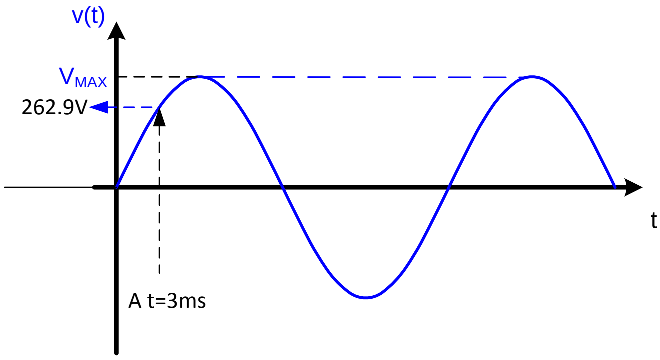
Avec :
$v(t) \rightarrow la\ valeur\ intantaneé\ de\ la\ tension$
$Vmax \rightarrow la\ tension\ max$
$\omega \rightarrow la\ pulsation\ angulaire\ (rad/s)$
$f \rightarrow La\ fréquence(Hz)$

Application :

On s'intéresse à la tension domestique du réseau de distribution électrique.
La tension est sinusoïdale de valeur max=325V et de fréquence f=50hz.

Déterminer la valeur instantanée $v(t)$ à l' instant t=3ms

$$\omega = 2.\pi.f = 314.16\ rad/s$$

à l'instant $t = 3ms$ $v(t = 3ms) = Vmax \times \sin(\omega.t)$ $= 325 \times \sin(314.16 \times 3.10^{-3})$ $= 262.9V$	

ATTENTION la pulsation ω est en rad/s, l'unité de l'angle $\omega.t$ est donc en radiant.
Il faut donc bien se mettre en radian sur la calculette !!

2.1. La tension et couant sinusoïdale :

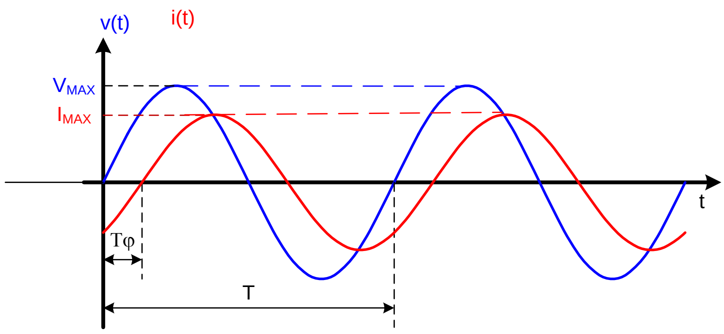
Des phénomènes physique que vous allait apprendre durant l'année peuvent amener un décalage temporelle entre la tension et le courant.

Les expressions temporelles sont :

$$v(t) = Vmax \times \sin(\omega.t)$$

avec $\omega = 2.\pi.f$

$$i(t) = Imax \times \sin(\omega.t - \varphi)$$



Avec :
$i(t) \rightarrow la\ valeur\ intantaneé\ du\ courant$
$Imax \rightarrow le\ courant\ max$
$\omega \rightarrow la\ pulsation\ angulaire\ (rad/s)$
$f \rightarrow La\ fréquence (Hz)$
$T \rightarrow La\ période\ (s)$ $\quad T = \frac{1}{F}$
$\varphi \rightarrow l'angle\ de\ déphasage\ entre\ v(t) et\ i(t)$ $\quad \varphi = \frac{T_\varphi \times 2.\pi}{T}$

Application :
On s'intéresse à un courant qui possède un retard temporel de **3.3ms** par rapport à la tenions. La valeur max du courant est de **10A.**
La tension est sinusoïdale de valeur max=325V et de fréquence f=50hz.

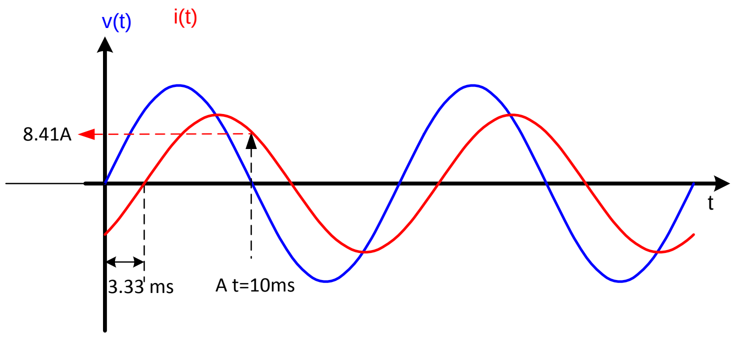
Déterminer la valeur instantanée $i(t)$ à l' instant t=10ms

$\omega = 2.\pi.f = 314.16\ rad/s$
f=50hz donne une periode $T = \frac{1}{F} = \frac{1}{50} = 20ms$
un retard temporel de **2ms->**$\varphi = \frac{T_\varphi \times 2.\pi}{T} = \frac{2 \times 2.\pi}{20} = 1.046\ rad$

<table>
<tr>
<td>à l'instant $t = 10ms$

$i(t = 10ms) = Imax \times \sin(\omega.t - \varphi)$

$= 10 \times \sin(314.16 \times 10.10^{-3} - 1)$

$= 8.41\ (A)$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>