
Mathématiques du signal

Ressource R113

Cyrille SICLET, `cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr`

Kévin KASPER, `kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr`

Bruno TISSERAND, `bruno.tisserand@univ-grenoble-alpes.fr`

Clara CHATEIGNER, `clara.chateigner@univ-grenoble-alpes.fr`

IUT Département Réseaux & Télécommunications
Version 2024

- Les Maths en RT

Objectif

Maîtriser les outils mathématiques utiles pour l'informatique, les réseaux et les télécoms.

Les ressources

- ▶ R113 (S1) : Mathématiques du signal
- ▶ R114 (S1) : Mathématiques des transmissions
- ▶ R213 (S2) : Mathématiques des systèmes numériques
- ▶ R214 (S2) : Analyse mathématique des signaux

- Ressource R113, Mathématiques du signal

► **Volume horaire :**

B1G1 et B1G2 (Bac Général)	B1G3 et B1G4 (PRO+)
29h30	35h30
14 séances de cours/TD (14 × 2h)	17 séances de cours/TD (17 × 2h)
1 devoir surveillé (1 × 1h30)	1 devoir surveillé (1 × 1h30)

► **Évaluation**

- Contrôle continu : coeff 1 (QCM DM)
- Devoir surveillé final : coeff 1

- Compétences ciblées et apprentissages critiques couverts par la ressource R113

- ▶ Compétence RT1 - Administrer Niveau 1 :
 - AC0111 : Maîtriser les lois fondamentales de l'électricité afin d'intervenir sur des équipements de réseaux et télécommunications.
- ▶ Compétence RT2 - Connecter Niveau 1 :
 - AC0211 : Mesurer et analyser les signaux;
 - AC0212 : Caractériser des systèmes de transmissions élémentaires et découvrir la modélisation mathématique de leur fonctionnement.

- SAÉ et ressources concernées par la ressource R113

SAÉ concernées

- ▶ SAÉ13 : Découvrir un dispositif de transmission ;
- ▶ SAÉ22 : Mesurer et caractériser un signal ou un système ;
- ▶ SAÉ24 : Projet intégratif.

Ressources concernées

- ▶ R114 : Mathématiques pour les transmissions ;
- ▶ R205 : Signaux et systèmes pour les transmissions ;
- ▶ R206 : Numérisation de l'information ;
- ▶ R214 : Analyse mathématiques des signaux.

1. - Plan

Notions de base

Rappels sur les ensembles

Rappels de calculs

Introduction aux signaux

Éléments de trigonométrie

Signaux périodiques

1.1.1. - Ensemble

Définition 1 (Ensemble).

Un ensemble est une collection d'éléments mathématiques.

Exemple 2 (Des ensembles).

- ▶ L'ensemble des nombres entiers de 1 à 9 : $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;
- ▶ l'ensemble des points du plan 2D;
- ▶ $\{n \text{ entier} / 1 \leq n \leq 6\}$ est l'ensemble des entiers compris entre 1 et 6.

Remarque : définition « naïve »

On parle de définition naïve car en réalité la théorie des ensembles repose sur des axiomes beaucoup plus complexes pour éviter les incohérences (comme l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes).

1.1.2. - Opérations sur les ensembles : inclusion

Définition 3 (Inclusion).

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que $\mathbb{E}$ est inclus dans $\mathbb{F}$ lorsque tout élément de $\mathbb{E}$ est aussi dans $\mathbb{F}$, autrement dit :

$$\mathbb{E} \subset \mathbb{F} \text{ lorsque } x \in \mathbb{E} \Rightarrow x \in \mathbb{F}.$$

Exemple 4 (Ensemble inclus dans un autre ensemble).

- ▶ $\{1;2\} \subset \{1;2;3\} \subset \{1;2;3;5\};$
- ▶ $\{5;7\} \subset \{5;6;7\} \subset \{1;2;3;5;6;7;8\};$
- ▶ mais $\{5;7\} \not\subset \{5;6\}.$

Remarque

Tout ensemble est inclus dans lui-même : $\{1;2\} \subset \{1;2\};$
 $\{3;4;5\} \subset \{3;4;5\}.$

1.1.2. - Opérations sur les ensembles : égalité

Définition 5 (Égalité).

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que $\mathbb{E}$ est égal à $\mathbb{F}$ lorsque $\mathbb{E}$ contient exactement les mêmes éléments que $\mathbb{F}$, autrement dit :

$$\mathbb{E} = \mathbb{F} \text{ lorsque } x \in \mathbb{E} \Leftrightarrow x \in \mathbb{F}.$$

Propriété 6 (Égalité).

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. $\mathbb{E} = \mathbb{F}$ ssi (si et seulement si) $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ et $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$

Exemple 7 (Ensembles égaux).

- ▶ $\{1;2\} = \{2;1\} \neq \{1;2;3;5\};$
- ▶ $\{5;7\} = \{7;5\} \neq \{1;2;3\}.$

1.1.2. - Opérations sur les ensembles : union

Définition 8 (Union).

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que l'ensemble $\mathbb{G} = \mathbb{E} \cup \mathbb{F}$ est l'**union** (ou la **réunion**) des ensembles $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ lorsque :

$x \in \mathbb{G} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{E} \text{ ou } x \in \mathbb{F}]$. (x peut être dans $\mathbb{E}$, dans $\mathbb{F}$ ou dans les deux à la fois)

Exemple 9 (Réunion d'ensembles).

- ▶ $\{1;2\} \cup \{2;3;5\} = \{1;2;3;5\};$
- ▶ $\{2;5;7\} \cup \{1;2;6;7\} = \{1;2;5;6;7\}.$

Remarque

Pour tout ensemble $\mathbb{E}$, on a $\mathbb{E} \cup \mathbb{E} = \mathbb{E}$.

➡ EXERCICE 1. *Union* : Que vaut $\{7;3;9;1\} \cup \{3;5;7;4\}$?



1.1.2. - Opérations sur les ensembles : intersection

Définition 10 (Intersection).

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On dit que l'ensemble $\mathbb{G} = \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$ est l'**intersection** des ensembles $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ lorsque :

$$x \in \mathbb{G} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{E} \text{ et } x \in \mathbb{F}].$$

Exemple 11 (Intersection d'ensembles).

- ▶ $\{2;5;7\} \cap \{1;2;6;7\} = \{2;7\};$
- ▶ $\{2;5;7\} \cap \{1;3;6;8\} = \{\}.$

Remarque

Pour tout ensemble $\mathbb{E}$, on a $\mathbb{E} \cap \mathbb{E} = \mathbb{E}$.

➡ EXERCICE 2. *Intersection* : Que vaut $\{7;3;9;1\} \cap \{3;5;7;4\}$?



1.1.2. - Opérations sur les ensembles : soustraction

Définition 12 (Soustraction).

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. L'ensemble $\mathbb{E}$ privé de l'ensemble $\mathbb{F}$ est l'ensemble $\mathbb{G} = \mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$ défini par :

$$x \in \mathbb{G} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{E} \text{ et } x \notin \mathbb{F}].$$

Exemple 13 (Soustraction de deux ensembles).

- ▶ $\{1;2\} \setminus \{2;3;5\} = \{1\};$
- ▶ $\{2;5;7\} \setminus \{1;2;6;7\} = \{5\};$
- ▶ $\{2;5;7\} \setminus \{1;3;6;8\} = \{2;5;7\}.$

➡ EXERCICE 3. *Soustraction* : Que vaut $\{7;3;9;1\} \setminus \{3;5;7;4\}$?



1.1.2. - Propriétés

Propriété 14 (Commutativité, associativité et distributivité de l'union et de l'intersection).

Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois ensembles.

1. Commutativité de l'union : $\mathbb{E} \cup \mathbb{F} = \mathbb{F} \cup \mathbb{E}$
2. Commutativité de l'intersection : $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} = \mathbb{F} \cap \mathbb{E}$
3. Associativité de l'union : $\mathbb{E} \cup (\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) \cup \mathbb{G}$
4. Associativité de l'intersection : $\mathbb{E} \cap (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \cap \mathbb{G}$
5. Distributivité de l'union sur l'intersection : $\mathbb{E} \cup (\mathbb{F} \cap \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cup \mathbb{F}) \cap (\mathbb{E} \cup \mathbb{G})$
6. Distributivité de l'intersection sur l'union : $\mathbb{E} \cap (\mathbb{F} \cup \mathbb{G}) = (\mathbb{E} \cap \mathbb{F}) \cup (\mathbb{E} \cap \mathbb{G})$

1.1.2. - Ensemble vide

Définition 15 (Ensemble vide).

L'ensemble vide est l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset = \{\}$.

Propriété 16 (Relations avec l'ensemble vide $\emptyset$).

L'ensemble vide $\emptyset$ étant l'ensemble n'ayant aucun élément, alors tout ensemble $\mathbb{E}$ vérifie :

1. $\mathbb{E} \cup \emptyset = \mathbb{E}$
2. $\mathbb{E} \cap \emptyset = \emptyset$
3. $\mathbb{E} \setminus \mathbb{E} = \emptyset$.

1.1.3. - Les nombres entiers : $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Définition 17 (Entiers naturels et entiers relatifs).

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ celui des entiers relatifs :

- ▶ $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\};$
- ▶ $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}.$

Définition 18 (Ensembles dérivés de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$).

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{Z}^*$ celui des entiers relatifs non nuls :

- ▶ $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1; 2; 3; \dots\};$
- ▶ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\dots; -3; -2; -1; 1; 2; \dots\}.$

1.1.3. - Les rationnels et les réels : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Définition 19 (Nombres rationnels et nombres réels).

On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels :

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$, et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels. Les nombres réels peuvent être représentés par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.

Définition 20 (Ensembles dérivés de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$).

On note $\mathbb{Q}^*$ l'ensemble des nombres rationnels non nuls, $\mathbb{R}^*$ celui des réels non nuls, $\mathbb{R}_+$ celui des réels positifs ou nuls, et $\mathbb{R}_-$ celui des réels négatifs ou nuls :

- ▶ $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\}$;
- ▶ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$; $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$;
- ▶ $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$; $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$.

Remarques :

- ▶ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ pour b et d différents de 0;
- ▶ la barre oblique « / » utilisée dans les définitions précédentes signifie « tel que ».

1.1.3. - Cas particuliers des nombres décimaux

Définition 21 (Nombres décimaux).

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire exactement avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Les nombres décimaux sont les quotients d'entiers par des puissances de 10 et se présentent ainsi comme des rationnels particuliers :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exemple 22.

- ▶ $1,75 = \frac{175}{100} \in \mathbb{D}$;
- ▶ $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.

Remarques : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;

1.1.3. - Exercice

➔ EXERCICE 4. *Ensembles usuels* : Compléter le tableau suivant :

n	$n \in \mathbb{N}?$	$n \in \mathbb{N}^*?$	$n \in \mathbb{Z}?$	$n \in \mathbb{Q}?$	$n \in \mathbb{R}?$	$n \in \mathbb{R}_-?$	$n \in \mathbb{R}_+^*?$	$n \in \mathbb{D}?$
0								
π								
$-\frac{3}{5}$								
3,1								
$-\sqrt{2}$								
-7								
5								
$\frac{7}{9}$								



1.1.3. - Approximation d'un nombre réel par un nombre décimal

Définition 23 (Arrondi à 10^{-n} près).

Étant donné un nombre réel x et un entier positif n , on appelle arrondi à 10^{-n} près le nombre décimal $\hat{x}$ le plus proche de x avec n chiffres après la virgule.

Exemple 24.

- ▶ $1,8988 \approx 1,9$ à 10^{-1} près;
- ▶ $10,3451 \approx 10,35$ à 10^{-2} près.

➡ EXERCICE 5. *Arrondi* : Donner les arrondis à 10^{-1} près, 10^{-2} près et 10^{-3} près des nombres suivants :

1 1,12345

2 2,88234

3 3,45164



1.1.3. - Notations scientifique et ingénieur

Définition 25 (Notation scientifique).

La notation scientifique d'un nombre décimal x est une manière d'écrire ce nombre sous la forme $x = \pm a \times 10^p$ où $a \in [1,10[$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Définition 26 (Notation ingénieur).

La notation ingénieur d'un nombre décimal x est une manière d'écrire ce nombre sous la forme $x = \pm a \times 1000^p = \pm a \times 10^{3p}$ où $a \in [1;1000[$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Exemple 27.

Nombre	Notation scientifique	Notation ingénieur
10,17	$1,017 \times 10^1 = 1,017e1$	$10,17 \times 10^0 = 10,17$
12345	$1,2345 \times 10^4 = 1,2345e4$	$12,345 \times 10^3 = 12,345k$
0,0123	$1,23 \times 10^{-2} = 1,23e-2$	$12,3 \times 10^{-3} = 12,3m$

1.1.3. - Notations scientifique et ingénieur et unités

Unités de base de la notation ingénieur

10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}
f	p	n	μ	m	k	M	G	T	P
femto	pico	nano	micro	milli	kilo	méga	giga	téra	péta

➡ EXERCICE 6. *Notations scientifique et ingénieur* : Compléter le tableau suivant :

Nombre	Notation scientifique	Notation ingénieur	Notation avec unité
32316	$3,2316 \times 10^4$	$32,316 \times 10^3$	32,316k
0,0002			
	3×10^{-5}		
		32×10^{-9}	
			17 M



1.1.4. - Produit de deux ensembles

Définition 28 (Produit de deux ensembles).

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles. On définit l'**ensemble produit** $\mathbb{G} = \mathbb{E} \times \mathbb{F}$ par l'ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$. Ainsi, $\mathbb{G} = \mathbb{E} \times \mathbb{F} = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{E}, y \in \mathbb{F}\}$.

Définition 29 (Puissance entière d'un ensemble).

Soient $\mathbb{E}$ un ensemble et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{E}^n = \underbrace{\mathbb{E} \times \cdots \times \mathbb{E}}_{n \text{ fois}}$ est l'ensemble des n -uplets $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ avec $x_1 \in \mathbb{E}, x_2 \in \mathbb{E}, \dots$, et $x_n \in \mathbb{E}$.

1.1.4. - Produit de deux ensembles

Exemple 30 (Quelques ensembles produits).

- ▶ $(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \Leftrightarrow [x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{Q}]$;
- ▶ $(1; -1) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ mais $(-1; 1) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$;
- ▶ $(x; y) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow [x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}]$.

➡ EXERCICE 7. *Ensemble produit* : Est-ce que

1 $(3; \pi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$?

2 $(\sqrt{2}; \pi; 7) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

3 $(\sqrt{2}; \pi; 7) \in \mathbb{R}^3$?

4 $(\sqrt{2}; \pi; 7) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$?



1.2.1. - Somme de fractions

Définition 31 (Addition de deux fractions).

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. Alors $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}}$.

Remarques :

- ▶ si les deux fractions ont le même dénominateur ($b = d$) alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$;
- ▶ si l'une des deux fractions est en fait un nombre entier, par exemple $b = 1$ et $\frac{a}{b} = a$ alors $a + \frac{c}{d} = \frac{ad+c}{d}$.

➔ EXERCICE 8. *Sommes de fractions* : Calculer les sommes suivantes. On donnera chaque résultat sous sa forme irréductible.

$$\boxed{1} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$\boxed{2} \quad \frac{3}{4} + \frac{5}{8} =$$

$$\boxed{3} \quad \frac{3}{14} - \frac{2}{21} =$$

$$\boxed{4} \quad -1 + \frac{2}{3} =$$

$$\boxed{5} \quad 2 - \frac{2}{3} =$$

$$\boxed{6} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{4} =$$



1.2.1. - Produit de fractions

Définition 32 (Multiplication de deux fractions).

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. Alors $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \right)$.

Remarque : si l'une des deux fractions est en fait un nombre entier, par exemple $b = 1$ et $\frac{a}{b} = a$ alors $a \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$.

➔ EXERCICE 9. *Produits de fractions* : Calculer les produits suivants. On donnera chaque résultat sous sa forme irréductible..

$$1 \quad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} =$$

$$2 \quad \frac{3}{4} \times \frac{5}{8} =$$

$$3 \quad \frac{-3}{14} \times \left(-\frac{2}{21} \right) =$$

$$4 \quad -1 \times \frac{2}{3} =$$

$$5 \quad 2 \times \frac{-2}{3} =$$

$$6 \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{-4} =$$



1.2.1. - Rapport de fractions

Définition 33 (Division d'une fraction par une fraction).

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions. Alors $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Remarque : si $\frac{a}{b} = 1$ on obtient l'inverse d'une fraction avec $a = b = 1$: $\frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{d}{c}$.

➔ **EXERCICE 10. Rapports de fractions :** Calculer les produits suivants. On donnera chaque résultat sous sa forme irréductible..

1 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} =$

2 $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}} =$

3 $\frac{\frac{-3}{14}}{\left(\frac{-2}{21}\right)} =$

4 $\frac{-1}{\frac{2}{3}} =$

5 $\frac{2}{\frac{-2}{3}} =$

6 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{-4}} =$



1.2.2. - Rappels sur la puissance

Définition 34 (Puissance d'un nombre réel).

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- ▶ $a^0 = 1$ si $a \neq 0$;
- ▶ $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$;
- ▶ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$;
- ▶ $a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$ si $a \geq 0$. Il s'agit de l'unique nombre réel positif b tel que $b^p = a$;
- ▶ $a^{n/p} = \sqrt[p]{a^n} = \sqrt[p]{a}^n$ si $a \geq 0$;
- ▶ $a^{-n/p} = \sqrt[p]{\frac{1}{a^n}} = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{a}}\right)^n$ si $a > 0$.

Remarque : si $a < 0$ et p entier impair, $a^{1/p} = \sqrt[p]{a}$ existe aussi et désigne l'unique nombre (négatif) b tel que $b^p = a$.

➔ EXERCICE 11. Puissances : Effectuer les calculs suivants :

1 $4^{\frac{1}{2}} =$

2 $8^{\frac{1}{3}} \times 2^{-1} =$

3 $9^{\frac{6}{3}} =$

4 $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{7}{21}} =$



1.2.2. - Propriétés

Propriété 35 (Propriétés de la puissance).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $q, r \in \mathbb{Q}$. Alors, lorsque les puissances existent :

1. $(ab)^q = a^q b^q$;
2. $(a^q)^r = (a^r)^q = a^{qr}$;
3. $a^q a^r = a^{q+r}$;
4. $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$;
5. $\frac{a^q}{a^r} = a^{q-r}$;
6. en général : $(a + b)^q \neq a^q + b^q$.

➔ EXERCICE 12. *Simplification d'expressions faisant intervenir des radicaux :*

Simplifier les expressions suivantes

1 $\sqrt{8} - 2\sqrt{2} =$

2 $\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} =$

3 $\sqrt{27} - \sqrt{3} =$



➔ EXERCICE 13. *Calculs sur les puissances :* Simplifier les expressions suivantes

1 $\sqrt{8} \times 8^{-\frac{1}{2}} =$

2 $\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6 =$

3 $\frac{12^9}{12^8} =$



1.2.2. - Identités remarquables

Propriété 36 (Identités remarquables).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

➡ EXERCICE 14. *Identités remarquables* : Utiliser les identités remarquables pour effectuer les calculs suivants sans calculatrice :

1 $999^2 =$

2 $1001^2 =$

3 $999 \times 1001 =$



2. - Plan

Notions de base

Introduction aux signaux

- Rappels sur les fonctions

- Signaux usuels

- Caractéristiques fondamentales des signaux

- Opérations sur les signaux

Éléments de trigonométrie

Signaux périodiques

2. - Introduction

Définition 37 (Les signaux).

Les signaux sont des fonctions de la variable temporelle t . Ils véhiculent une information délivrée par l'évolution d'une grandeur physique en fonction du temps t , et peuvent être de natures variées :

- ▶ en **électronique** : signal de tension ou d'intensité ;
- ▶ en **télécommunication** : signal électromagnétique en sortie d'un modulateur ;
- ▶ en **téléphonie** : signal de parole, signal vidéo pour une visioconférence.

Contexte général du cours

En mathématiques, on utilise souvent la lettre x pour désigner la variable réelle, et la lettre f pour la fonction. Dans ce cours on utilisera la lettre t plutôt que x pour désigner la variable temporelle réelle. On se limitera aux signaux analogiques modélisables par des fonctions de la variable $t \in \mathbb{R}$, qu'on notera souvent $s(t)$ plutôt que $f(x)$. Les signaux numériques seront traités par la ressource R213 (Mathématiques des systèmes numériques).

2.1.1. - Fonctions

Définitions 38 (Fonction réelle de la variable réelle).

Une **fonction** f réelle de la variable réelle est une **relation** qui relie un réel x à **au plus un** réel y . L'élément y se note $f(x)$. La fonction se

$$\text{note : } f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = f(x) \end{cases} .$$

$y = f(x)$ est appelé l'**image** de x par f et x est un **antécédent** de y par f .

Définition 39 (Ensemble ou domaine de définition).

L'**ensemble de définition** (ou **domaine de définition**) de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué par les réels x qui ont une image par f : on le note $D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe} \}$.

Définition 40 (Ensemble image).

L'ensemble formé par les images y de tous les éléments x de D_f par f est appelé **ensemble image** de f : on le note $I_f = \{y = f(x) \in \mathbb{R} / x \in D_f\}$.

Définition 41 (Graphe géométrique $\mathcal{G}_f$ de f).

Le **graphe (géométrique)** de f est l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan $\mathcal{P}$, dont l'abscisse est $x \in D_f$ et l'ordonnée est $y = f(x) \in I_f$. On le note : $\mathcal{G}_f = \{M(x; f(x)) \in \mathcal{P} / x \in D_f\}$.

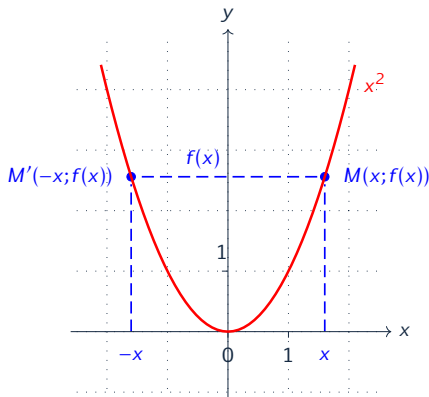
2.1.1. - Exemple

Exemple 42 (La fonction carré).

La fonction carré est définie par

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{cases}$$

L'image de x par f est $y = f(x) = x^2$. Cette fonction se caractérise par $D_f = \mathbb{R}$, $I_f = \mathbb{R}^+$ car un carré est toujours positif (ou nul).



2.1.2. - Les fonctions « simples »

	f	Expression $f(x)$	D_f	I_f
Polynôme	Constante	c	$\mathbb{R}$	$\{c\}$
	Identité	$\text{Id}(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
	Affine	$ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
	Monôme	x^n	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$ si n pair $\mathbb{R}$ si n impair
	Polynôme (iale)	$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$	$\mathbb{R}$	dépend des coeff. si n pair $\mathbb{R}$ si n impair
	Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$
Fraction	Inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
	Fraction rationnelle	$\frac{b_0 + b_1x + \dots + b_Mx^M}{a_0 + a_1x + \dots + a_Nx^N}$	$\left\{ x \in \mathbb{R} / \sum_{n=0}^N a_n x^n \neq 0 \right\}$	dépend des coefficients
Trigonométrie	Sinus	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$
	Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1; 1]$
	Tangente	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R}$

2.1.3. - Fonction définie par morceaux

Définition 43 (Fonction définie par morceaux).

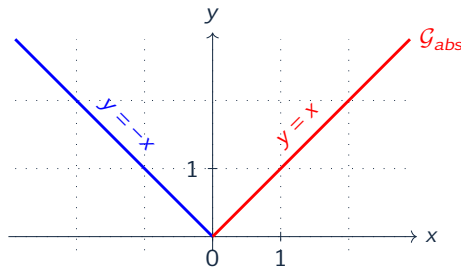
Une fonction f de la variable x peut être définie par **plusieurs expressions analytiques**, dépendantes des valeurs prises par x .

Exemple 44 (Valeur absolue (abs)).

Elle est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Par exemple, $|3| = 3$ car $3 \geq 0$
tandis que $|-4| = -(-4) = 4$ car $-4 < 0$.



2.1.4. - Racines réelles d'un polynôme du second degré

Définition 45 (Discriminant d'un polynôme du second degré).

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$. Le discriminant de $P(x)$ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 46 (Racines réelles d'un polynôme du second degré).

On appelle racine d'un polynôme $P(x)$ toute solution de l'équation $P(x) = 0$. Le nombre de racines réelles dépend du signe du discriminant :

- ▶ si $\Delta > 0$, $P(x)$ possède deux racines réelles distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- ▶ si $\Delta = 0$, $P(x)$ possède une racine réelle double $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$;
- ▶ si $\Delta < 0$, $P(x)$ ne possède aucune racine réelle.

➡ **EXERCICE 15.** *Racines réelles d'un polynôme du second degré :* Donner les racines réelles des polynômes suivants, si elles existent :

1 $P(x) = x^2 - x + 3$ **2** $P(x) = -2x^2 - 2x + 1$ **3** $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$ □

2.1.4. - Signe d'un polynôme du second degré

Propriété 47 (Signe d'un polynôme du second degré).

Le signe d'un polynôme du second degré dépend de a son terme de plus haut degré, son discriminant Δ et de ses racines si elles existent :

- ▶ si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a si $x \leq x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x \geq x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et il est du signe opposé à celui de a dans le cas contraire ;
- ▶ si $\Delta \leq 0$, $P(x)$ est du signe de a pour tout x .

➔ EXERCICE 16. *Signe d'un polynôme du second degré :* Donner le signe des polynômes suivants, selon la valeur de x :

1 $P(x) = -x^2 - x + 2$ **2** $P(x) = 2x^2 + 2x + 1$ **3** $P(x) = x^2 + 2x + 1$ □

2.1.4. - Exercice

➔ EXERCICE 17. *Domaine de définition* : Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :

1 $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ 2 $g(x) = x^2 + 1$ 3 $h(x) = \sqrt{2x+3}$ 4 $u(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$
5 $v(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ □

2.1.5. - Équation d'une droite dans le plan

Définition 48 (Équation de droite dans le plan).

On appelle équation d'une droite une équation vérifiée par les coordonnées $(x; y)$ des points M appartenant à une droite, et uniquement par ceux-ci. Elle est du type $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ des constantes réelles. Lorsque $\beta \neq 0$, elle peut se mettre sous la forme $y = ax + b$ avec $a = -\frac{\alpha}{\beta}$ et $b = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Remarques

- ▶ Une droite est caractérisée par une infinité d'équations de droites. En effet, si $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est une équation d'une droite, alors $k\alpha x + k\beta y + k\gamma = 0$ en est une autre pour tout k réel non nul.
- ▶ Lorsqu'une droite est caractérisée par une équation du type $y = ax + b$, celle-ci est alors unique. C'est le graphe de la fonction $f(x) = ax + b$.

➔ EXERCICE 18. *Équation de droite* : Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite passant par les points du plan :

1 $A(1;1)$ et $B(2;2)$

2 $A(1;-1)$ et $B(-1;2)$

3 $A(\frac{1}{2}; \frac{2}{3})$ et $B(\frac{2}{5}; -\frac{1}{4})$

4 $A(\frac{3}{8}; -\frac{1}{3})$ et $B(\frac{2}{7}; \frac{1}{5})$



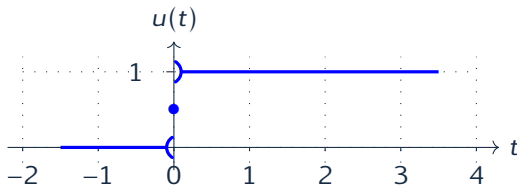
2.2.1. - Échelon unité

Définition 49 (Échelon unité).

L'échelon unité (ou échelon de Heavyside) est le signal défini (par morceaux) par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_u = \mathbb{R}$, $I_u = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.



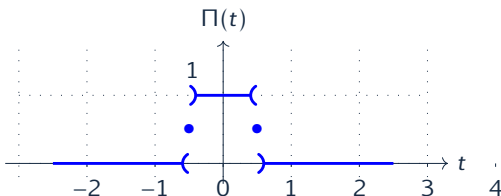
2.2.2. - Porte

Définition 50 (Fonction porte).

La fonction porte est le signal défini (par morceaux) par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 1/2 & \text{si } t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_{\Pi} = \mathbb{R}$, $I_{\Pi} = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.



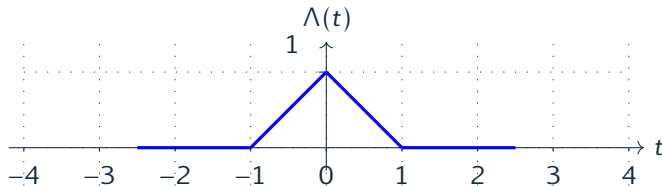
2.2.3. - Triangle

Définition 51 (Fonction triangle).

La **fonction triangle** est le signal défini (par morceaux) par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_\Lambda = \mathbb{R}$, $I_\Lambda = [0;1]$.



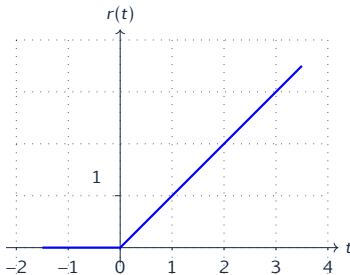
2.2.4. - Rampe

Définition 52 (Rampe).

La **rampe** est le signal défini (par morceaux) par :

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ses domaines sont : $D_r = \mathbb{R}$, $I_r = \mathbb{R}^+$.



2.3.1. - Signaux causaux

Définition 53 (Signal causal).

Un signal s est **causal** si et seulement si, pour tout $t < 0$, $s(t) = 0$.

Exemples 54 (Des signaux causaux... ou pas).

- ▶ L'échelon, la rampe sont des signaux causaux.
- ▶ Ni la porte, ni le triangle ne sont des signaux causaux.

➔ EXERCICE 19. *Signaux causaux* : Parmi les signaux suivants, lesquels sont causaux et lesquels ne le sont pas ?

1 $u(t+1)$ 2 $\Lambda(2t)$ 3 $u(t)+1$ 4 $\Pi(t-1)$ 5 $s(t) = t^3$



2.3.2. - Signaux à support fini

Définition 55 (Signal à support fini (borné)).

- ▶ Un signal $s(t)$ est dit à **support fini (borné)**, s'il existe deux réels t_1 et t_2 (avec $t_1 \leq t_2$) tels que pour tout $t < t_1$ ou $t > t_2$, $s(t) = 0$.
- ▶ Lorsque t_1 et t_2 sont respectivement la plus grande valeur et la plus petite valeur telles que $s(t) = 0$ pour $t < t_1$ ou $t > t_2$, on dit que l'intervalle $[t_1, t_2]$ est le support de $s(t)$.
- ▶ La durée $T = t_2 - t_1$ est alors la **largeur** du support.

Exemples 56 (Des signaux à support fini... ou pas).

- ▶ La porte $\Pi(t)$ est un signal à support fini. Son support est l'intervalle $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. La largeur du support vaut $T = 1$.
- ▶ Le triangle $\Lambda(t)$ sont à support fini. Son support est l'intervalle $[-1; 1]$. La largeur du support vaut $T = 2$.
- ▶ L'échelon unité $u(t)$ et la rampe $r(t)$ ne sont pas des signaux à support fini.

2.3.2. - Signaux à support fini

➡ EXERCICE 20. *Support fini, ou pas* : Les signaux suivants sont-ils à support fini ? Si oui, donner le support.

1 $u(t+1)$ 2 $\Lambda(2t)$ 3 $u(t)+1$ 4 $\Pi(t-1)$ 5 $s(t) = t^3$



2.3.3. - Parité, imparité

Définition 57 (Signal pair, impair).

Un signal s est :

- ▶ **pair** si et seulement si pour tout $t \in D_s$, $-t \in D_s$ et $s(-t) = s(t)$.
- ▶ **impair** si et seulement si pour tout $t \in D_s$, $-t \in D_s$ et $s(-t) = -s(t)$.

Corollaire 58 (Symétries graphiques).

- ▶ Le graphe d'un signal pair est symétrique, de symétrie axiale par rapport à la droite (Oy).
- ▶ Le graphe d'un signal impair présente une symétrie centrale par rapport au point $O(0;0)$.

2.3.3. - Parité, imparité

Exemples 59 (Des signaux pairs, impairs, et ni pairs ni impairs).

- ▶ La porte et le triangle sont des signaux pairs.
- ▶ La rampe et l'échelon unité ne sont ni pairs, ni impairs.
- ▶ Le signal $s(t) = \sin(t)$ est impair.

➔ EXERCICE 21. *Pair, impair* : Les signaux suivants sont-ils pairs, impairs, ou ni l'un ni l'autre?

1 $u(t+1)$ 2 $\Lambda(2t)$ 3 $u(t)+1$ 4 $\Pi(t-1)$ 5 $s(t) = t^3$



2.4.1. - Offset/translation verticale

Définition 60 (Offset).

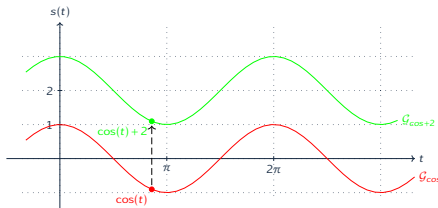
L'ajout d'un offset $\lambda \in \mathbb{R}$ à un signal f est la transformation qui au signal f associe le signal $h = f + \lambda$:

- ▶ dont le domaine de définition est $D_h = D_f$
- ▶ et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(t) + \lambda$.

Graphes

Le graphe du signal $h = f + \lambda$ avec λ une constante s'obtient en translatant chaque point du graphe de f par $\lambda \vec{j}$.

Exemple 61 ($h(t) = \cos(t) + 2$).



2.4.2. - Addition

Définition 62 (Addition de signaux).

L'addition est la transformation, qui à deux signaux f et g , associe le signal $h = f + g$:

- ▶ dont le domaine de définition est $D_h = D_f \cap D_g$
- ▶ et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(t) + g(t)$.

2.4.3. - Amplification d'un signal

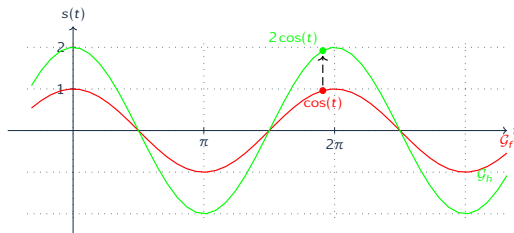
Définition 63 (Multiplication externe sur les signaux).

La multiplication d'un signal f par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation qui leur associe le signal $h = \lambda f$

- ▶ dont le domaine de définition est $D_h = D_f$
- ▶ et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = \lambda f(t)$.

On l'appelle également **amplification** du signal f par le gain λ .

Exemple 64 ($h(t) = 2 \cos(t)$).



2.4.4. - Produit

Définition 65 (Produit).

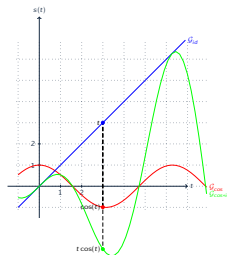
Le **produit** de f et g est la transformation qui leur associe le signal notée $h = f.g$

- ▶ dont le domaine de définition est $D_h = D_f \cap D_g$
- ▶ et qui est défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(t).g(t)$.

Remarque : Tout signal $s(t)$ peut être rendu à support fini en le multipliant par une porte.

Exemple 66 ($h(t) = t \cos(t)$).

C'est le produit de $f(t) = \cos(t)$ et $g(t) = t$



2.4.5. - Retard, avance

Définition 67 (Signal retardé).

Soient f un signal et $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le signal h , dont le domaine de définition est $D_h = \{t \in \mathbb{R} / t - t_0 \in D_f\}$ et défini, pour tout $t \in D_h$ par $h(t) = f(t - t_0)$ est dit **retardé** de t_0 par rapport au signal f . Le graphe de h s'obtient en translatant chaque point du graphe de f par $t_0 \vec{i}$

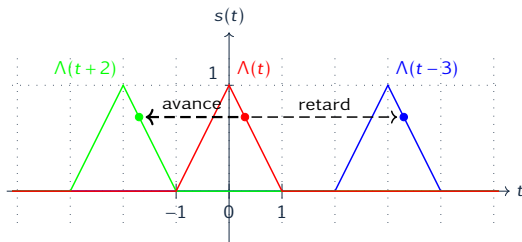
Définition 68 (Signal avancé).

Soient f un signal et $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Le signal h , dont le domaine de définition est $D_h = \{t \in \mathbb{R} / t + t_0 \in D_f\}$ et défini, pour tout $t \in D_h$ par $h(t) = f(t + t_0)$ est dit **avancé** de t_0 par rapport au signal f . Le graphe de h s'obtient en translatant chaque point du graphe de f par $-t_0 \vec{i}$

Remarque : Une avance de t_0 peut être vue comme un retard de $-t_0$.

2.4.5. - Exemple

Exemple 69 ($f(t) = \Lambda(t - 3)$ et $g(t) = \Lambda(t + 2)$).



Remarque : Retarder un signal à support fini peut permettre de le rendre causal.

Exemple 70 (Porte causale, triangle causal).

- ▶ $\Pi(t - t_0)$ est causal si et seulement si $t_0 \geq \frac{1}{2}$.
- ▶ $\Lambda(t - t_0)$ est causal si et seulement si $t_0 \geq 1$.

2.4.6. - Dilatation, compression

Définition 71 (Dilatation, compression).

Soient f un signal et $\alpha \in \mathbb{R}$. Le signal h , dont le domaine de définition est $D_h = \{t \in \mathbb{R} / \alpha t \in D_f\}$ et défini, pour tout $t \in D_h$, par $h(t) = f(\alpha t)$ est :

- ▶ une compression/contraction de f par α , si $\alpha > 1$;
- ▶ une dilatation de f par $1/\alpha$, si $\alpha < 1$.

Propriété 72 (Dilatation d'un signal à support borné).

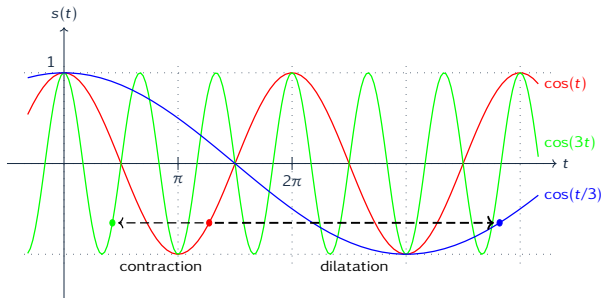
Soit $s(t)$ un signal de support $[t_1, t_2]$ et α un réel strictement positif. Alors le signal $s_\alpha(t)$ défini par $s_\alpha(t) = s(\alpha t)$ est de support $[t_1/\alpha, t_2/\alpha]$.

Remarques :

- ▶ Une dilatation de α peut être vue comme une contraction de $\frac{1}{\alpha}$;
- ▶ Le point fixe de cette transformation est celui pour lequel $t = 0$.

2.4.6. - Exemple

Exemple 73 ($f(t) = \cos(3t)$ et $g(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$).



2.4.6. - Exemple

Exemple 74 (Porte de largeur T).

Le signal $s(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ est la porte de largeur $T \in \mathbb{R}_+^*$, définie par

$$s(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} & , \text{ si } t = \pm \frac{T}{2} \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple 75 (Triangle de largeur T).

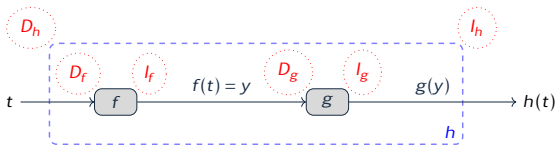
Le signal $s(t) = \Lambda\left(\frac{2t}{T}\right)$ est la fonction triangle de largeur $T \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\text{définie par } s(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T}|t| & , \text{ si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

2.4.7. - Composition

Définition 76 (Composée).

La composée de f par g , notée $g \circ f$, est le signal h définie par $\forall t \in D_h, h(t) = (g \circ f)(t) = g(f(t))$. Son domaine de définition est : $D_h = \{t \in D_f / f(t) \in D_g\}$.



Exemple 77 (Sinusoïde $s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$).

C'est la composée de la fonction affine $y(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ avec la fonction cosinus $g(y) = A_0 \cos(y)$ avec A_0, ω_0, φ_0 trois nombres réels.

Remarque : Retard, avance, dilatation et contraction sont des composées particulières.

2.4.7. - Cas particulier : quotient

Cas particulier : Quotient $h = \frac{f}{g}$

C'est le produit de f par la fonction $\frac{1}{g}$. Et $\frac{1}{g}$ est la composée de g par la fonction inverse $y \mapsto \frac{1}{y}$. Cette fonction est définie, pour tout $t \in D_h$ par $h(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ avec $D_h = \{t \in D_f \cap D_g / g(t) \neq 0\}$.

Exemple 78 (Fraction rationnelle).

Les fractions rationnelles telles que $f(t) = \frac{1+t+2t^2}{1-3t}$ sont des quotients.

2.4.8. - Résumé

Fonction h	Définition	$h(x)$	D_h
Somme	$h = f + g$	$h(x) = f(x) + g(x)$	$D_h = D_f \cap D_g$
Amplification par λ	$h = \lambda f$	$h(x) = \lambda f(x)$	$D_h = D_f$
Produit	$h = f \cdot g$	$h(x) = f(x) \cdot g(x)$	$D_h = D_f \cap D_g$
Dilatation par α		$h(x) = f(\alpha x)$	$D_h = \{x \in \mathbb{R} / \alpha x \in D_f\}$
Retard de r		$h(x) = f(x - r)$	$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x - r \in D_f\}$
Quotient	$h = \frac{f}{g}$	$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_h = \{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\}$
Composée	$h = g \circ f$	$h(x) = g(f(x))$	$D_h = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

2.4.9. - Exercices

➔ EXERCICE 22. *Tracé de signaux* : Tracer les signaux suivants, en identifiant les opérations élémentaires qui les définissent :

1 $s(t) = 3\Pi(2t - 1)$

2 $s(t) = -3\Pi(t/2 + 1)$

3 $s(t) = 2\Pi(t/2) + \Pi(t - 1)$

4 $s(t) = u(t) - u(t - 1)$

5 $s(t) = \Pi(t - 1) + r(t) - 1$

6 $s(t) = 2\Lambda(3t + 1)$

7 $s(t) = 3u(2t - 1)$

8 $s(t) = -3r(t/2 + 1)$

9 $s(t) = 3\cos(2t - 1)$

10 $s(t) = 3\sin(t/2 + 1)$



2.4.9. - Exercices

➔ EXERCICE 23. *Fonction composée* : Soient $f(x) = 1 - x + x^2$ et $g(x) = \frac{1}{1+x}$.
Donner l'expression de $f \circ g$ et $g \circ f$ en fonction de x et déterminer le domaine de définition de chacune. □

➔ EXERCICE 24. *Tracé graphique* : Tracer le graphe des signaux suivants :

$$\text{1 } f(x) = xu(x) - 2(x-1)u(x) + (x-2)u(x-2) \quad \text{2 } f(t) = r(t) - r(t-1) - 1$$
□

➔ EXERCICE 25. *Domaine de définition* : Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{x-2}{3x^2-2x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$. □

2.4.9. - Exercices

➔ EXERCICE 26. *Composition* : On considère les trois fonctions f , g et h de la variable réelle x définies par : **a** $f(x) = 2x + 1$, **b** $g(x) = 1 - x^2$,

c $h(x) = \frac{x}{x+1}$.

Donner la règle de définition des fonctions composées suivantes (en fonction de x) :

1 $f \circ g$

2 $g \circ \frac{1}{f}$

3 $h \circ g \circ f$

4 $g \circ h \circ f$



2.4.9. - Exercices

➔ EXERCICE 27. *Domaine de définition* : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$1 \quad f(x) = \frac{1+2x+x^4}{x^2+2x+3}$$

$$4 \quad f(x) = \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$7 \quad f(x) = \sqrt{(x-2)(x+1)}$$

$$10 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4 - x^2}}$$

$$2 \quad f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-1}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{x^2+3}{1-|x|}$$

$$8 \quad f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$$

$$11 \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)}$$

$$3 \quad f(x) = \tan(x) + \cos(x)$$

$$6 \quad f(x) = \sqrt{x^2+2x+3}$$

$$9 \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$12 \quad f(x) = \sqrt{2\cos(x)-1}$$



2.4.9. - Exercices

➔ EXERCICE 28. *Parité, Imparité* : Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires, ou ni paires ni impaires ; préciser alors le domaine d'étude :

1 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

2 $f(x) = \frac{1}{x-1}$

3 $f(x) = \frac{3x^5 - 7x^3 + x}{4x^2 + 1}$



➔ EXERCICE 29. *Décomposition de fonctions en paire et impaire (PE)* :

Montrer que toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ peut se décomposer en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On pourra étudier les deux

fonctions g et h définies en fonction de f par : $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$



3. - Plan

Notions de base

Introduction aux signaux

Éléments de trigonométrie

- Radian et degré

- Cercle trigonométrique et propriétés de base

- Angles remarquables

- Exercices

Signaux périodiques

3.1. - Radian et degré

Définition 79 (Radian).

Soit L la longueur d'un arc de cercle de rayon R . Alors, le rapport

$\theta_{\text{rad}} = \frac{L}{R}$ est la mesure de l'angle correspondant en radians (rad).

Définition 80 (Degré).

Soit θ la mesure d'un angle en radian. Alors sa mesure en degrés ($^\circ$)

vaut $\theta_{\text{deg}} = \frac{180}{\pi} \theta_{\text{rad}}$.

θ_{deg}	0	30	45	60	90	180	360
θ_{rad}	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Propriété 81 (Circonférence d'un cercle).

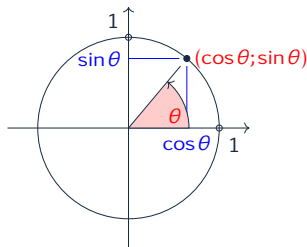
La circonférence d'un cercle de rayon R vaut $L = 2\pi R$. Elle est égale à la longueur d'un arc de cercle correspondant à un angle de

$\theta_{\text{rad}} = 2\pi \text{ rad}$ soit $\theta_{\text{deg}} = 360^\circ$.

3.2. - Rappels de trigonométrie : cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base).

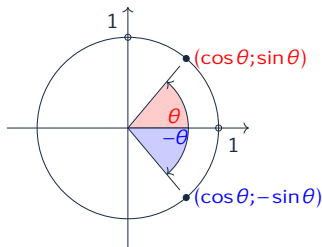
- *Relation fondamentale :*
 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$



3.2. - Rappels de trigonométrie : cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base).

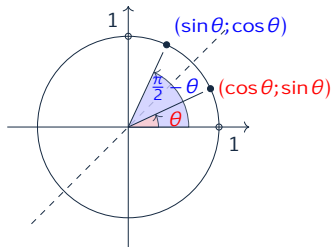
► $\sin(-\theta) = -\sin \theta$;
 $\cos(-\theta) = \cos \theta$;
 $\tan(-\theta) = -\tan \theta$



3.2. - Rappels de trigonométrie : cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base).

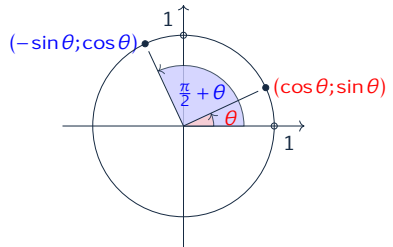
► $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta;$
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta;$
 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$



3.2. - Rappels de trigonométrie : cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base).

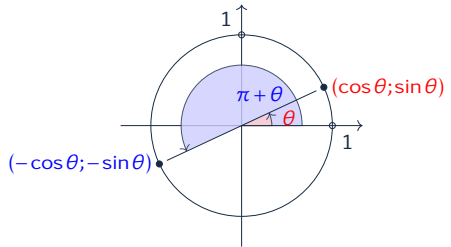
► $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta;$
 $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta;$
 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$



3.2. - Rappels de trigonométrie : cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base).

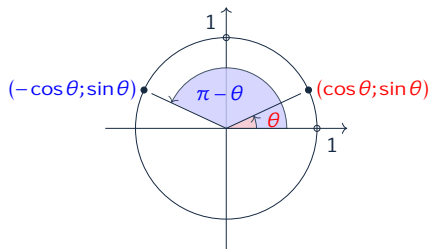
► $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$;
 $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$;
 $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$



3.2. - Rappels de trigonométrie : cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base).

► $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta ;$
 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta ;$
 $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$



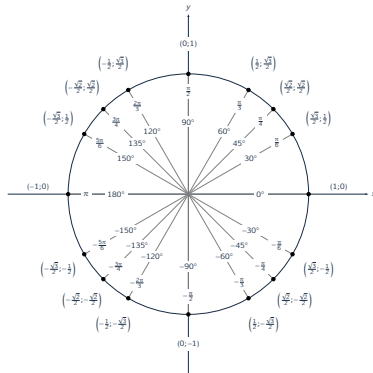
3.2. - Rappels de trigonométrie : cercle trigonométrique et propriétés de base

Propriété 82 (Trigonométrie de base).

- Pour tout entier relatif n ,
- $$\sin(n\pi + \theta) = (-1)^n \sin \theta ;$$
- $$\cos(n\pi + \theta) = (-1)^n \cos \theta ;$$
- $$\tan(n\pi + \theta) = \tan \theta$$

3.3. - Rappels de trigonométrie : angles remarquables

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$



3.4. - Exercices

➡ EXERCICE 30. *Calculs de sinus, cosinus et tangente* : Compléter le tableau suivant :

Angle θ	3π (540°)	$\frac{7\pi}{6}$ (210°)	$-\frac{5\pi}{4}$ (-225°)	$\frac{5\pi}{3}$ (300°)	$-\frac{3\pi}{2}$ (-270°)
$\sin(\theta)$					
$\cos(\theta)$					
$\tan(\theta)$					



➡ EXERCICE 31. *Longueur d'arc* : Soit M le point du plan de coordonnées polaires (r, θ) . Quelle est la longueur de l'arc de cercle AM avec A de coordonnées polaires $(r, 0)$?



➡ EXERCICE 32. : Démontrer que $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.



3.4. - Exercices

➔ EXERCICE 33. : Soit $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + 2$. Montrer que $f(x) = f(\pi - x)$.



➔ EXERCICE 34. : Soit $f(x) = 3\cos^2 x - 5\cos x + 7$. Montrer que $f(x) = f(-x)$.



➔ EXERCICE 35. : Soit $f(x) = a\cos^2 x + b\cos x \sin x + c\sin^2 x + d$. Montrer que $f(x) = f(\pi + x)$.



➔ EXERCICE 36. : Soit $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x - \sin x - \cos x$. Montrer que $f(x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$.



3.4. - Exercices de TD

➡ EXERCICE 37. *Equations trigonométriques* : Résoudre les équations suivantes :

$$1 \quad \sin x = \frac{1}{2}$$

$$2 \quad \sin 5x = \sin 3x$$

$$3 \quad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$



4. - Plan

Notions de base

Introduction aux signaux

Éléments de trigonométrie

Signaux périodiques

- Généralités

- Propriétés

- Des signaux périodiques classiques

- Exercices

4.1. - Signal périodique et période

Définition 83 (Signal périodique).

Soient $s(t)$ un signal temporel défini sur D_s et $T \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que s est **T -périodique** lorsque, pour tout $t \in D_s$, $t + T \in D_s$, $t - T \in D_s$ et $s(t + T) = s(t)$. On dit que T est une **période** du signal s .

Remarques :

- ▶ Si T est une période de $s(t)$, alors kT (avec $k \in \mathbb{Z}$) est aussi une période de $s(t)$. En fait, il y a une infinité de périodes pour $s(t)$!
- ▶ Pour un signal physique, la période s'exprime en s (secondes).

Définition 84 (Période d'un signal périodique).

Soit $s(t)$ un signal périodique. La **période** de $s(t)$ est le réel T_s défini par : $T_s = \min_T \{T \in \mathbb{R}_+^* / \forall t \in \mathbb{R}, s(t + T) = s(t)\}$. Toutes les périodes de $s(t)$ s'écrivent alors $T = kT_s$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

4.1. - Fréquence et pulsation

Définition 85 (Fréquence, pulsation).

Soit $s(t)$ un signal périodique de période T_s . La **fréquence** de $s(t)$ est

le réel F_s défini par : $F_s = \frac{1}{T_s}$. La **pulsation** de $s(t)$ est le réel ω_s

défini par : $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi F_s$.

Remarque : Pour un signal physique, la fréquence s'exprime en Hz (Hertz); la pulsation en rad/s.

Exemple 86 (Sinus).

$\sin(x)$ est un signal périodique de période 2π , de fréquence $1/2\pi$ et de pulsation 1.

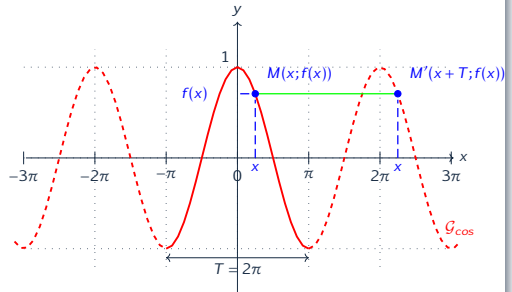
4.1. - Graphe d'une fonction périodique

Corollaire 87 (Fonction périodique).

Le graphe d'une fonction périodique de période T présente un motif se répétant régulièrement le long de l'axe des abscisses à intervalle T .

Exemple 88 ($\cos(x)$).

Elle est périodique de période 2π et 2π -périodique, 4π -périodique, ...



4.2. - Propriétés : avance/retard et dilatation/compression

Propriété 89 (Dilatation/compression d'un signal périodique).

Soient $s(t)$ un signal périodique de période T_s et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Alors le signal $s_\alpha(t)$ défini par $s_\alpha(t) = s(\alpha t)$ est périodique de période

$$T_{s_\alpha} = \frac{T_s}{|\alpha|}.$$

Propriété 90 (Avance/retard d'un signal périodique).

Soient $s(t)$ un signal périodique de période T_s et $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors le signal $s_{t_0}(t)$ défini par $s_{t_0}(t) = s(t - t_0)$ est périodique de période T_s .

4.2. - Composées de signaux périodiques

Propriété 91 (Composée d'un signal périodique).

Soit f une fonction réelle et $s(t)$ un signal périodique de période T_s . Alors $f(s(t))$ est T_s -périodique (T_s n'étant pas nécessairement la période de $f(s(t))$).

4.2. - Somme de signaux périodiques

Propriété 92 (Périodicité d'une somme de signaux périodiques).

Soient $s_1(t)$ et $s_2(t)$ deux signaux périodiques. Soient λ et μ deux nombres complexes.

1. Si T est une période commune de $s_1(t)$ et $s_2(t)$, alors le signal $s(t) = \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ est également périodique. T est une période de $s(t)$ mais n'est pas nécessairement la période de $s(t)$.
2. Si T_{s_1} est la période de $s_1(t)$ et T_{s_2} est la période de $s_2(t)$ avec $\frac{T_{s_1}}{T_{s_2}} \in \mathbb{Q}$, alors la période de $s(t) = \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$ est le réel $T_s = qT_{s_1} = pT_{s_2}$ où p et q sont deux réels définis de sorte que $\frac{T_{s_1}}{T_{s_2}} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $\frac{p}{q}$ irréductible. Si $\frac{T_{s_1}}{T_{s_2}} \notin \mathbb{Q}$ alors $s(t)$ n'est pas périodique.

4.2. - Propriétés

Propriété 93 (Création d'un signal périodique à partir d'un signal à support borné).

Soit $s(t)$ un signal à support borné et T un réel strictement positif.

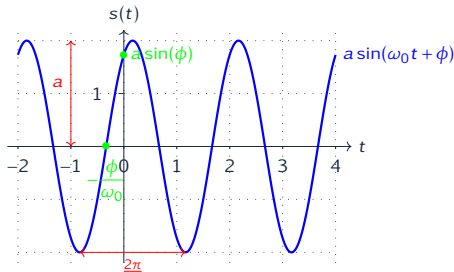
Alors le signal $s_T(t)$ défini par $s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT)$ est T -périodique.

Remarque : Si $s(t)$ n'est pas à support borné, la somme définissant $s_T(t)$ ne converge pas nécessairement. Si elle converge, alors $s_T(t)$ est bien T -périodique aussi.

4.3. - Signaux classiques

Définition 94 (Sinusoïde de pulsation ω_0 , de phase ϕ et d'amplitude a).

La **sinusoïde** est le signal défini par : $s(t) = a \sin(\omega_0 t + \phi)$ où les trois paramètres réels a, ω_0 et ϕ sont respectivement l'amplitude, la pulsation et la phase de la sinusoïde. C'est un signal à support non borné, non causal, et périodique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

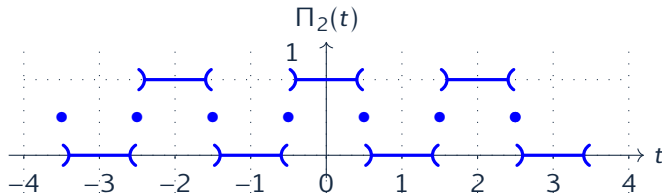


4.3. - Signaux classiques

Définition 95 (Créneau).

Le signal **créneau** de période $T_0 > 1$ est le signal périodique défini

$$\text{par : } \Pi_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi(t - kT_0).$$

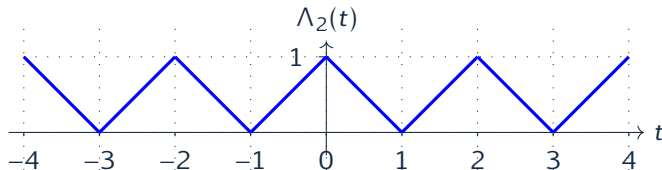


4.3. - Signaux classiques

Définition 96 (Dent de scie).

Le signal **dent de scie** de période $T_0 \geq 2$ est le signal périodique

défini par : $\Lambda_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda(t - kT_0)$.



4.4. - Exercices

➡ EXERCICE 38. *Tracé de graphe de signaux* : Soit $s(t)$ le signal temporel défini par $s(t) = -3 \sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$.

1 Déterminer la période de $s(t)$. **2** Tracer le graphe de $s(t)$.

Mêmes questions avec $s(t) = 2 \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ puis avec $s(t) = 5 \sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.



➡ EXERCICE 39. *Tracé de graphe de signaux* : Soit $s(t)$ le signal temporel défini par $s(t) = 2 \cos^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

1 Déterminer la période de $s(t)$. **2** Tracer le graphe de $s(t)$.

Mêmes questions avec $s(t) = 5 \left| \sin\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \right|$.



4.4. - Exercices

➔ EXERCICE 40. *Calcul de période* : Donner la plus petite période ainsi que la fréquence et la pulsation lorsqu'elles existent (attention, certains signaux ne sont pas périodiques).

1	$s_1(t) = \sin(2\pi t) - \cos(t)$	2	$s_2(t) = \sin(t) + \cos(2t)$	3	$s_3(t) = 2 \sin(2t) \cos\left(\frac{t}{2}\right)$
4	$s_4(t) = \Lambda_2(2t) - \Pi_2(4t)$	5	$s_5(t) = \sin^2\left(\frac{3t}{4}\right)$	6	$s_6(t) = \Pi_2(2t) - \Pi_2(4t)$

