Mathématiques du signal
Ressource R113

Cyrille SICLET, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr
Kévin KASPER, kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr
Bruno TISSERAND, bruno.tisserand@univ-grenoble-alpes.fr
Clara CHATEIGNER, clara.chateigner@univ-grenoble-alpes.fr

Version 2024

Table des matières

1 Notions de base **2**
1.1 Rappels sur les ensembles . . . 2
1.2 Rappels de calculs . . . 6

2 Introduction aux signaux **9**
2.1 Rappels sur les fonctions . . . 9
2.2 Signaux usuels . . . 12
2.3 Caractéristiques fondamentales des signaux . . . 14
2.4 Opérations sur les signaux . . . 15

3 Éléments de trigonométrie **23**
3.1 Radian et degré . . . 23
3.2 Cercle trigonométrique et propriétés de base . . . 23
3.3 Angles remarquables . . . 24
3.4 Exercices . . . 25

4 Signaux périodiques **26**
4.1 Généralités . . . 26
4.2 Propriétés . . . 26
4.3 Des signaux périodiques classiques . . . 27
4.4 Exercices . . . 28

1 Notions de base

1.1 Rappels sur les ensembles

1.1.1 Définition

Définition 1 (Ensemble)**.** Un **ensemble** est une collection d'éléments mathématiques.

Exemple 2 (Des ensembles).

- L'ensemble des nombres entiers de 1 à 9 : $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;
- l'ensemble des points du plan 2D ;
- $\{n \text{ entier}/1 \leq n \leq 6\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et 6.

Remarque : définition « naïve »
On parle de définition naïve car en réalité la théorie des ensembles repose sur des axiomes beaucoup plus complexes pour éviter les incohérences (comme l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes).

T.7

1.1.2 Opérations de base sur les ensembles

Définition 3 (Inclusion)**.** Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que l'ensemble $\mathbb{E}$ est **inclus** dans l'ensemble $\mathbb{F}$ lorsque tout élément de $\mathbb{E}$ est aussi dans $\mathbb{F}$, autrement dit :
$\boxed{\mathbb{E} \subset \mathbb{F} \text{ lorsque } x \in \mathbb{E} \Rightarrow x \in \mathbb{F}}$.

Exemple 4 (Ensemble inclus dans un autre ensemble).

- $\{1;2\} \subset \{1;2;3\} \subset \{1;2;3;5\}$;
- $\{5;7\} \subset \{5;6;7\} \subset \{1;2;3;5;6;7;8\}$;
- mais $\{5;7\} \not\subset \{5;6\}$.

Remarque
Tout ensemble est inclus dans lui-même : $\{1;2\} \subset \{1;2\}$; $\{3;4;5\} \subset \{3;4;5\}$.

T.8

Définition 5 (Égalité)**.** Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que l'ensemble $\mathbb{E}$ est **égal** à l'ensemble $\mathbb{F}$ lorsque $\mathbb{E}$ contient exactement les mêmes éléments que $\mathbb{F}$, autrement dit :
$\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F} \text{ lorsque } x \in \mathbb{E} \Leftrightarrow x \in \mathbb{F}}$.

Propriété 6 (Égalité)**.** *Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ si et seulement si $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ <u>et</u> $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$*

Exemple 7 (Ensembles égaux).

- $\{1;2\} = \{2;1\} \neq \{1;2;3;5\}$;
- $\{5;7\} = \{7;5\} \neq \{1;2;3\}$.

T.9

Définition 8 (Union)**.** Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que l'ensemble $\mathbb{G} = \mathbb{E} \cup \mathbb{F}$ est l'**union** (ou la **réunion**) des ensembles $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ lorsque :
$\boxed{x \in \mathbb{G} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{E} \text{ \underline{ou} } x \in \mathbb{F}]}$. ($x$ peut être dans $\mathbb{E}$, dans $\mathbb{F}$ ou dans les deux à la fois)

Exemple 9 (Réunion d'ensembles).

- $\{1;2\} \cup \{2;3;5\} = \{1;2;3;5\}$;
- $\{2;5;7\} \cup \{1;2;6;7\} = \{1;2;5;6;7\}$.

Remarque
Pour tout ensemble $\mathbb{E}$, on a $\mathbb{E} \cup \mathbb{E} = \mathbb{E}$.

➔ Exercice 1. *Union :* Que vaut $\{7;3;9;1\} \cup \{3;5;7;4\}$? ☐

T.10

Définition 10 (Intersection)**.** Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que l'ensemble $\mathbb{G} = \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ est l'**intersection** des ensembles $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ lorsque :
$\boxed{x \in \mathbb{G} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{E} \text{ \underline{et} } x \in \mathbb{F}]}$.

Exemple 11 (Intersection d'ensembles).

- $\{2;5;7\} \cap \{1;2;6;7\} = \{2;7\}$;
- $\{2;5;7\} \cap \{1;3;6;8\} = \{\,\}$.

Remarque
Pour tout ensemble $\mathbb{E}$, on a $\mathbb{E} \cap \mathbb{E} = \mathbb{E}$.

➔ Exercice 2. *Intersection :* Que vaut $\{7;3;9;1\} \cap \{3;5;7;4\}$? ☐

T.11

Définition 12 (Soustraction)**.** Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. L'ensemble $\mathbb{E}$ **privé de** l'ensemble $\mathbb{F}$ est l'ensemble $\mathbb{G} = \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$ défini par :
$\boxed{x \in \mathbb{G} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{E} \text{ \underline{et} } x \notin \mathbb{F}]}$.

Exemple 13 (Soustraction de deux ensembles).

- $\{1;2\} \setminus \{2;3;5\} = \{1\}$;
- $\{2;5;7\} \setminus \{1;2;6;7\} = \{5\}$;
- $\{2;5;7\} \setminus \{1;3;6;8\} = \{2;5;7\}$.

➔ Exercice 3. *Soustraction :* Que vaut $\{7;3;9;1\} \setminus \{3;5;7;4\}$? ☐

T.12

Propriété 14 (Commutativité, associativité et distributivité de l'union et de l'intersection)**.** *Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois ensembles.*

1. *Commutativité de l'union :* $\mathbb{E} \cup \mathbb{F} = \mathbb{F} \cup \mathbb{E}$
2. *Commutativité de l'intersection :* $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} = \mathbb{F} \cap \mathbb{E}$
3. *Associativité de l'union :* $\mathbb{E} \cup (\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) \cup \mathbb{G}$
4. *Associativité de l'intersection :* $\mathbb{E} \cap (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \cap \mathbb{G}$
5. *Distributivité de l'union sur l'intersection :* $\mathbb{E} \cup (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) \cap (\mathbb{E} \cup \mathbb{G})$
6. *Distributivité de l'intersection sur l'union :* $\mathbb{E} \cap (\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathbb{G})$

T.13

Définition 15 (Ensemble vide)**.** L'ensemble vide est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset = \{\}$.

Propriété 16 (Relations avec l'ensemble vide $\emptyset$)**.** *L'ensemble vide $\emptyset$ étant l'ensemble n'ayant aucun élément, alors tout ensemble $\mathbb{E}$ vérifie :*

1. $\mathbb{E} \cup \emptyset = \mathbb{E}$
2. $\mathbb{E} \cap \emptyset = \emptyset$
3. $\mathbb{E} \setminus \mathbb{E} = \emptyset$.

T.14

1.1.3 Les ensembles de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1.1.3.A Définitions et notations

Définition 17 (Entiers naturels et entiers relatifs)**.** On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs :

- $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;\ldots\}$;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;\ldots\}$.

Définition 18 (Ensembles dérivés de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$)**.** On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{Z}^*$ celui des entiers relatifs non nuls :

- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1;2;3;\ldots\}$;
- $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\ldots;-3;-2;-1;1;2;\ldots\}$.

T.15

Définition 19 (Nombres rationnels et nombres réels)**.** On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\middle/ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Les nombres réels peuvent être représentés par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.

Définition 20 (Ensembles dérivés de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$)**.** On note $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble des nombres rationnels non nuls, $\mathbb{R}^*$ celui des réels non nuls, $\mathbb{R}_+$ celui des réels positifs ou nuls, et $\mathbb{R}_-$ celui des réels négatifs ou nuls :

- $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\} = \{\frac{p}{q}\big/ p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^*\}$;
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}\big/ x \leq 0\}$; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}\big/ x \geq 0\}$;
- $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}\big/ x > 0\}$; $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R}\big/ x < 0\}$.

Remarques :

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ pour b et d différents de 0 ;
- la barre oblique « $\big/$ » utilisée dans les définitions précédentes signifie « tel que ».

T.16

Définition 21 (Nombres décimaux)**.** Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire exactement avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Les nombres décimaux sont les quotients d'entiers par des puissances de 10 et se présentent ainsi comme des rationnels particuliers : $\boxed{\mathbb{D} = \left\{\frac{p}{10^n} \textbf{ avec } p \in \mathbb{Z} \textbf{ et } n \in \mathbb{N}\right\}}$.

Exemple 22.

- $1{,}75 = \frac{175}{100} \in \mathbb{D}$;
- $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

T.17 **Remarques** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;

Exercice 4. *Ensembles usuels* : Compléter le tableau suivant :

n	$n \in \mathbb{N}$?	$n \in \mathbb{N}^*$?	$n \in \mathbb{Z}$?	$n \in \mathbb{Q}$?	$n \in \mathbb{R}$?	$n \in \mathbb{R}_-$?	$n \in \mathbb{R}_+^*$?	$n \in \mathbb{D}$?
0								
π								
$-\frac{3}{5}$								
3,1								
$-\sqrt{2}$								
-7								
5								
$\frac{7}{9}$								

T.18

Définition 23 (Arrondi à 10^{-n} près)**.** Étant donné un nombre réel x et un entier positif n, on appelle arrondi à 10^{-n} près le nombre décimal $\hat{x}$ le plus proche de x avec n chiffres après la virgule.

Exemple 24.

- $1{,}8988 \approx 1{,}9$ à 10^{-1} près ;
- $10{,}3451 \approx 10{,}35$ à 10^{-2} près.

Exercice 5. *Arrondi* : Donner les arrondis à 10^{-1} près, 10^{-2} près et 10^{-3} près des nombres suivants :

1 1,12345 **2** 2,88234 **3** 3,45164

T.19

Définition 25 (Notation scientifique)**.** La notation scientifique d'un nombre décimal x est une manière d'écrire ce nombre sous la forme $x = \pm a \times 10^p$ où $a \in [1,10[$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Définition 26 (Notation ingénieur)**.** La notation ingénieur d'un nombre décimal x est une manière d'écrire ce nombre sous la forme $x = \pm a \times 1000^p = \pm a \times 10^{3p}$ où $a \in [1;1000[$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Exemple 27.

Nombre	Notation scientifique	Notation ingénieur
10,17	$1{,}017 \times 10^1 = 1{,}017e1$	$10{,}17 \times 10^0 = 10{,}17$
12345	$1{,}2345 \times 10^4 = 1{,}2345e4$	$12{,}345 \times 10^3 = 12{,}345k$
0,0123	$1{,}23 \times 10^{-2} = 1{,}23e-2$	$12{,}3 \times 10^{-3} = 12{,}3m$

T.20

Unités de base de la notation ingénieur

10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
f	p	n	μ	m	k	M	G	T	P
femto	pico	nano	micro	milli	kilo	méga	giga	téra	péta

Exercice 6. *Notations scientifique et ingénieur* : Compléter le tableau suivant :

Nombre	Notation scientifique	Notation ingénieur	Notation avec unité
32316	$3{,}2316 \times 10^4$	$32{,}316 \times 10^3$	32,316k
0,0002			
	3×10^{-5}		
		32×10^{-9}	
			17 M

T.21

1.1.4 Produit d'ensembles

Définition 28 (Produit de deux ensembles)**.** Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On définit l'**ensemble produit** $\mathbb{G} = \mathbb{E}\times\mathbb{F}$ par l'ensemble des couples $(x;y)$ avec $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$. Ainsi, $\mathbb{G} = \mathbb{E}\times\mathbb{F} = \{(x;y) \big/ x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{F}\}$.

Définition 29 (Puissance entière d'un ensemble)**.** Soient $\mathbb{E}$ un ensemble et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{E}^n = \underbrace{\mathbb{E}\times\cdots\times\mathbb{E}}_{n \text{ fois}}$ est l'ensemble des n-uplets $(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ avec $x_1 \in \mathbb{E}$, $x_2 \in \mathbb{E}$, ..., et $x_n \in \mathbb{E}$.

T.22

Exemple 30 (Quelques ensembles produits).

- $(x;y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{Q} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{Q}]$;
- $(1;-1) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ mais $(-1;1) \notin \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$;
- $(x;y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow [x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}]$.

➔ Exercice 7. *Ensemble produit* : Est-ce que
1 $(3;\pi) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$? 2 $(\sqrt{2};\pi;7) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$? 3 $(\sqrt{2};\pi;7) \in \mathbb{R}^3$? 4 $(\sqrt{2};\pi;7) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}\times\mathbb{R}$? □

T.23

1.2 Rappels de calculs

1.2.1 Opérations sur les fractions

Définition 31 (Addition de deux fractions)**.** Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. Alors $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}}$.

Remarques :

- si les deux fractions ont le même dénominateur $(b=d)$ alors $\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$;
- si l'une des deux fractions est en fait un nombre entier, par exemple $b=1$ et $\frac{a}{b} = a$ alors $a+\frac{c}{d} = \frac{ad+c}{d}$.

➔ Exercice 8. *Sommes de fractions* : Calculer les sommes suivantes. On donnera chaque résultat sous sa forme irréductible.

1 $\frac{1}{2}+\frac{2}{3} =$ 2 $\frac{3}{4}+\frac{5}{8} =$ 3 $\frac{3}{14}-\frac{2}{21} =$
4 $-1+\frac{2}{3} =$ 5 $2-\frac{2}{3} =$ 6 $\frac{1}{2}-\frac{1}{4} =$
□

T.24

Définition 32 (Multiplication de deux fractions)**.** Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. Alors $\boxed{\frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$.

Remarque : si l'une des deux fractions est en fait un nombre entier, par exemple $b=1$ et $\frac{a}{b} = a$ alors $a\times\frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$.

➔ Exercice 9. *Produits de fractions* : Calculer les produits suivants. On donnera chaque résultat sous sa forme irréductible..

1 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} =$ 2 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8} =$ 3 $\frac{-3}{14}\times\left(-\frac{2}{21}\right) =$
4 $-1\times\frac{2}{3} =$ 5 $2\times\frac{-2}{3} =$ 6 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{-4} =$
□

T.25

Définition 33 (Division d'une fraction par une fraction)**.** Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. Alors $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}}$.

Remarque : si $\frac{a}{b} = 1$ on obtient l'inverse d'une fraction avec $a = b = 1$: $\boxed{\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}}$.

➔ Exercice 10. *Rapports de fractions :* Calculer les produits suivants. On donnera chaque résultat sous sa forme irréductible..

1 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} =$ 2 $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} =$ 3 $\frac{\frac{-3}{14}}{\left(-\frac{2}{21}\right)} =$

4 $\frac{-1}{\frac{2}{3}} =$ 5 $\frac{2}{\frac{-2}{3}} =$ 6 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{-4}} =$

□

T.26

1.2.2 Puissances

1.2.2.A Quelques propriétés de calcul

Définition 34 (Puissance d'un nombre réel)**.** Soient $n,p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- $a^0 = 1$ si $a \neq 0$;
- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$;
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$;
- $a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$ si $a \geq 0$. Il s'agit de l'unique nombre réel positif b tel que $b^p = a$;
- $a^{n/p} = \sqrt[p]{a^n} = \sqrt[p]{a}^n$ si $a \geq 0$;
- $a^{-n/p} = \sqrt[p]{\dfrac{1}{a^n}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt[p]{a}}\right)^n$ si $a > 0$.

Remarque : si $a < 0$ et p entier impair, $a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$ existe aussi et désigne l'unique nombre (négatif) b tel que $b^p = a$.

➔ Exercice 11. *Puissances :* Effectuer les calculs suivants :

1 $4^{\frac{1}{2}} =$ 2 $8^{\frac{1}{3}} \times 2^{-1} =$ 3 $9^{\frac{6}{3}} =$ 4 $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{7}{21}} =$

□

T.27

Propriété 35 (Propriétés de la puissance)**.** *Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et $q,r \in \mathbb{Q}$. Alors, lorsque les puissances existent (cf. définition précédente) :*

1. $(ab)^q = a^q b^q$;
2. $(a^q)^r = (a^r)^q = a^{qr}$;
3. $a^q a^r = a^{q+r}$;
4. $a^{-q} = \dfrac{1}{a^q}$;
5. $\frac{a^q}{a^r} = a^{q-r}$;
6. *en général :* $(a+b)^q \neq a^q + b^q$.

➔ Exercice 12. *Simplification d'expressions faisant intervenir des radicaux :* Simplifier les expressions suivantes

1 $\sqrt{8} - 2\sqrt{2} =$ 2 $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} =$ 3 $\sqrt{27} - \sqrt{3} =$

□

➔ EXERCICE 13. *Calculs sur les puissances* : Simplifier les expressions suivantes

1 $\sqrt{8} \times 8^{-\frac{1}{2}} =$ **2** $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 =$ **3** $\frac{12^9}{12^8} =$

☐

T.28

Propriété 36 (Identités remarquables)**.** *Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

➔ EXERCICE 14. *Identités remarquables* : Utiliser les identités remarquables pour effectuer les calculs suivants sans calculatrice :

1 $999^2 =$ **2** $1001^2 =$ **3** $999 \times 1001 =$

☐

T.29

2 Introduction aux signaux

Définition 37 (Les signaux)**.**
Les signaux sont des fonctions de la variable temporelle t. Ils véhiculent une information délivrée par l'évolution d'une grandeur physique en fonction du temps t, et peuvent être de natures variées :

- en **électronique** : signal de tension ou d'intensité ;
- en **télécommunication** : signal électromagnétique en sortie d'un modulateur ;
- en **téléphonie** : signal de parole, signal vidéo pour une visioconférence.

Contexte général du cours
En mathématiques, on utilise souvent la lettre x pour désigner la variable réelle, et la lettre f pour la fonction. Dans ce cours on utilisera la lettre t plutôt que x pour désigner la variable temporelle réelle. On se limitera aux signaux analogiques modélisables par des fonctions de la variable $t \in \mathbb{R}$, qu'on notera souvent $s(t)$ plutôt que $f(x)$. Les signaux numériques seront traités par la ressource R213 (Mathématiques des systèmes numériques).

T.31

2.1 Rappels sur les fonctions

2.1.1 Définitions

Définitions 38 (Fonction réelle de la variable réelle)**.**
Une **fonction** f réelle de la variable réelle est une **relation** qui relie un réel x à **au plus un** réel y.
L'élément y se note $f(x)$. La fonction se note : $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{array} \right.$.
$y = f(x)$ est appelé l'**image** de x par f et x est un **antécédent** de y par f.

Définition 39 (Ensemble ou domaine de définition)**.**
L'**ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué par les réels x qui ont une image par f : on le note $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe }\}$.

Définition 40 (Ensemble image)**.**
L'ensemble formé par les images y de tous les éléments x de D_f par f est appelé **ensemble image** de f : on le note $I_f = \{y = f(x) \in \mathbb{R} / x \in D_f\}$.

Définition 41 (Graphe géométrique $\mathcal{G}_f$ de f)**.**
Le **graphe (géométrique)** de f est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan $\mathcal{P}$, dont l'abscisse est $x \in D_f$ et l'ordonnée est $y = f(x) \in I_f$. On le note : $\mathcal{G}_f = \left\{M(x; f(x)) \in \mathcal{P} / x \in D_f\right\}$.

T.32

Exemple 42 (La fonction carré).
La fonction carré est définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array} \right.$$

L'image de x par f est $y = f(x) = x^2$. Cette fonction se caractérise par $D_f = \mathbb{R}$, $I_f = \mathbb{R}^+$ car un carré est toujours positif (ou nul). Son graphe est donné figure 1.

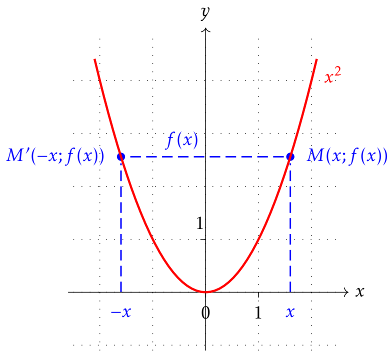

FIGURE 1 – Graphe de la fonction carré avec sa symétrie axiale par rapport à (0y).

T.33

2.1.2 Fonctions usuelles « simples »

Les fonctions simples sont listées table 1.

	f	**Expression** $f(x)$	D_f	I_f
Polynôme	**Constante**	c	$\mathbb{R}$	$\{c\}$
	Identité	$\mathrm{Id}(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
	Affine	$ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
	Monôme	x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$ si n pair $\mathbb{R}$ si n impair
	Polynôme (iale)	$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$	$\mathbb{R}$	dépend des coeff. si n pair $\mathbb{R}$ si n impair
	Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
Fraction	**Inverse**	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
	Fraction rationnelle	$\frac{b_0 + b_1 x + \ldots + b_M x^M}{a_0 + a_1 x + .. + a_N x^N}$	$\left\{x \in \mathbb{R} / \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \neq 0\right\}$	dépend des coefficients
Trigonométrie	**Sinus**	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
	Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1;1]$
	Tangente	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$

TABLE 1 – Les fonctions « simples ».

T.34

2.1.3 Fonction définie par morceaux

Définition 43 (Fonction définie par morceaux)**.**
Une fonction f de la variable x peut être définie par **plusieurs expressions analytiques**, dépendantes des valeurs prises par x.

Exemple 44 (Valeur absolue (abs)).
Elle est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, si } x \geq 0 \\ -x & \text{, si } x < 0. \end{cases}$$

Par exemple, $|3| = 3$ car $3 \geq 0$ tandis que $|-4| = -(-4) = 4$ car $-4 < 0$. Son graphe est donné figure 2.

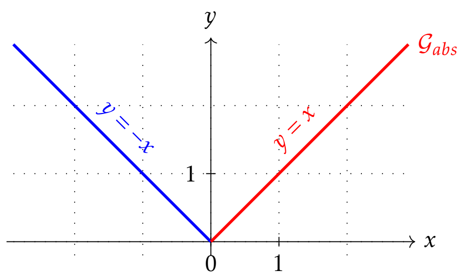

Figure 2 – Graphe de la fonction valeur absolue (définie par morceaux) avec ses deux règles de définition.

T.35

2.1.4 Polynômes du second degré

Définition 45 (Discriminant d'un polynôme du second degré)**.** Soit $P(x) = ax^2+bx+c$ un polynôme du second degré avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 46 (Racines réelles d'un polynôme du second degré)**.** *On appelle racine d'un polynôme $P(x)$) toute solution de l'équation $P(x) = 0$. Le nombre de racines réelles dépend du signe du discriminant :*

- *si $\Delta > 0$, $P(x)$ possède deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;*
- *si $\Delta = 0$, $P(x)$ possède une racine réelle double $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$;*
- *si $\Delta < 0$, $P(x)$ ne possède auune racine réelle.'*

➔ Exercice 15. *Racines réelles d'un polynôme du second degré* : Donner les racines réelles des polynômes suivants, si elles existent :
1 $P(x) = x^2 - x + 3$ **2** $P(x) = -2x^2 - 2x + 1$ **3** $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$ ☐

T.36

Propriété 47 (Signe d'un polynôme du second degré)**.** *Le signe d'un polynôme du second degré dépend de a son terme de plus haut degré, son discriminant Δ et de ses racines si elles existent :*

- *si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a si $x \leq x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x \geq x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et il est du signe opposé à celui de a dans le cas contraire ;*
- *si $\Delta \leq 0$, $P(x)$ est du signe de a pour tout x.*

➔ Exercice 16. *Signe d'un polynôme du second degré* : Donner le signe des polynômes suivants, selon la valeur de x :
1 $P(x) = -x^2 - x + 2$ **2** $P(x) = 2x^2 + 2x + 1$ **3** $P(x) = x^2 + 2x + 1$ ☐

T.37

➔ EXERCICE 17. *Domaine de définition* :
Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :
1 $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ 2 $g(x) = x^2+1$ 3 $h(x) = \sqrt{2x+3}$ 4 $u(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$ 5 $v(x) = \sqrt{x^2+2x-3}$
Correction :
1 $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ 2 $D_g = \mathbb{R}$ 3 $D_h = [-\frac{3}{2};+\infty[$ 4 $D_u = \mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ 5 $D_v =]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$ ☐

T.38

2.1.5 Équation d'une droite dans le plan

Définition 48 (Équation de droite dans le plan)**.** On appelle équation d'une droite une équation vérifiée par les coordonnées $(x;y)$ des points M appartenant à une droite, et uniquement par ceux-ci. Elle est du type $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ avec $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ des constantes réelles. Lorsque $\beta\neq 0$, elle peut se mettre sous la forme $y = ax+b$ avec $a = -\frac{\alpha}{\beta}$ et $b = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Remarques

- Une droite est caractérisée par une infinité d'équations de droites. En effet, si $\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ est une équation d'une droite, alors $k\alpha x+k\beta y+k\gamma = 0$ en est une autre pour tout k réel non nul.
- Lorsqu'une droite est caractérisée par une équation du type $y = ax+b$, celle-ci est alors unique. C'est le graphe de la fonction $f(x) = ax+b$.

➔ EXERCICE 18. *Équation de droite* :
Déterminer l'équation $y = ax+b$ de la droite passant par les points du plan :
1 $A(1;1)$ et $B(2;2)$ 2 $A(1;-1)$ et $B(-1;2)$ 3 $A(\frac{1}{2};\frac{2}{3})$ et $B(\frac{2}{5};-\frac{1}{4})$ 4 $A(\frac{3}{8};-\frac{1}{3})$ et $B(\frac{2}{7};\frac{1}{5})$ ☐

T.39

2.2 Signaux usuels

2.2.1 Échelon unité

Définition 49 (Échelon unité)**.**
L'**échelon unité** (ou échelon de Heavyside) est le signal défini (par morceaux) par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t>0 \\ 1/2 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_u = \mathbb{R}$, $I_u = \left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$. Son graphe est donné figure 3.

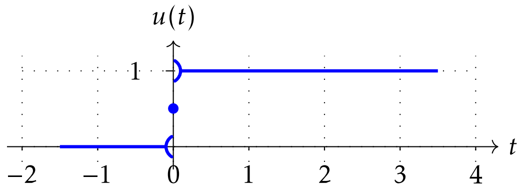

FIGURE 3 – Graphe de l'échelon unité.

T.40

2.2.2 Porte

Définition 50 (Fonction porte)**.**
La **fonction porte** est le signal défini (par morceaux) par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 1/2 & \text{si } t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_\Pi = \mathbb{R}$, $I_\Pi = \left\{0; \dfrac{1}{2}; 1\right\}$. Son graphe est donné figure 4.

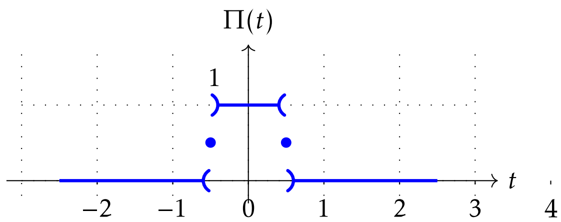

Figure 4 – Graphe de la porte $\Pi(t)$.

T.41

2.2.3 Triangle

Définition 51 (Fonction triangle)**.**
La **fonction triangle** est le signal défini (par morceaux) par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_\Lambda = \mathbb{R}$, $I_\Lambda = [0; 1]$. Son graphe est donné figure 5.

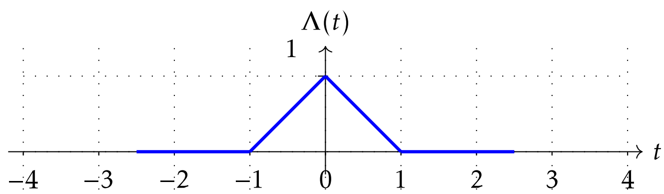

Figure 5 – Graphe du triangle $\Lambda(t)$.

T.42

2.2.4 Rampe

Définition 52 (Rampe)**.**
La **rampe** est le signal défini (par morceaux) par :

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_r = \mathbb{R}$, $I_r = \mathbb{R}^+$. Son graphe est donné figure 6.

T.43

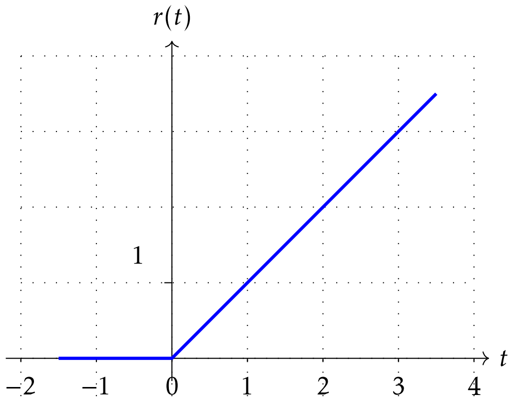

Figure 6 – Graphe de la rampe $r(t)$.

2.3 Caractéristiques fondamentales des signaux

2.3.1 Signaux causaux

Définition 53 (Signal causal)**.**
Un signal s est **causal** si et seulement si, pour tout $t < 0$, $s(t) = 0$.

Exemples 54 (Des signaux causaux... ou pas).

- L'échelon, la rampe sont des signaux causaux.
- Ni la porte, ni le triangle ne sont des signaux causaux.

➲ Exercice 19. *Signaux causaux :* Parmi les signaux suivants, lesquels sont causaux et lesquels ne le sont pas ?
1 $u(t+1)$ 2 $\Lambda(2t)$ 3 $u(t)+1$ 4 $\Pi(t-1)$ 5 $s(t) = t^3$ ☐

T.44

2.3.2 Signaux à support fini

Définition 55 (Signal à support fini (borné))**.**

- Un signal $s(t)$ est dit à **support fini (borné)**, s'il existe deux réels t_1 et t_2 (avec $t_1 \leq t_2$) tels que pour tout $t < t_1$ ou $t > t_2$, $s(t) = 0$.
- Lorsque t_1 et t_2 sont respectivement la plus grande valeur et la plus petite valeur telles que $s(t) = 0$ pour $t < t_1$ ou $t > t_2$, on dit que l'intervalle $[t_1,t_2]$ est le support de $s(t)$.
- La durée $T = t_2 - t_1$ est alors la **largeur** du support.

Exemples 56 (Des signaux à support fini... ou pas).

- La porte $\Pi(t)$ est un signal à support fini. Son support est l'intervalle $[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]$. La largeur du support vaut $T = 1$.
- Le triangle $\Lambda(t)$ sont à support fini. Son support est l'intervalle $[-1;1]$. La largeur du support vaut $T = 2$.
- L'échelon unité $u(t)$ et la rampe $r(t)$ ne sont pas des signaux à support fini.
- Aucune des fonctions usuelles recensées dans le tableau 1 ne définit de signal à support fini.

T.45

➲ Exercice 20. *Support fini, ou pas :* Les signaux suivants sont-ils à support fini ? Si oui, donner le support.
1 $u(t+1)$ 2 $\Lambda(2t)$ 3 $u(t)+1$ 4 $\Pi(t-1)$ 5 $s(t) = t^3$ ☐

T.46

2.3.3 Signaux pairs, impairs

Définition 57 (Signal pair, impair)**.**
Un signal s est :

- **pair** si et seulement si pour tout $t \in D_s$, $-t \in D_s$ <u>et</u> $s(-t) = s(t)$.
- **impair** si et seulement si pour tout $t \in D_s$, $-t \in D_s$ <u>et</u> $s(-t) = -s(t)$.

Corollaire 58 (Symétries graphiques)**.**

- *Le graphe d'un signal pair est symétrique, de symétrie axiale par rapport à la droite* (Oy).
- *Le graphe d'un signal impair présente une symétrie centrale par rapport au point* $O(0;0)$.

T.47

Exemples 59 (Des signaux pairs, impairs, et ni pairs ni impairs).

- La porte et le triangle sont des signaux pairs.
- La rampe et l'échelon unité ne sont ni pairs, ni impairs.
- Le signal $s(t) = \sin(t)$ est impair.

➔ EXERCICE 21. *Pair, impair* : Les signaux suivants sont-ils pairs, impairs, ou ni l'un ni l'autre ?
1 $u(t+1)$ **2** $\Lambda(2t)$ **3** $u(t)+1$ **4** $\Pi(t-1)$ **5** $s(t) = t^3$ ☐

T.48

2.4 Opérations sur les signaux

2.4.1 Offset/translation verticale

Définition 60 (Offset)**.**
L'ajout d'un offset $\lambda \in \mathbb{R}$ à un signal f est la transformation qui au signal f associe le signal $h = f + \lambda$:

- dont le domaine de définition est $D_h = D_f$
- et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(t) + \lambda$.

<u>**Graphe**</u>
Le graphe du signal $h = f + \lambda$ avec λ une constante s'obtient en translatant chaque point du graphe de f par $\lambda\vec{j}$ (où $\vec{j}$ est la direction unitaire définissant l'axe des ordonnées).

Exemple 61 ($h(t) = \cos(t) + 2$). Les graphes sont donnés figure 7.

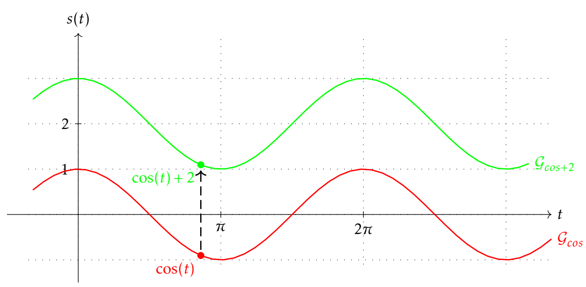

FIGURE 7 – Somme de cos et de la constante $\lambda = 2$.

T.49

2.4.2 Addition de deux signaux

Définition 62 (Addition de signaux).
L'addition est la transformation, qui à deux signaux f et g, associe le signal $h = f + g$:

- dont le domaine de définition est $D_h = D_f \cap D_g$
- et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(t) + g(t)$.

T.50

2.4.3 Amplification

Définition 63 (Multiplication externe sur les signaux).
La multiplication d'un signal f par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation qui leur associe le signal $h = \lambda f$

- dont le domaine de définition est $D_h = D_f$
- et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = \lambda f(t)$.

On l'appelle également **amplification** du signal f par le gain λ.

Exemple 64 ($h(t) = 2\cos(t)$).
La fonction h est l'amplification du signal $f(t) = \cos(t)$ par le scalaire $\lambda = 2$. Les graphes sont donnés figure 8.

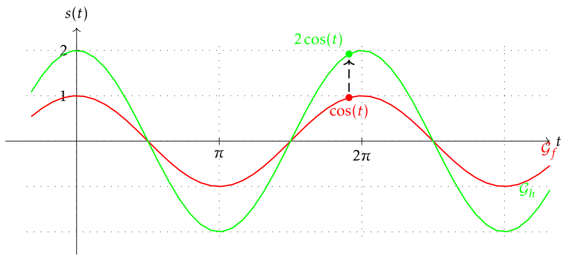

FIGURE 8 – Produit de cos et du signal constant $s(t) = 2$.

T.51

2.4.4 Produit de deux signaux

Définition 65 (Produit).
Le **produit de** f **et** g est la transformation qui leur associe le signal notée $h = f.g$

- dont le domaine de définition est $D_h = D_f \cap D_g$
- et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(t).g(t)$.

Remarque : Tout signal $s(t)$ peut être rendu à support fini en le multipliant par une porte.

Exemple 66 ($h(t) = t\cos(t)$). C'est le produit de $f(t) = \cos(t)$ et $g(t) = t$ de graphe donné figure 9.

T.52

2.4.5 Retard, avance

Définition 67 (Signal retardé).
Soient f un signal et $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le signal h, dont le domaine de définition est $D_h = \{t \in \mathbb{R} / t - t_0 \in D_f\}$ et défini, pour tout $t \in D_h$ par $h(t) = f(t - t_0)$ est dit **retardé** de t_0 par rapport au signal f. Le graphe de h s'obtient en translatant chaque point du graphe de f par $t_0\vec{i}$ (où $\vec{i}$ est la direction unitaire définissant l'axe des abscisses).

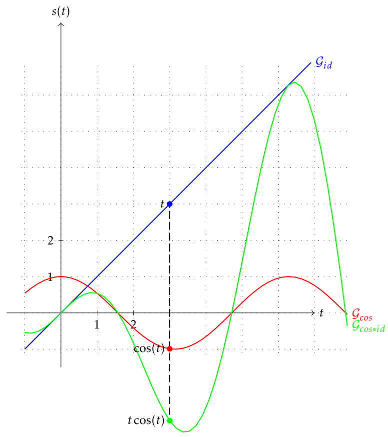

Figure 9 – Produit de cos et de l'identité.

Définition 68 (Signal avancé).
Soient f un signal et $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le signal h, dont le domaine de définition est $D_h = \{t \in \mathbb{R} / t + t_0 \in D_h\}$ et défini, pour tout $t \in D_h$ par $h(t) = f(t + t_0)$ est dit **avancé** de t_0 par rapport au signal f. Le graphe de h s'obtient en translatant chaque point du graphe de f par $-t_0\vec{i}$ (où $\vec{i}$ est la direction unitaire définissant l'axe des abscisses).

Remarque : Une avance de t_0 peut être vue comme un retard de $-t_0$. T.53

Exemple 69 ($f(t) = \Lambda(t-3)$ et $g(t) = \Lambda(t+2)$). $\Lambda(t)$ étant le signal triangle, f est la version retardée de $\Lambda(t)$ d'un retard $t_0 = 3$ et g la version avancée d'une avance $t_1 = 2$, dont les graphiques sont donnés figure 10.

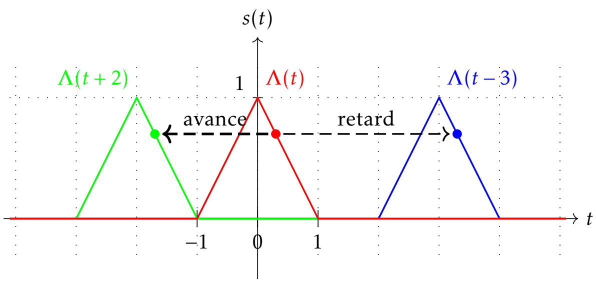

Figure 10 – Retard et avance sur le signal triangle.

Remarque : Retarder un signal à support fini peut permettre de le rendre causal.

Exemple 70 (Porte causale, triangle causal).

- $\Pi(t - t_0)$ est causal si et seulement si $t_0 \geq \frac{1}{2}$.
- $\Lambda(t - t_0)$ est causal si et seulement si $t_0 \geq 1$. T.54

2.4.6 Dilatation, compression

Définition 71 (Dilatation, compression).
Soient f un signal et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le signal h, dont le domaine de définition est $D_h = \{t \in \mathbb{R} / \alpha t \in D_f\}$ et défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(\alpha t)$ est :

- une compression/contraction de f par α, si $\alpha > 1$;
- une dilatation de f par $1/\alpha$, si $\alpha < 1$.

Propriété 72 (Dilatation d'un signal à support borné). *Soit $s(t)$ un signal de support $[t_1,t_2]$ et α un réel strictement positif. Alors le signal $s_\alpha(t)$ défini par $s_\alpha(t) = s(\alpha t)$ est de support $[t_1/\alpha, t_2/\alpha]$.*

Remarques :

- Une dilatation de α peut être vue comme une contraction de $\frac{1}{\alpha}$;
- Le point fixe de cette transformation est celui pour lequel $t = 0$.

T.55

Exemple 73 ($f(t) = \cos(3t)$ et $g(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$). f est la contraction de $\cos(t)$ d'un facteur $\lambda = 3$ et g d'un facteur $\lambda = 1/3$ (dilatation d'un facteur $1/\lambda = 3$), dont les graphiques sont donnés figure 11.

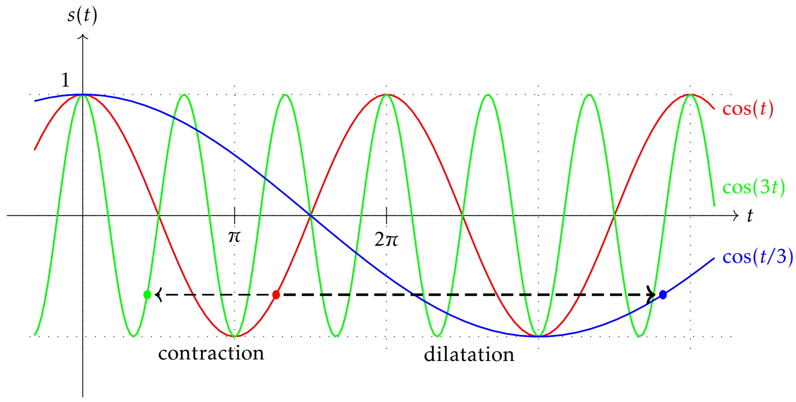

Figure 11 – Dilatations du *cos*.

T.56

Exemple 74 (Porte de largeur T). Le signal $s(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ est la porte de largeur $T \in \mathbb{R}_+^*$, définie par
$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{, si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{, si } t = \pm\frac{T}{2} \\ 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$$

Exemple 75 (Triangle de largeur T). Le signal $s(t) = \Lambda\left(\frac{2t}{T}\right)$ est la fonction triangle de largeur $T \in \mathbb{R}_+^*$, définie par $s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T}|t| & \text{, si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{, sinon.} \end{cases}$

T.57

2.4.7 Composition

Définition 76 (Composée)**.**
La composée de f par g, notée $g \circ f$, est le signal h définie par $\forall t \in D_h, h(t) = \left(g \circ f\right)(t) = g\left(f(t)\right)$. Son domaine de définition est : $D_h = \left\{t \in D_f / f(t) \in D_g\right\}$.

Exemple 77 (Sinusoïde $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$). C'est la composée de la fonction affine $y(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ avec la fonction cosinus $g(y) = A_0 \cos(y)$ avec A_0, ω_0, φ_0 trois nombres réels.

T.58 **Remarque** : Retard, avance, dilatation et contraction sont des composées particulières.

Cas particulier : Quotient $h = \dfrac{f}{g}$

C'est le produit de f par la fonction $\frac{1}{g}$. Et $\frac{1}{g}$ est la composée de g par la fonction inverse $y \mapsto \frac{1}{y}$. Cette fonction est définie, pour tout $t \in D_h$ par $h(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ avec $D_h = \left\{t \in D_f \cap D_g / g(t) \neq 0\right\}$.

Exemple 78 (Fraction rationnelle). Les fractions rationnelles telles que $f(t) = \dfrac{1 + t + 2t^2}{1 - 3t}$ sont des quotients.

T.59

2.4.8 Résumé

La table 2 résume les différentes opérations possibles sur les fonctions et les domaines de définition induits.

Fonction h	**Définition**	$h(x)$	D_h
Somme	$h = f + g$	$h(x) = f(x) + g(x)$	$D_h = D_f \cap D_g$
Amplification par λ	$h = \lambda f$	$h(x) = \lambda f(x)$	$D_h = D_f$
Produit	$h = f.g$	$h(x) = f(x).g(x)$	$D_h = D_f \cap D_g$
Dilatation par α		$h(x) = f(\alpha x)$	$D_h = \{x \in \mathbb{R} / \alpha x \in D_f\}$
Retard de r		$h(x) = f(x - r)$	$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x - r \in D_f\}$
Quotient	$h = \dfrac{f}{g}$	$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$D_h = \left\{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\right\}$
Composée	$h = g \circ f$	$h(x) = g\big(f(x)\big)$	$D_h = \left\{x \in D_f / f(x) \in D_g\right\}$

TABLE 2 – Synthèse des opérations sur les fonctions.

T.60

2.4.9 Exercices

Exercice 22. *Tracé de signaux* : Tracer les signaux suivants, en identifiant les opérations élémentaires qui les définissent :

1. $s(t) = 3\Pi(2t - 1)$
2. $s(t) = -3\Pi(t/2 + 1)$
3. $s(t) = 2\Pi(t/2) + \Pi(t - 1)$
4. $s(t) = u(t) - u(t - 1)$
5. $s(t) = \Pi(t - 1) + r(t) - 1$
6. $s(t) = 2\Lambda(3t + 1)$
7. $s(t) = 3u(2t - 1)$
8. $s(t) = -3r(t/2 + 1)$
9. $s(t) = 3\cos(2t - 1)$
10. $s(t) = 3\sin(t/2 + 1)$

□

T.61

Exercice 23. *Fonction composée* : Soient $f(x) = 1 - x + x^2$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Donner l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$ en fonction de x et déterminer le domaine de définition de chacune. □

Exercice 24. *Tracé graphique* : Tracer le graphe des signaux suivants :

1. $f(x) = xu(x) - 2(x - 1)u(x) + (x - 2)u(x - 2)$
2. $f(t) = r(t) - r(t - 1) - 1$

□

Exercice 25. *Domaine de définition* : Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \dfrac{x - 2}{3x^2 - 2x + 1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. □

T.62

➜ EXERCICE 26. *Composition* : On considère les trois fonctions f, g et h de la variable réelle x définies par : a $f(x) = 2x+1$, b $g(x) = 1-x^2$, c $h(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
Donner la règle de définition des fonctions composées suivantes (en fonction de x) :

1 $f \circ g$ 2 $g \circ \dfrac{1}{f}$ 3 $h \circ g \circ f$ 4 $g \circ h \circ f$

Correction :

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x)+1 = 3-2x^2$
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1-[f(x)]^2 = -4x(x+1)$
3. $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = \dfrac{4x(x+1)}{4x^2+4x-1}$
4. $(g \circ h \circ f)(x) = g(h(f(x)))$

□

T.63

➜ EXERCICE 27. *Domaine de définition* : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1 $f(x) = \dfrac{1+2x+x^4}{x^2+2x+3}$ 2 $f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-1}$ 3 $f(x) = \tan(x)+\cos(x)$

4 $f(x) = \text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ 5 $f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-|x|}$ 6 $f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$

7 $f(x) = \sqrt{(x-2)(x+1)}$ 8 $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ 9 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$

10 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}$ 11 $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}$ 12 $f(x) = \sqrt{2\cos(x)-1}$

Correction :

1 $\boxed{f(x) = \dfrac{1+2x+x^4}{x^2+2x+3}}$: f est un quotient de 2 polynômes $u(x) = 1+2x+x^4$ et $v(x) = x^2+2x+3$ tous deux définis sur $\mathbb{R}$, donc $D_f = \{x \in D_u \cap D_v / v(x) \neq 0\}$. Or $q(x) = 0$ ssi $x^2+2x+3 = 0$ avec x^2+2x+3 polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) < 0$ donc n'ayant pas de racines réelles. Donc $D_f = \mathbb{R}$.

2 $\boxed{f(x) = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-1}}$: $f(x)$ est la somme de $u(x) = \sqrt{x-2}$ et $v(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Dans un 1er temps, $v(x)$ est l'inverse de la fonction affine $x-1$ définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \{x \in \mathbb{R}/v(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Dans un 2ème temps, $u(x)$ est la composée de $w(x) = x-2$ (fonction affine définie sur $\mathbb{R}$) par $\sqrt{}$ donc
Finalement, par somme, $D_f = D_u \cap D_v = [2;+\infty[$.

3 $\boxed{f(x) = \tan(x)+\cos(x)}$: Par somme, cos étant définie sur $\mathbb{R}$, $D_f = D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4 $\boxed{f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}}$: Par quotient, $D_f = \{x \in D_{\cos} \cap D_{\sin} / \sin(x) \neq 0\}$ et comme $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0[\pi]$ alors $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

5 $\boxed{f(x) = \dfrac{x^2+3}{1-|x|}}$: Sachant que $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $-x$ si $x < 0$, par quotient, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1;-1\}$

6 $\boxed{f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}}$: Par composée du polynôme $p(x) = x^2+2x+3$ définie sur $D_p = \mathbb{R}$ par la fonction racine $r(x) = \sqrt{x}$ définie sur $D_r = \mathbb{R}^+$, la fonction f est définie sur $D_f = \left\{x \in D_p / p(x) \in D_r\right\}$.
Or $p(x) \in D_r \Leftrightarrow x^2+2x+3 \geq 0$. x^2+2x+3 est un polynôme de discriminant $\Delta = 2^2 - 4.1.3 < 0$ donc dont le signe est toujours celui du coefficient multiplicatif de x^2 à savoir $1 > 0$. Donc il n'y a pas de restriction imposée par la racine carrée : $D_f = \mathbb{R}$

7 $\boxed{f(x)=\sqrt{(x-2)(x+1)}}$: De même qu'à la question 6 avec cette fois le polynôme $p(x)=(x-2)(x+1)$, $D_f=\{x\in D_p/(x-2)(x+1)\in D_r\}$ avec $D_p=\mathbb{R}$ et $D_r=\mathbb{R}^+$. Or $p(x)=x^2-x-2$ est positif (du signe du coefficient multiplicatif de x) à l'extérieur des racines qui sont 2 et -1 (elles se lisent directement sur la forme factorisée de $p(x)$) donc : $D_f=\left]-\infty;-1\right]\cup\left[2;+\infty\right[$

8 $\boxed{f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}}$: f est la **composée** de la fonction $u(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ et de la fonction $v(y)=\sqrt{y}$. Le domaine de définition de u est $D_u=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (comme **fraction rationnelle**) et celui de v est $D_v=\mathbb{R}^+$.
Donc (cf règles d'opération sur les fonctions) f est définie sur l'ensemble des $x\in D_u$ (c'est à dire ici $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$) tel que $u(x)=\dfrac{x-2}{x+1}\in D_v$ autrement dit tels que $\dfrac{x-2}{x+1}\geq 0$. On est ramené à l'étude du signe de $\dfrac{x-2}{x+1}$ pour x variant dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Le tableau de signe de $\dfrac{x-2}{x+1}$ montre donc que le domaine de définition de f est : $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left[2;+\infty\right[$

9 $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}}$: $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

10 $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-x^2}}}$: Comme $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2(x-1)(x+1)}}$, comme x^2 est toujours positif et ne s'annule qu'en $x=0$ et comme $(x-1)(x+1)$ est un polynôme de degré 2 de racines 1 et -1, $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cap\left]1;+\infty\right[$.

11 $\boxed{f(x)=\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}}$: f est le quotient de $u:x\mapsto\cos(x)$ et $v:x\mapsto 1+\sin(2x)$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$ (comme **somme** de fonctions usuelles définies sur $\mathbb{R}$). Donc par **quotient**, $f=\dfrac{u}{v}$ est définie pour tous les x de $D_u\cap D_v=\mathbb{R}$ tels que $v(x)\neq 0$.
Or $v(x)=0\Leftrightarrow\sin(2x)=-1\Leftrightarrow 2x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ avec k un entier naturel quelconque.

Donc le domaine de définition de f est $\boxed{D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}}$.

12 $\boxed{f(x)=\sqrt{2\cos(x)-1}}$ La fonction f est la **composée** de la fonction $u:x\mapsto 2\cos(x)-1$ et de la fonction $v:y\mapsto\sqrt{y}$; u est définie sur $\mathbb{R}$ tandis que v est définie sur $\mathbb{R}^+$. Donc d'après les règles d'opération sur les fonctions, f est définie pour tout x de $D_u=\mathbb{R}$ tel que $u(x)=2\cos(x)-1$ soit dans $D_v=\mathbb{R}^+$, autrement dit tel que $2\cos(x)-1\geq 0$.
Or $2\cos(x)-1\geq 0$ si et seulement si $\cos(x)\geq\frac{1}{2}$. En analysant le cercle trigonométrique (cf. figure 12 , où les cos se lisent sur l'axe des abscisses), on remarque que pour avoir $\cos(x)\geq\frac{1}{2}$, il faut que l'angle x se trouve entre les deux angles $-\pi/3$ et $\pi/3$ qui rendent le cosinus égal à $1/2$, et ce à 2π près. Donc $\cos(x)\geq\frac{1}{2}$ pour tout x dans les intervalles de la forme $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{3}+2k\pi\right]$, avec k un entier relatif quelconque. Finalement, le domaine de définition de f est : $\boxed{D_f=\left\{\left[-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right]/k\in\mathbb{Z}\right\}}$

□

T.64

➲ Exercice 28. *Parité, Imparité* : Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou ni paires ni impaires ; préciser alors le domaine d'étude :

1 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ **2** $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ **3** $f(x)=\dfrac{3x^5-7x^3+x}{4x^2+1}$

Correction :

1/ f est paire

2/ f ni paire ni impaire

3/ f impaire

□

➔ EXERCICE 29. *Décomposition de fonctions en paire et impaire (PE)* : Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ peut se décomposer en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On pourra étudier les deux fonctions g et h définies en fonction de f par : $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$. □

T.65

3 Éléments de trigonométrie

3.1 Radian et degré

Définition 79 (Radian)**.**
Soit L la longueur d'un arc de cercle de rayon R. Alors, le rapport $\boxed{\theta_{\text{rad}} = \frac{L}{R}}$ est la mesure de l'angle correspondant en radians (rad).

Définition 80 (Degré)**.**
Soit θ la mesure d'un angle en radian. Alors sa mesure en degrés (°) vaut $\boxed{\theta_{\text{deg}} = \frac{180}{\pi}\theta_{\text{rad}}}$. La correspondance entre les mesures des angles les plus répandus en degrés et en radians et donnée dans la table 3.

θ_{deg}	0	30	45	60	90	180	360
θ_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Table 3 – Correspondance degrés/radians des angles usuels.

Propriété 81 (Circonférence d'un cercle)**.** *La circonférence d'un cercle de rayon R vaut $L = 2\pi R$. Elle est égale à la longueur d'un arc de cercle correpondant à un angle de $\theta_{rad} = 2\pi$ rad soit $\theta_{deg} = 360°$.* T.67

3.2 Cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base (cf. figure 12))**.** *Soit θ un angle réel et n un nombre entier. Alors :*

- *relation fondamentale de la trigonométrie :* $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$;
- *relations de symétrie dans le cercle trigonométrique :*

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan\theta}$
$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin\theta$	$\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos\theta$;	$\tan(n\pi + \theta) = \tan\theta$

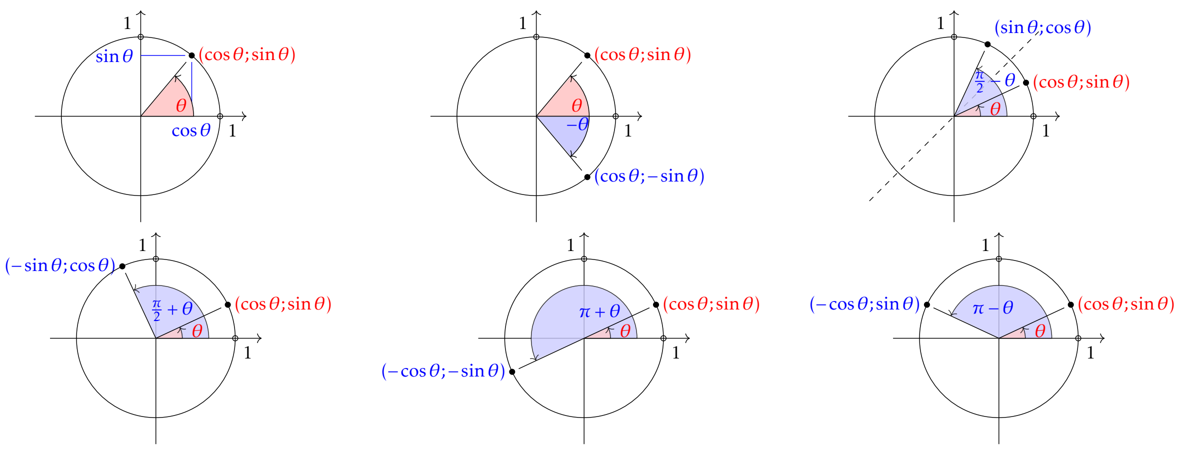

Figure 12 – Relations dans le cercle trigonométrique. T.68

3.3 Angles remarquables

Les angles remarquables sont donnés table 4 et figure 13.

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Table 4 – Angles remarquables.

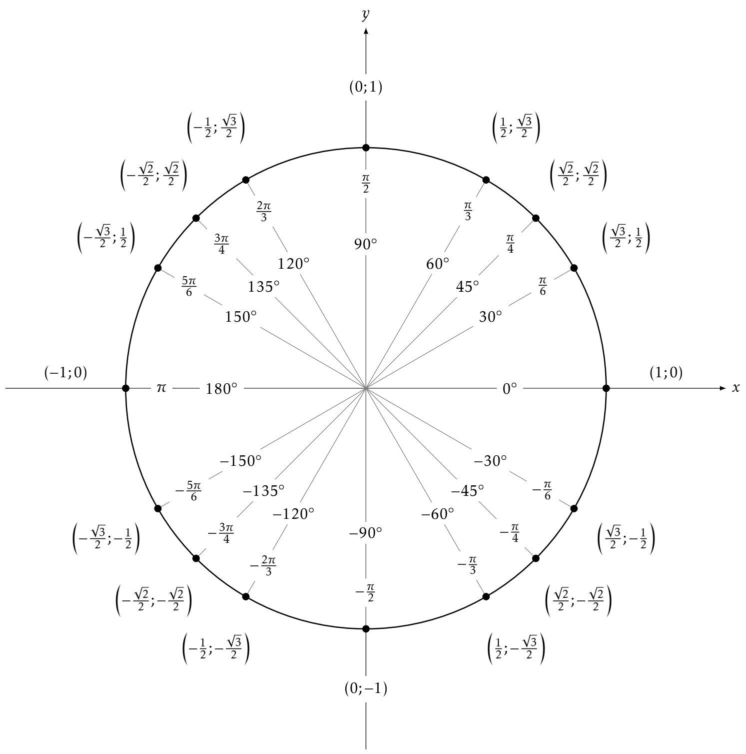

Figure 13 – Angles remarquables.

T.69

3.4 Exercices

Exercice 30. *Calculs de sinus, cosinus et tangente :* Compléter le tableau suivant :

Angle θ	3π (540°)	$\frac{7\pi}{6}$ (210°)	$-\frac{5\pi}{4}$ (−225°)	$\frac{5\pi}{3}$ (300°)	$-\frac{3\pi}{2}$ (−270°)
$\sin(\theta)$					
$\cos(\theta)$					
$\tan(\theta)$					

Exercice 31. *Longueur d'arc :* Soit M le point du plan de coordonnées polaires (r,θ). Quelle est la longueur de l'arc de cercle AM avec A de coordonnées polaires $(r,0)$?
Correction : Notons $L(r,\theta)$ la longueur de l'arc, qui dépend de r et de θ. $L(r,\pi) = \pi r$ (périmètre d'un demi-cercle de rayon r)
$L(r,\pi/2) = \pi r/2$ (périmètre d'un quart de cercle de rayon r)
et de manière générale $L(r,\theta) = \theta r$

Exercice 32. : Démontrer que $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.
Correction : Utiliser la relation fondamentale de la trigonométrie : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

T.70

Exercice 33. : Soit $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 2$. Montrer que $f(x) = f(\pi - x)$.
Correction : $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ d'où le résultat.

Exercice 34. : Soit $f(x) = 3\cos^2 x - 5\cos x + 7$. Montrer que $f(x) = f(-x)$.
Correction : $\cos(-x) = \cos(x)$ d'où le résultat.

Exercice 35. : Soit $f(x) = a\cos^2 x + b\cos x \sin x + c\sin^2 x + d$. Montrer que $f(x) = f(\pi + x)$.

Correction : $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\cos(\pi + x) = \cos(x)$ d'où $f(\pi + x) = a(-\cos x)^2 + b(-\cos x)(-\sin x) + c(-\sin x)^2 + d = f(x)$.

Exercice 36. : Soit $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x$. Montrer que $f(x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$.

Correction : $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ et $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ d'où le résultat.

T.71

Exercice 37. *Equations trigonométriques :* Résoudre les équations suivantes :

1 $\sin x = \frac{1}{2}$ **2** $\sin 5x = \sin 3x$ **3** $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

Correction :
1. $\frac{1}{2} = \sin(\pi/6)$ d'où $\mathcal{S} = \{\pi/6 + 2k\pi, 5\pi/6 + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\}$
2. $\mathcal{S} = \{k\pi, \pi/8 + k\pi/4 \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\}$
3. $\mathcal{S} = \{\pi/12 + 2k\pi/3, -3\pi/4 + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}\}$

T.72

4 Signaux périodiques

4.1 Généralités

Définition 83 (Signal périodique)**.** Soient $s(t)$ un signal temporel défini sur D_s et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que s **est** T**-périodique** lorsque, pour tout $t \in D_s$, $t+T \in D_s$, $t-T \in D_s$ **et** $s(t+T) = s(t)$. On dit que T est **une période** du signal s.

Remarques :

- Si T est une période de $s(t)$, alors kT (avec $k \in \mathbb{Z}$) est aussi une période de $s(t)$. En fait, il y a une infinité de périodes pour $s(t)$!
- Pour un signal physique, la période s'exprime en s (secondes).

Définition 84 (Période d'un signal périodique)**.** Soit $s(t)$ un signal périodique. **La période** de $s(t)$ est le réel T_s défini par : $T_s = \min\limits_{T}\{T \in \mathbb{R}_*^+ / \forall t \in \mathbb{R}, s(t+T) = s(t)\}$. Toutes les périodes de $s(t)$ s'écrivent alors $T = kT_s$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

T.74

Définition 85 (Fréquence, pulsation)**.** Soit $s(t)$ un signal périodique de période T_s. La **fréquence** de $s(t)$ est le réel F_s défini par : $\boxed{F_s = \frac{1}{T_s}}$. La **pulsation** de $s(t)$ est le réel ω_s défini par : $\boxed{\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi F_s}$.

Remarque : Pour un signal physique, la fréquence s'exprime en Hz (Hertz) ; la pulsation en rad/s.

Exemple 86 (Sinus)*.* $\sin(x)$ est un signal périodique de période 2π, de fréquence $1/2\pi$ et de pulsation 1.

T.75

Corollaire 87 (Fonction périodique)**.** *Le graphe d'une fonction périodique de période T présente un motif se répétant régulièrement le long de l'axe des abscisses à intervalle T.*

Exemple 88 ($\cos(x)$)*.* Elle est périodique de période 2π et 2π-périodique, 4π-périodique, ... comme l'illustre la figure 14.

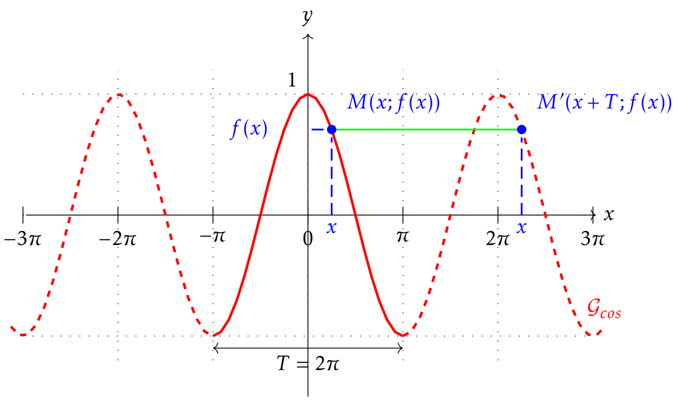

Figure 14 – La fonction cos, périodique de période 2π, avec un motif entre $[-\pi;\pi]$ se répétant régulièrement le long de l'axe des abscisses.

T.76

4.2 Propriétés

Propriété 89 (Dilatation/compression d'un signal périodique)**.** *Soient $s(t)$ un signal périodique de période T_s et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Alors le signal $s_\alpha(t)$ défini par $s_\alpha(t) = s(\alpha t)$ est périodique de période $T_{s_\alpha} = \frac{T_s}{|\alpha|}$.*

Propriété 90 (Avance/retard d'un signal périodique)**.** *Soient $s(t)$ un signal périodique de période T_s et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors le signal $s_{t_0}(t)$ défini par $s_{t_0}(t) = s(t - t_0)$ est périodique de période T_s.*

T.77

Propriété 91 (Composée d'un signal périodique)**.** *Soit f une fonction réelle et $s(t)$ un signal périodique de période T_s. Alors $f\big(s(t)\big)$ est T_s-périodique (T_s n'étant pas nécessairement la période de $f(s(t))$).*

T.78

Propriété 92 (Périodicité d'une somme de signaux périodiques)**.** *Soient $s_1(t)$ et $s_2(t)$ deux signaux périodiques. Soient λ et μ deux nombres complexes.*

1. *Si T est une période commune de $s_1(t)$ et $s_2(t)$, alors le signal $s(t) = \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ est également périodique. T est <u>une</u> période de $s(t)$ mais n'est pas nécessairement la période de $s(t)$.*
2. *Si T_{s_1} est la période de $s_1(t)$ et T_{s_2} est la période de $s_2(t)$ avec $\frac{T_{s_1}}{T_{s_2}} \in \mathbb{Q}$, alors **la** période de $s(t) = \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ est le réel $\boxed{T_s = qT_{s_1} = pT_{s_2}}$ où p et q sont deux réels définis de sorte que $\dfrac{T_{s_1}}{T_{s_2}} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $\frac{p}{q}$ irréductible. Si $\frac{T_{s_1}}{T_{s_2}} \notin \mathbb{Q}$ alors $s(t)$ n'est pas périodique.*

T.79

Propriété 93 (Création d'un signal périodique à partir d'un signal à support borné)**.** *Soit $s(t)$ un signal à support borné et T un réel strictement positif. Alors le signal $s_T(t)$ défini par $s_T(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT)$ est T-périodique.*

Remarque : Si $s(t)$ n'est pas à support borné, la somme définissant $s_T(t)$ ne converge pas nécessairement. Si elle converge, alors $s_T(t)$ est bien T-périodique aussi. T.80

4.3 Des signaux périodiques classiques

Outre les fonctions trigonométriques classiques (sinus et cosinus de période 2π et tangente de période π), il existe d'autres signaux périodiques classiques.

Définition 94 (Sinusoïde de pulsation ω_0, de phase ϕ et d'amplitude a)**.** La **sinusoïde** est le signal défini par : $s(t) = a\sin(\omega_0 t + \phi)$ où les trois paramètres réels a, ω_0 et ϕ sont respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase de la sinusoïde. Son graphe est donné figure 15. C'est un signal à support non borné, non causal, et périodique de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

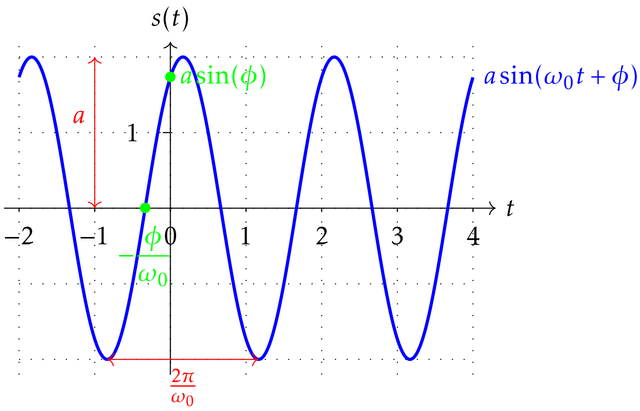

Figure 15 – Graphe d'une sinusoïde d'amplitude $a = 2$, de pulsation $\omega_0 = \pi$ et de phase $\phi = \frac{\pi}{3}$.

T.81

Définition 95 (Créneau). Le signal **créneau** de période $T_0 > 1$ est le signal périodique défini par : $\Pi_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi(t - kT_0)$. Son graphe est donné figure 16 pour $T_0 = 2$.

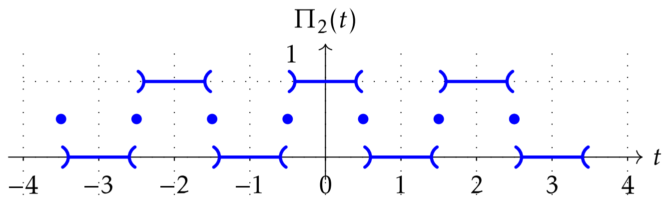

Figure 16 – Graphe d'un créneau de période $T_0 = 2$.

T.82

Définition 96 (Dent de scie). Le signal **dent de scie** de période $T_0 \geq 2$ est le signal périodique défini par : $\Lambda_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda(t - kT_0)$. Son graphe est donné figure 17 pour $T_0 = 2$.

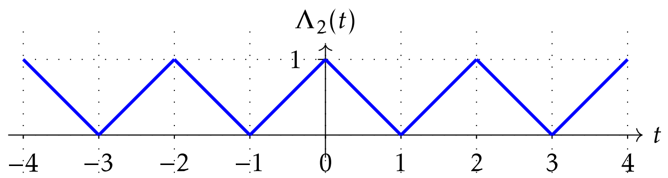

Figure 17 – Graphe d'une dent de scie de période $T_0 = 2$.

T.83

4.4 Exercices

Exercice 38. *Tracé de graphe de signaux* : Soit $s(t)$ le signal temporel défini par $s(t) = -3\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1 Déterminer la période de $s(t)$.

2 Tracer le graphe de $s(t)$.

Mêmes questions avec $s(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ puis avec $s(t) = 5\sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Correction : Le signal $s(t)$ est construit sur la base d'un sinus, dilaté, retardé, et avec un gain de -3. Pour tracer ce signal, on choisit ici de commencer par le facteur de dilatation puis d'effectuer le retard/avance. Il faut alors mettre en facteur le facteur de dilatation dans la sinusoïde pour l'écrire sous la forme $s(t) = \underbrace{-3}_{gain} \sin\left(\underbrace{3}_{\alpha}\left[t + \underbrace{\frac{\pi}{9}}_{t_0}\right]\right)$ et identifier la dilatation $\alpha = 3$ et l'avance (car +) $t_0 = \frac{\pi}{9}$.

- Posons le signal de base $s_1(t) = \sin(t)$ périodique de période 2π.
- Partant de s_1, on construit $s_2(t) = s_1(3t) = \sin(3t)$ par dilatation de $\alpha = 3$ en transformant le t de s_1 en $3t$. On obtient $s_2(t) = s_1(3t) = \sin(3t)$
- Partant maintenant de s_2, on construit s_3 en appliquant une avance de $t_0 = \frac{\pi}{9}$ sur $s_2(t)$: tous les points à un instant t dans s_2 se retrouve à l'instant $t - \frac{\pi}{9}$ dans s_3, soit une translation du graphe de s_2 d'un vecteur $-\frac{\pi}{9}\vec{i}$. On obtient alors le signal $s_3(t) = s_2(t + \frac{\pi}{9}) = \sin\left(3(t + \frac{\pi}{9})\right) = \sin(3t + \frac{\pi}{3})$.
- Reste à multiplier le signal s_2 par le gain 3, ce qui multiplie toutes les amplitudes de s_2 par 3, puis par le gain -1, ce qui symétrise le graphe par rapport à l'axe des abscisses, pour obtenir le signal s recherché.

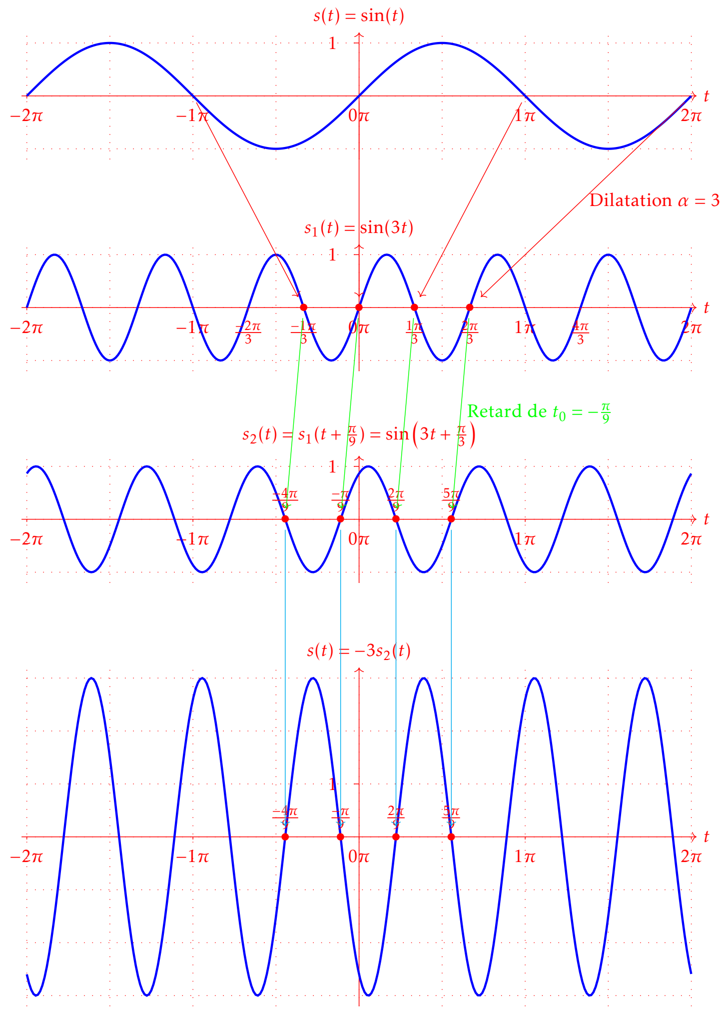

FIGURE 18 – Une sinusoide

D'où les graphes de la figure 18.

□

EXERCICE 39. *Tracé de graphe de signaux :* Soit $s(t)$ le signal temporel défini par $s(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

1 Déterminer la période de $s(t)$.

2 Tracer le graphe de $s(t)$.

Mêmes questions avec $s(t) = 5\left|\sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Correction : Linéarisons le signal : $s(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{1}_{\text{offset}} + \cos\left(t - \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{t_0}\right)$.

- Posons le signal de base $s_1(t) = \cos(t)$ périodique de période 2π
- Partant de s_1, on construit s_2 en appliquant un retard de $t_0 = \frac{\pi}{2}$ sur $s_2(t)$: tous les points à un instant t dans s_1 se retrouve à l'instant $t + \frac{\pi}{2}$ dans s_2, soit une translation du graphe de s_1 d'un vecteur de longueur $+\frac{\pi}{2}\vec{i}$ dirigé vers la gauche. On obtient alors le signal $s_2(t) = s_1(t - \frac{\pi}{2}) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$.
- Partant de s_2, on construit s_3 en ajoutant un offset à s_2. Tous les points de s_2 se trouvent "remontés" (translatés) d'un vecteur $+\vec{j}$ vers le haut. On obtient le signal $s_3(t) = 1 + s_2(t) = s(t)$.

D'où les graphes de la figure 19.

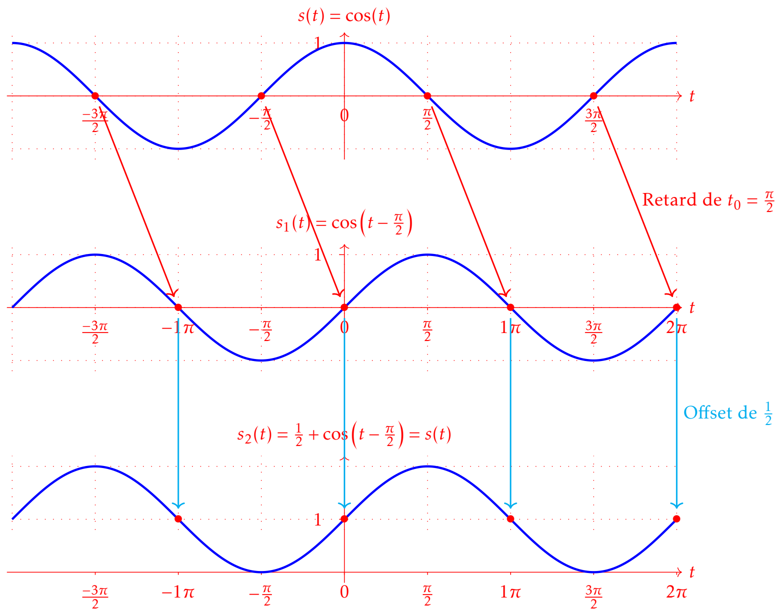

FIGURE 19 – Une autre sinusoide

□

T.84

EXERCICE 40. *Calcul de période :* Donner la plus petite période ainsi que la fréquence et la pulsation lorsqu'elles existent (attention, certains signaux ne sont pas périodiques).

1 $s_1(t) = \sin(2\pi t) - \cos(t)$ 2 $s_2(t) = \sin(t) + \cos(2t)$ 3 $s_3(t) = 2\sin(2t)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$

4 $s_4(t) = \Lambda_2(2t) - \Pi_2(4t)$ 5 $s_5(t) = \sin^2\left(\frac{3t}{4}\right)$ 6 $s_6(t) = \Pi_2(2t) - \Pi_2(4t)$

Correction :

1. $\sin(2\pi t)$: période $T = 1$ et $\cos(t)$: période $T' = 2\pi$, donc $T'/T = 2\pi$ non rationnel, donc $s_1(t)$ n'est pas périodique.
2. $\sin(t)$: période $T = 2\pi$ et $\cos(2t)$: période $T' = \pi$, donc $T_2 = 2\pi$ est la période de $s_2(t)$ et $f_2 = \frac{1}{2\pi}$, $\omega_2 = 1$.
3. $s_3(t) = \sin(2t + t/2) + \sin(2t - t/2) = \underbrace{\sin(5t/2)}_{T=4\pi/5} + \underbrace{\sin(3t/2)}_{T'=4\pi/3}.$

   $T/T' = 3/5 \in \mathbf{Q}$, donc s_3 est périodique de période $T_3 = 5T = 3T' = 4\pi$ et $f_3 = 1/(4\pi)$ et $\omega_3 = 2$.
4. $\Lambda_2(2t)$: période $= 2/2 = 1$: $\Pi_2(4t)$: période $= 2/4 = 1/2$; Donc $s_4(t)$ est périodique de plus petite période $T_4 = 1$ et $f_4 = 1$ et $\omega_4 = 2\pi$.
5. $s_5(t) = \sin(3t/4)^2 = s_5(t) = (1 - \cos(3t/2))/2$, donc s_5 est périodique de période $T_5 = 4\pi/3$, $f_5 = 3/(4\pi)$ et $\omega_5 = 3/2$
6. $s_6(t) = \Pi_2(2t) - \Pi_2(4t)$, donc $T_6 = 1$, $f_6 = 1$ et $\omega_6 = 2\pi$

□

T.85