Géométrie affine - exercices d'application- indications de réponses

1. (a) Je propose deux rédactions possibles :
   - D est définie comme intersection de deux plans affines, d'équations respectivement
     $$H_1 : 2x + 3y - 4z = -1$$
     et
     $$H_2 : x - 2y + z = 3$$
     Ces plans sont non parallèles car la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2. L'ensemble D est donc une droite affine.
     De même, D' est une droite affine car la famille
     $$\{(11, -1, -7), (1, 1, 1)\}$$
     est également libre.
   - D est définie par un système de deux équations et trois inconnues de rang 2. Donc D n'est pas vide, car tout système de rang égal au nombre d'équation est compatible. Ainsi, D est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$, et $\vec{D}$ est de dimension 1 d'après le théorème du rang, donc D est une droite affine.
     De même, D' est une droite affine car la famille
     $$\{(11, -1, -7), (1, 1, 1)\}$$
     est également libre.

   (b) Pour savoir si les droites sont sécantes, résolvons le système définissant $D \cap D'$: Echelonnons le système en utilisant la méthode du pivot de Gauss :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 4z & = & -1 \\ x - 2y + z & = & 3 \\ 11x - y - 7z & = & \alpha \\ x + y + z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ y - 6z & = & -3 \\ -3y & = & 2 \\ -12y - 18z & = & \alpha - 11 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ z & = & \frac{-3-y}{-6} \\ y & = & \frac{-2}{3} \\ -12\frac{-2}{3} - 18z & = & \alpha - 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + \frac{2}{3} - \frac{7}{18} \\ z & = & \frac{7}{18} \\ y & = & \frac{-2}{3} \\ 1 & = & \alpha - 11 \end{array}\right.$$
   On en déduit que le système n'est compatible que si $\alpha = 12$. Dans ce cas, les droites sont sécantes. Leur point d'intersection est le point de coordonnées $(\frac{23}{18}, \frac{-2}{3}, \frac{7}{18})$.
   Si $\alpha \neq 12$, les deux droites sont disjointes. Elles ne peuvent pas être parallèles. En effet, si elles l'étaient, alors les espaces directions $\vec{D}$ et $\vec{D}'$ définis par les systèmes sans second membres seraient égaux. Or $\vec{D}'$ ne dépend pas de α, et dans le cas $\alpha = 12$ on a démontré qu'il n'est pas égal à $\vec{D}$ puisque les droites sont sécantes en un unique point commun.
   On peut donc conclure que dans le cas où $\alpha \neq 12$ les droites D et D' sont non coplanaires.

   (c) Notons
   $$H'_1 \ : \ 11x - y - 7z = \alpha \quad H'_2 \ : \ x + y + z = 1$$
   de sorte que $D' = H'_1 \cap H'_2$. Dans le cas où $\alpha \neq 12$, les droites D et D' sont non coplanaires. En particulier : D n'est ni incluse dans H'_1, ni dans H'_2 puisque ces deux plans contiennent D'. Ainsi, on ne peut pas donner un système d'équation pour D contenant l'une des équations définissant D'
   Pour répondre à la question dans le cas où $\alpha = 12$, cherchons un paramétrage de D (cela revient à résoudre le système définissant D) :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} 2x + 3y - 4z & = & -1 \\ x - 2y + z & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 7y - 6z & = & -7 \\ x - 2y + z & = & 3 \end{array}\right.$$
   $$\Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(5, 6, 7)$$
   Le point $(1, -1, 0)$ vérifie l'équation $11x - y - 7z = 12$ et le vecteur $(5, 6, 7)$ vérifie l'équation $11x - y - 7z = 0$. La droite D est donc incluse dans le plan H'_1 dans le cas où $\alpha = 12$, ce qui signifie que l'on peut définir D par un système de rang deux contenant l'équation
   $$11x - y - 7z = 12$$
   .

2. Première matrice de rang 1 : définit un plan affine
   Deuxième matrice de rang 2 : définit une droite affine
   Troisième matrice de rang 3 : définit un point
   Quatrième matrice : de rang 2, soit incompatible, soit définit une droite affine dans le cas particulier où $c = 2a - b$

Cinquième matrice de rang 3 :le système est soit incompatible, soit définit un point (dans le cas particulier $d = 3b + 2a$

Sixième matrice de rang 2 : $L_3 = 2L_1 - L_2$ et $L_4 = L_1 + 2L_2$. Soit le système est incompatible, soit il définit une droite affine, dans le cas particulier où $c = 2a - b$ et $d = a + 2b$.

Septième matrice de rang 3 : $L_3 = 2L_1 - L_2$; et L_1, L_2, L_3 linéairement indépendantes. Soit le système est incompatible, soit il définit un point dans le cas particulier où $c = 2a - b$.

3. (a) 1- On cherche une équation de plan, par exemple en écrivant

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 0$$

$$-4x + 2y + 2z = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z = 0$$

2- Comme $v_3 = 2v_1 - v_2$, l'espace engendré est le même que si l'on n'avait que les deux premiers vecteurs.

3- Comme $\det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$, l'espace engendré par ces vecteurs est $\mathbb{R}^3$.

4- L'espace engendré est une droite. On peut choisir comme équations indépendantes vérifiées par le vecteur v_1 :

$$x - y = 0 \quad x - z = 0$$

(b) Le point (0,1,-1) appartient à l'espace vectoriel d'équation

$$2x - y - z = 0$$

donc les équations ne changent pas dans les questions 1 et 2. De même, ce point appartient à $\mathbb{R}^3$, et l'espace translaté est égal à lui même;

Pour la dernière question, le point P n'appartenant pas à la droite vectorielle $\vec{D}$ engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$; l'espace affine passant par P et de direction $\vec{D}$ a pour équations :

$$x - y = -1 \quad x - z = 1$$

4. On démontre que les trois plans se coupent le long d'une droite.

5. L'équation (E) est incomplète. En lui ajoutant un second membre non nul, on obtient un ensemble de solution muni d'une structure affine, sous-espace affine de l'espace des fonctions réelles, muni de sa structure affine canonique.

6. 1- L'application f est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$. Sa matrice représentative est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Cette application est de rang 1. Son noyau est l'hyperplan H d'équation $x - 2y + 3t = 0$

2- Soit $u = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, avec $u \notin H : a - 2b + 3d \neq 0$. Notons $H_1 = t_u(H)$
Montrons que H_1 est un sous espace affine de $\mathbb{R}^4$.

- $u = t_u(0)$, donc clairement $u \in H_1$, car $0 \in H$.
- Par définition, on a :

$$v \in H_1 \Leftrightarrow v = u + h, \text{ où } h \in H$$

de sorte que H_1 est bien le sous espace affine de $\mathbb{R}^4$, de direction H et passant par u.

3- En choisissant $u = (1, 0, 0, 0)$, l'équation cartésienne de H_1 est

$$x - 2y + 3t = f(u) = 1$$

4- Une base affine, de H_1 est formée de 4 points A, B, C, D de H_1 tels que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ forment une base de H. On peut par exemple choisir $A = u$, $B = u + (3, 0, 0, -1)$, $C = u + (0, 0, 1, 0)$, $D = u + (2, 1, 0, 0)$. En effet, les points A, B, C, D ainsi définis appartiennent bien à H_1 et les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ forment une famille libre de cardinal 3, donc une base de H.

7. Ici, on donne les équations cartésiennes, mais le plus simple pour répondre à la question posée est de repasser par une équation paramétrique : déterminer un point A du plan P et deux vecteurs (u, v) directeurs du plan vectoriel $\vec{P}$, puis en déduire l'équation cartésienne en utilisant un déterminant.

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

8. F_0 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ muni de sa base canonique $(1, X, X^2, X^3$ Il est de dimension quatre, engendré par (X, X^2, X^3, x^4). F_1 est un sous espace affine de $\mathbb{R}_4(X]$ muni de sa structure naturelle d'espace affine. Sa direction est F_0.

9. Soient V et W deux sous-espaces affines de E. Par commodité d'écriture, on omettra les flèches sur les vecteurs notés u, v ou w de $\vec{E}$.

Supposons que $\vec{V} \oplus \vec{W} = \vec{E}$. Montrons d'une part que $V \cap W$ est un singleton et d'autre part que $Aff(V \cup W) = E$.

- Pour commencer, montrons que $V \cap W$ n'est pas vide. Par hypothèse, V et W ne sont pas vide puisque ce sont des espaces affines. Soient $A \in V$ et $B \in W$. Par hypothèse, il existe une décomposition unique du vecteur $\vec{AB}$ en somme d'un vecteur de $\vec{V}$ et d'un vecteur de $\vec{W}$, autrement dit, il existe un unique point $C_1 \in V$ et un unique point $C_2 \in W$ tels que $\vec{AB} = \vec{AC_1} + \vec{C_2B}$, mais alors, d'après la relation de Chasles, on en déduit que $\vec{C_1C_2} = \vec{0}$, c'est à dire que $C_1 = C_2 = C \in V \cap W$.
  Supposons qu'il existe un deuxième point $C' \in V \cap W$, alors le vecteur $\vec{CC'} \in \vec{V} \cap \vec{W}$, de sorte que $\vec{CC'} = \vec{0}$: $C = C'$. On a bien démontré que si $\vec{V} \oplus \vec{W} = \vec{E}$, alors $V \cap W$ est un singleton

Remarque : pour démontrer que $V \cap W$ est réduit au point C construit, on peut aussi invoquer un argument de dimension ici : $\overrightarrow{V \cap W}$ n'étant pas vide, il s'agit d'un espace affine de direction $\vec{V} \cap \vec{W} = \{0\}$. Or un espace affine de dimension 0 est un point.

- Soit maintenant $M \in E$, quelconque. Montrons que $M \in Aff(V \cup W)$. Par hypothèse, il existe $v \in \vec{V}$ et $w \in \vec{W}$ tels que $\vec{CM} = v + w$, cela prouve que $M \in Aff(V \cup W)$

Réciproquement, supposons que $V \cap W$ est un singleton C, et que $Aff(V \cup W) = E$.

- Pour commencer, montrons que lorsque $V \cap W \neq \emptyset$, on a $\overrightarrow{AFF(V \cup W)} = \vec{V} + \vec{W}$ Par définition,

$$\overrightarrow{Aff(V \cup W)} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{MN},\ (M, N) \in (V \cup W)^2).$$

Il suffit donc de démontrer que pour tout $(M, N) \in (V \cup W)^2$, le vecteur $\vec{MN} \in \vec{V} + \vec{W}$. En effet, l'inclusion réciproque est évidente.
Soit donc $(M, N) \in (V \cup W)^2$. Si $(M, N) \in V^2$, alors $\overrightarrow{MN} \in \vec{V}$ et il n'y a rien à démontrer. De même si $(M, N) \in W^2$. On peut donc supposer que $M \in V$ et $N \in W$.
Comme $V \cap W \neq \emptyset$, il existe $C \in V \cap W$.
D'après la relation de Chasles, on peut écrire $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \in \vec{V} + \vec{W}$.
On a bien démontré que

$$\overrightarrow{Aff(V \cup W)} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{MN},\ (M, N) \in (V \cup W)^2) = \vec{V} + \vec{W}$$

- Soit maintenant $u \in \vec{E}$. Démontrons que $u \in \vec{V} + \vec{W}$. D'après la définition des espaces affines, il existe $M \in E$ tel que $\vec{u} = \vec{CM}$. Or, par hypothèse, $M \in Aff(V \cup W)$, ce qui implique que

$$\overrightarrow{CM} \in \mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{MN}, (M, N) \in V \cup W\}) = \vec{V} + \vec{W}$$

- Reste à démontrer que la somme est directe. Supposons que $v \in vecV \cap \vec{W}$, et montrons que $v = 0$. Par définition de l'espace affine V, il existe $M \in V$ tel que $\vec{CM} = v$. De même, il existe $N \in W$ tel que $\vec{CN} = v$. Mais par unicité de l'image de C par la translation de vecteur v (définition de l'espace affine E), on a $M = N \in V \cap W$ et par hypothèse, on en déduit que $M = N = C$, autrement dit $v = 0_{\vec{E}}$.

10. Il s'agit d'appliquer la relation de Chasles et d'utiliser la décomposition de l'espace direction suivant $\vec{V} \oplus \vec{W}$.
11. AI1. Si A et B sont deux points distincts du plan alors $A + \mathrm{Vect}(\vec{AB})$ contient A et B , et réciproquement, si une droite affine contient A et B, alors sa direction est engendrée par $vecAB$

    AI2. Soit $A \in D$ (un sous espace affine est non vide) et $\vec{u} \neq 0$ un vecteur directeur de D. Il existe B dans le plan tel que $\vec{u} = \vec{AB}$ et par définition d'un sous-espace affine, $B \in D$. Or $B \neq A$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$.

    AI3. Si tous les points étaient alignés, l'espace direction serait un espace vectoriel de dimension 1. Dans tout plan vectoriel, il existe donc trois points non alignés.

    AI4. Enfin l'axiome d'Euclide est vérifié : en effet, quelle que soit la droite D du plan et le point A, on peut définir D', la droite de direction $\vec{D}$ passant par A.
12. D_1 et D_2 sont coplanaires (car incluses dans P_3). Raisonnons par disjonction de cas. Soit elles sont parallèles, et on montre que D_3 est forcément également dirigée par le même vecteur, soit elles sont sécantes, et on montre que leur point commun appartient également à D_3.
13. pour la question a), on peut traiter tous les cas : rang de la matrice =0, 1 ou 2. Si le rang est de deux, alors on peut comme dans l'exercice précédent raisonner par disjonction de cas sur les droites D_1 et D_2. Pour la question b), utiliser les coordonnées barycentriques de P, Q et R dans la base affine (A, B, C). On notera que

$$P = Bar((B, \beta), (C, \gamma)) \Leftrightarrow \beta\vec{PB} + \gamma\vec{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

14. Il suffit d'exprimer $\vec{DG}$ dans la base $(\vec{DC},\ \vec{DB})$ du plan vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{AFF(B, C, D)}}$.
15. C'est un cas particulier du théorème de Menelaus. On peut donc le traiter en utiliser les coordonnées barycentriques suivant la base A, B, C : Montrer par exemple que le point d'intersection des droites (MN) et (BC) a les mêmes coordonnées barycentriques que P.
16. Utiliser les invariances du determinant (par ajout d'une des lignes aux autres, d'un multiple d'une colonne aux autres...)
17. En utilisant les barycentres : montrer que l'intersection de (AD) avec le plan (PQR) a les mêmes coordonnées barycentriques que S dans la base affine A, B, C, D
18. on peut considérer les homothéties de centres J et K de rapport $(-\frac{1}{3})$, ou appliquer le théorème de Thalès.
19. α, β et γ peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Il y a donc 27 combinaisons possibles a priori, mais à un coefficient multiplicatif près, donc on peut supposer que

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

    Sont donc impossibles :

    (a) $\alpha = \beta = \gamma = 0$

    (b) $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma < 0$ et les deux analogues

(c) $\alpha = 0$ et $\beta < 0$ et $\gamma < 0$ et les deux analogues

(d) tous trois négatifs

Il reste donc 19 combinaisons possibles correspondant à 19 zones du plan.

Celles qui sont souvent oubliées sont : les trois points, les trois segments et les 6 demi-droites.

20. (a) $A' = Bar((B,2),(C,1))$; $B' = Bar((C,2),(A,1))$; $C' = Bar((A,2),(B,1))$.

(b) Soit Ω le barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,4)$. Par associativité, Ω est le barycentre de $(C',3)$ et $(C,4)$ de sorte que $\Omega \in [CC']$. De même, Ω est le barycentre de $(B',6)$, $(B,1)$, de sorte que $\Omega \in [B'B]$. Finalement, $\Omega = I$ par définition de I.

(c) De même, J est le barycentre de $(B,2)$, $(C,1)$, $(A,4)$ et K est le barycentre de $(C,2)$, $(A,1)$, $(B,4)$.

(d) Par associativité, I est le barycentre de $(C,4)$, $(C',3)$ et J le barycentre de $(C,1)$, $(C',6)$ Ainsi, on a

$$\overrightarrow{JC} + 6\overrightarrow{JC'} = \vec{0}$$

$$4\overrightarrow{CI} + 3\overrightarrow{C'I} = \vec{0}$$

Soit I' le milieu de $[CJ]$. Montrons que $I' = I$. Par définition, on a

$$\overrightarrow{CI'} + \overrightarrow{JI'} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{CI'} + \frac{1}{7}\overrightarrow{CI'} + \frac{6}{7}\overrightarrow{C'I'} = \vec{0}$$

ce qui équivaut, en multipliant par $\frac{7}{2}$ à

$$4\overrightarrow{CI'} + 3\overrightarrow{C'I'} = \vec{0}$$

De sorte que $I' = I$. De même, on démontre que J est le milieu de $[A,K]$ et K le milieu de $[BI]$.

(e)
- K étant le milieu de $[BI]$, le triangle BJI a une aire de mesure double de celle du triangle IJK. En particulier,

$$Aire(BKJ) = Aire(IJK)$$

de même, on montre que

$$Aire(AIJ) = Aire(IJK) \qquad Aire(CIK) = Aire(IJK)$$

- J étant le milieu de $[AK]$, Le triangle ABK a une aire de mesure double de celle du triangle BJA. En particulier :

$$Aire(BJA) = Aire(BKJ)$$

de même, on montre que

$$Aire(CIA) = Aire(AIJ) \qquad Aire(CKB) = Aire(CKI)$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} Aire(ABC) &= Aire(BJA) + Aire(BKJ) + Aire(CKB) + Aire(CKI) \\ &+ Aire(CIA) + Aire(AIJ) + Aire(IJK) = 7Aire(IJK) \end{aligned}$$

21. (a) C'est une conséquence directe de l'associativité du barycentre. Notons G le centre de gravité du quadrilatère. Il suffit de démontrer que G appartient à chacune des droites considérées.

(b) Toujours l'associativité du barycentre.

22. 1)

(a) Par définition du barycentre :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IG_1} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} \\ &= -\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD} \end{aligned}$$

Ainsi : $\overrightarrow{IG_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{JD}$

(b) Par définition du barycentre :

$$4\overrightarrow{IG_2} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{ID}$$

de sorte que $\overrightarrow{IG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$: G_2 est le milieu de $[I,D]$.

(c) On a démontré que $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{JD}$ dans la question a), de sorte que IG_1DJ est un parallèlogramme, et que $\overrightarrow{IG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}$ dans la question b), de sorte que G_2 est située à l'intersection des diagonales du parallèlogramme : G_2 est l'intersection des droites (ID) et (G_1, J).

2)

(a) Par définition, G_m existe si et seulement si la somme des coefficients est non nulle, c'est à dire si $m \neq 0$.

(b) Par associativité du barycentre, on a

$$\begin{aligned} 2m\overrightarrow{JG_m} &= 2\overrightarrow{JI} + (m-2)\overrightarrow{JC} + m\overrightarrow{JD} \\ &= 2\overrightarrow{JI} - 2\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{CI} \end{aligned}$$

En particulier, $2m\overrightarrow{JG_m}$ ne dépend pas de m.

(c) On a démontré dans la première partie que $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{CJ}$, de sorte que $ICJG_1$ est un parallèlogramme, et $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{JG_1}$.
On en déduit que G_m décrit l'ensemble de la droite (JG_1), à l'exception du point J.

23. Il s'agit de $\mathcal{S}_3$, le groupe des permutations de trois éléments.
24. Il s'agit de $\mathcal{S}_4$, le groupe des permutations de quatre éléments.
25. Soit $\Omega = E_1 \cap E_2$. Ω est fixe par chaque symétrie, donc fixe par la composée. Par ailleurs, pour tout $M \in E$ on a :

$$\overrightarrow{\Omega s_1 \circ s_2(M)} = \overrightarrow{s_1 \circ s_2}(\overrightarrow{\Omega M}) = \vec{s_1} \circ \vec{s_2}(\overrightarrow{\Omega M}) = -\overrightarrow{\Omega M}$$

En effet, si $\overrightarrow{\Omega M} = \vec{u} + \vec{v} \in \vec{E}_1 \oplus \vec{E}_2$, alors

$$\vec{s_2}(\overrightarrow{AM}) = \vec{s_2}(\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} + \vec{v}$$

puis

$$s_1(-\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$$

26. Soit p la projection sur la face ABC de direction Vect($\vec{\text{CD}}$). Les points A,B et C sont fixes et D est envoyé sur C. Par conservation des barycentres par les applications affines, l'isobarycentre G de ABD est envoyé sur l'isobarycentre G' de ABC. On en déduit que $GG' \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{CD})$, de sorte que les droites (GG') et (CD) sont parallèles.
27. Toute application affine conservant le parallélogramme conserve l'isobarycentre O. On peut donc "vectorialiser" le problème : notons $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$. Toute application affine conservant $ABCD$ est définie de manière unique par les images de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sur les vecteurs $\vec{i}$, $-\vec{i}$, $\vec{j}$, $-\vec{j}$, de manière à ce que le couple image forme une base du plan vectoriel. Notons Δ la parallèle à (AB) passant par O et Δ' la parallèle à (AC) passant par O. Il y a huit possibilités pour l'image du couple :
   - $(\vec{i}, \vec{j})$: il s'agit de l'application identité
   - $(\vec{i}, -\vec{j})$: il s'agit de la symétrie s_1 par rapport à (AD) dans la direction de (BC)
   - $(-\vec{i}, \vec{j})$: il s'agit de la symétrie s_2 par rapport à (BC) dans la direction de (AD)
   - $(-\vec{i}, -\vec{j})$: il s'agit de la symétrie centrale
   - $(\vec{j}, \vec{i})$: il s'agit de la symétrie s_3 par rapport à Δ' dans la direction de Δ.
   - $(\vec{j}, -\vec{i})$: si le parallélogramme est un carré, il s'agit d'une rotation d'angle $\pi/2$. Notons r cette application.
   - $(-\vec{j}, \vec{i})$: si le parallélogramme est un carré, il s'agit d'une rotation d'angle $-\pi/2$.
   - $(-\vec{j}, -\vec{i})$: il s'agit de la symétrie s_4 par rapport à Δ dans la direction de Δ'.

   On vérifie que le groupe est engendré par deux éléments (par exemple s_1 et r). Il s'agit du groupe diedral D_4. Groupe non abélien d'ordre 8.
   Par exemple : $s_1 \circ r = s_4$ et $r \circ s_1 = s_3$.
28. La direction de la composée d'applications affine est la composée des directions. On a donc : $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}$ est soit l'identité, soit une translation. Soit $a \in E$, calculons l'image de a.

$$f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}(a) = f(f^{-1}(a) + \vec{u}) = f \circ f^{-1}(a) + \vec{f}(\vec{u}) = a + \vec{f}(\vec{u})$$

   de sorte que si $\vec{f}(\vec{u}) \neq 0$, alors $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}$ est la translation $t_{\vec{f}(\vec{u})}$. Sinon, il s'agit de l'identité.
   En particulier :

$$h_{(a,\lambda)} \circ t_{\vec{u}} \circ h_{(a,\lambda^{-1})}$$

   est soit l'identité, soit une translation. Calculons l'image de a.
   On a : $h_{(a,\lambda^{-1})}(a) = a$ et $t_{\vec{u}}(a) = a + \vec{u}$ de sorte que

$$h_{(a,\lambda)} \circ t_{\vec{u}} \circ h_{(a,\lambda^{-1})}(a) = a + \lambda\vec{u}$$

   Ainsi, on a : $h_{(a,\lambda)} \circ t_{\vec{u}} \circ h_{(a,\lambda^{-1})} = t_{\lambda\vec{u}}$
29. Remarquons que si 1 est valeur propre de $\vec{f}$, alors f admet soit une infinité de points fixes, soit aucun. En effet, dès lors que $f(\Omega) = \Omega$, si $\vec{u}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1, alors toute la droite affine passant par Ω et dirigée par $\vec{u}$ est une droite de points fixes.
   Remarquons également que si f admet deux points fixes A et B, alors $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$ donc 1 est valeur propre de f.
   Il reste donc à démontrer que si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$, f admet un point fixe. Supposons de donc que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$. Par définition, $\vec{f} - Id_{\vec{E}}$ est bijective.

   Analyse : Supposons que Ω est un point fixe de f. Alors

$$\forall M \in E,\ f(\Omega) = f(M + \overrightarrow{M\Omega}) = f(M) + \vec{f}(\overrightarrow{M\Omega})$$

$$\forall M \in E,\ f(\Omega) = \Omega = M + \overrightarrow{M\Omega}$$

   D'où :

$$\forall M \in E,\ M + \overrightarrow{M\Omega} = f(M) + \vec{f}(\overrightarrow{M\Omega})$$

$$\forall M \in E,\ \overrightarrow{f(M)M} = -\overrightarrow{M\Omega} + \vec{f}(\overrightarrow{M\Omega}) = \left(\vec{f} - Id_{\vec{E}}\right)(\overrightarrow{M\Omega})$$

Synthèse : Soit $M \in E$. Puisque $\vec{f}$ n'admet pas 1 pour valeur propre, il existe un et un seul vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$ tel que

$$\left(\vec{f} - Id_{\vec{E}}\right)(\vec{u}) = \overrightarrow{f(M)M} .$$

Soit alors $\Omega \in E$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{M\Omega}$. Alors par construction

$$f(\Omega) = f(M) + \vec{f}(\vec{u}) = f(M) + \overrightarrow{f(M)M} + \overrightarrow{M\Omega} = \Omega.$$

Donc Ω est point fixe de f, est c'est le seul sans quoi 1 serait valeur propre.

30. (a) $F \cap G = \{(1,2,0\}$ est un singleton de sorte que $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont en somme directe. De plus, $\dim(F) + \dim(G) = 3 = \dim(E)$. Donc $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont des espaces supplémentaires dans E.

(b)

détermination de l'application p_1 : Pour $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $M' = p_1(M)$ est l'unique point qui vérifie :

$$M' \in F \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{G}$$

G est une droite affine dirigée par le vecteur $(1,0,1)$, de sorte que

$$(x', y', z') = (x,y,z) + \lambda(1,0,1)$$

et F est un plan dont on connaît l'équation donc $M' \in F$ implique :

$$x' + y' - 2z' = 3$$

On en déduit :

$$x + \lambda + y - 2z - 2\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = x + y - 2z - 3$$

Finalement :

$$p_1(x,y,z) = (2x + y - 2z - 3, y, x + y - z - 3)$$

détermination de l'application p_2 : Pour $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $M'' = p_2(M)$ est l'unique point qui vérifie :

$$M'' \in G \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MM''} \in \overrightarrow{F}$$

La droite affine G est définie par deux équations de sorte que les coordonnées (x'', y'', z'') de M'' vérifient :

$$x'' - z'' = 1 \qquad y'' = 2$$

De plus, par définition de $\overrightarrow{F}$, on a

$$x'' - x + y'' - y - 2(z'' - z) = 0$$

Finalement, on trouve

$$p_2(x,y,z) = (x'', y'', z'') = (2z + 4 - x - y, 2, 2z + 3 - x - y)$$

(c) Par définition, l'application composée $p_1 \circ p_2$ vérifie, pour tout point M : $p_1 \circ p_2(M)$ est l'unique point N tel que $N \in F$ et $\overrightarrow{M''N} \in \overrightarrow{G}$. Or par définition $M'' \in G$, de sorte que la deuxième condition implique que $N \in G$. Par conséquent $N \in F \cap G$ de sorte que $N = (1,2,0)$

$$\forall M \in E,\ p_2 \circ p_1(M) = (1,2,0)$$

(d)

détermination de l'application s_1 : Par définition, $M_1 = s_1(M)$ est l'unique point de E tel que

$$\overrightarrow{MM_1} \in \overrightarrow{G} \qquad \text{et} \qquad \frac{M + M_1}{2} \in F$$

On trouve

$$s_1(x,y,z) = (3x + 2y - 4z - 6, y, 2x + 2y - 3z - 6)$$

on vérifie que le milieu de $[M, M_1]$ est le point M', projection de M sur F.

détermination de l'application s_2 : Par définition, $M_2 = s_2(M)$ est l'unique point de E tel que

$$\overrightarrow{MM_2} \in \overrightarrow{F} \qquad \text{et} \qquad \frac{M + M_2}{2} \in G$$

On trouve

$$s_2(x,y,z) = (8 - 3x - 2y + 4z, 4 - y, 6 - 2x - 2y + 3z).$$

On vérifie que le milieu de $[M, M_2]$ est le point M'', projection de M sur F.