# Mathématiques des transmissions
# Ressource R114

**Cyrille SICLET**, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr
**Kévin KASPER**, kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr
**Bruno TISSERAND**, bruno.tisserand@univ-grenoble-alpes.fr
**Clara CHATEIGNER**, clara.chateigner@univ-grenoble-alpes.fr

Version 2025

## Table des matières

# 1 Trigonométrie

## 1.1 Fonctions trigonométriques et trigonométriques réciproques

### 1.1.1 Fonctions sinus et arc sinus

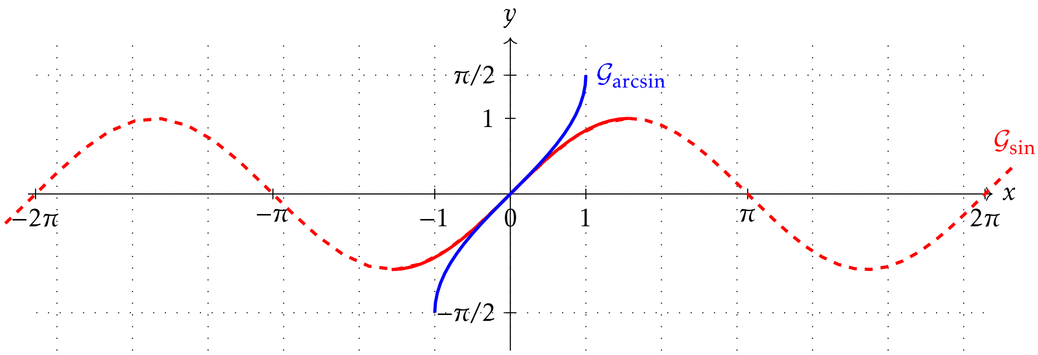


FIGURE 1 – Graphe du sin, du sin restreint et de arcsin.

.

**Définition 1** (Fonction arcsin)**.** arcsin (ou asin) est la fonction définie dans $[-1;1]$ et à valeurs dans $[-\pi/2;\pi/2]$ qui à tout $x$ associe l'angle $\theta$ dont le sin vaut $x$ ($\sin(\theta) = x$). C'est la fonction réciproque de la fonction sin lorsque son domaine de définition est restreint à $[-\pi/2;\pi/2]$. Son graphe est donné figure 1.

T.7 **Remarque** : Dire que $x = \sin(\theta)$ et $\theta = \arcsin(x)$ est équivalent lorsque $x \in [-1;1]$ et $\theta \in [-\pi/2;\pi/2]$

| Angle $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ (30°) | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°) | $\frac{\pi}{2}$ (90°) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\theta)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

TABLE 1 – Sinus remarquables.

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin(x)$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ (30°) | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°) | $\frac{\pi}{2}$ (90°) |

TABLE 2 – Arcs sinus remarquables.

T.8

➔ EXERCICE 1. *Autour de* $\arcsin(\sin(\theta))$ :

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1 $\arcsin(\sin(\pi))$
2 $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2}))$
3 $\arcsin(\sin(\frac{11\pi}{6}))$
4 $\arcsin(\sin(-\frac{7\pi}{4}))$
5 $\arcsin(\sin(7\pi+1))$
6 $\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{2}-1))$
7 $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}))$
8 $\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{4}))$
9 $\arcsin(\sin(\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{4}))$

□

**Exercice 2.** $\arcsin(\sin(\theta))$ *: cas général :*

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\sin(\theta))$ ?
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi; \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi]$. Que vaut $\arcsin(\sin(\theta))$ ?
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\sin(\theta))$ ?

T.9

**Exercice 3.** *Autour de* $\arcsin(\cos(\theta))$ :
Donner les valeurs des expressions suivantes :

1 $\arcsin(\cos(\pi))$
2 $\arcsin(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
3 $\arcsin(\cos(\frac{11\pi}{6}))$
4 $\arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{4}))$
5 $\arcsin(\cos(7\pi + 1))$
6 $\arcsin(\cos(\frac{9\pi}{2} - 1))$
7 $\arcsin(\cos(\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2}))$
8 $\arcsin(\cos(\frac{9\pi}{4} - \frac{1}{4}))$
9 $\arcsin(\cos(\frac{1}{8} - \frac{5\pi}{4}))$

**Exercice 4.** $\arcsin(\cos(\theta))$ *: cas général :*

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\cos(\theta))$ ?
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [(2k+1)\pi; \pi + (2k+1)\pi]$. Que vaut $\arcsin(\cos(\theta))$ ?
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [k\pi; \pi + k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\cos(\theta))$ ?

T.10

**Exercice 5.** *Autour de* $\cos(\arcsin(x))$ :
Donner les valeurs des expressions suivantes :

1 $\cos(\arcsin(0))$
2 $\cos(\arcsin(1))$
3 $\cos(\arcsin(-1))$
4 $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2}))$
5 $\cos(\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}))$
6 $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2}))$

**Exercice 6.** $\cos(\arcsin(x))$ *: cas général :*

1. Montrer que $\cos(\arcsin(x)) \geq 0, \forall x \in [-1;1]$ ;
2. Que vaut $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x))$ pour $x \in [-1;1]$ ?
3. En déduire que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1;1]$.

T.11

### 1.1.2 Fonctions cosinus et arc cosinus

**Définition 2** (Fonction arccos)**.** arccos (ou acos) est la fonction définie dans $[-1;1]$ et à valeurs dans $[0;\pi]$ qui à tout $x$ associe l'angle $\theta$ dont le cosinus vaut $x$ ($\cos(\theta) = x$). C'est la fonction réciproque de la fonction cos lorsque son domaine de définition est restreint à $[0;\pi]$. Son graphe est donné figure 2.

**Remarque** : Dire que $x = \cos(\theta)$ et $\theta = \arccos(x)$ est équivalent lorsque $x \in [-1;1]$ et $\theta \in [0;\pi]$ T.12

| Angle $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ (30°) | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°) | $\frac{\pi}{2}$ (90°) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(\theta)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |

Table 3 – Cosinus remarquables.

T.13

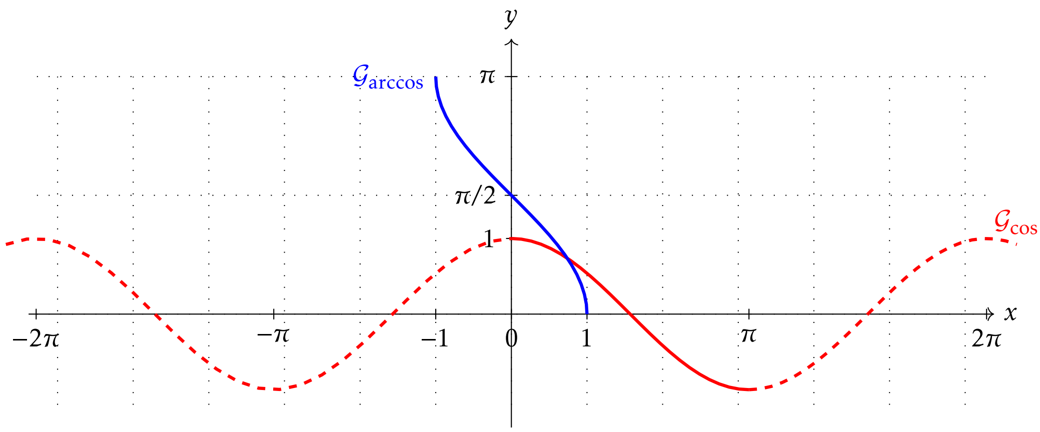


FIGURE 2 – Graphe du cos restreint et de arccos.

.

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arccos(x)$ | $\frac{\pi}{2}$ $(90°)$ | $\frac{\pi}{3}$ $(60°)$ | $\frac{\pi}{4}$ $(45°)$ | $\frac{\pi}{6}$ $(30°)$ | $0$ |

TABLE 4 – Arcs cosinus remarquables.

EXERCICE 7. *Autour de* $\arccos(\cos(\theta))$ :

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1 $\arccos(\cos(\pi))$
2 $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
3 $\arccos(\cos(\frac{11\pi}{6}))$
4 $\arccos(\cos(-\frac{7\pi}{4}))$
5 $\arccos(\cos(7\pi+1))$
6 $\arccos(\cos(\frac{9\pi}{2}-1))$
7 $\arccos(\cos(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}))$
8 $\arccos(\cos(\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{4}))$
9 $\arccos(\cos(\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{4}))$

□

EXERCICE 8. $\arccos(cos(\theta))$ *: cas général* :

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [2k\pi; \pi+2k\pi]$. Que vaut $\arccos(\cos(\theta))$ ?
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [(2k+1)\pi; \pi+(2k+1)\pi]$. Que vaut $\arccos(\cos(\theta))$ ?
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [k\pi; \pi+k\pi]$. Que vaut $\arccos(\cos(\theta))$ ?

□

T.14

EXERCICE 9. *Autour de* $\sin(\arccos(x))$ :

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1 $\sin(\arccos(0))$
2 $\sin(\arccos(1))$
3 $\sin(\arccos(-1))$
4 $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$
5 $\sin(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}))$
6 $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$

□

EXERCICE 10. $\sin(\arccos(x))$ *: cas général* :

1. Montrer que $\sin(\arccos(x)) \geq 0$, $\forall x \in [-1;1]$ ;
2. Que vaut $\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x))$ pour $x \in [-1;1]$ ?
3. En déduire que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1;1]$.

□

T.15

### 1.1.3 Fonctions tangente et arc tangente

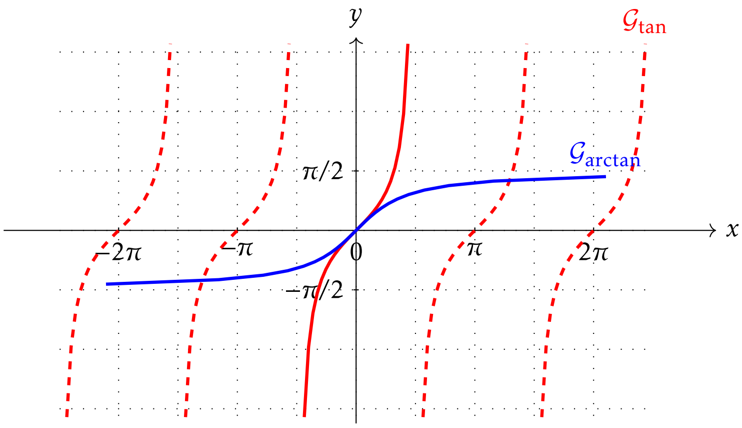


FIGURE 3 – Graphe de tan, de tan restreint et de arctan.

.

**Définition 3** (Fonction arctan)**.** arctan (ou atan) est la fonction définie dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\pi/2;\pi/2[$ qui à tout $x$ associe l'angle $\theta$ dont le tan vaut $x$ ($\tan(\theta)=x$). C'est la fonction réciproque de la fonction tan lorsque son domaine de définition est restreint à $]-\pi/2;\pi/2[$. Son graphe est donné figure 3.

**Remarque** : Dire que $x=\tan(\theta)$ et $\theta=\arctan(x)$ est équivalent lorsque $\theta\in]-\pi/2;\pi/2[$. T.16

| Angle $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ (30°) | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°) | $\frac{\pi}{2}$ (90°) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tan(\theta)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\infty$ |

TABLE 5 – Tangentes remarquables.

| $x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arctan(x)$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ (30°) | $\frac{\pi}{4}$ (45°) | $\frac{\pi}{3}$ (60°) | $\frac{\pi}{2}$ (90°) |

TABLE 6 – Arcs tangentes remarquables.

T.17

➔ EXERCICE 11. *Autour de* $\arctan(\tan(\theta))$ :
Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\arctan(\tan(\pi))$
2. $\arctan(\tan(\frac{7\pi}{3}))$
3. $\arctan(\tan(\frac{11\pi}{6}))$
4. $\arctan(\tan(-\frac{7\pi}{4}))$
5. $\arctan(\tan(7\pi+1))$
6. $\arctan(\tan(\frac{9\pi}{2}-1))$
7. $\arctan(\tan(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}))$
8. $\arctan(\tan(\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{4}))$
9. $\arctan(\tan(\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{4}))$

➔ EXERCICE 12. $\arctan(\mathit{tan}(\theta))$ *: cas général* :
Soit $k\in\mathbb{Z}$ et $\theta\in[-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+2\pi]$. Que vaut $\arctan(\tan(\theta))$ ?

T.18

**Exercice 13.** *Autour de* $\sin(\arctan(x))$ :
Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\sin(\arctan(0))$
2. $\sin(\arctan(1))$
3. $\sin(\arctan(-1))$
4. $\sin(\arctan(-\sqrt{3}))$
5. $\sin(\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}))$
6. $\sin(\arctan(\sqrt{3}))$

☐

**Exercice 14.** $\sin(\arctan(x))$ *: cas général* :

1. Montrer que $\sin(\arctan(x)) \geq 0$, pour $x \geq 0$ et $\sin(\arctan(x)) \leq 0$, pour $x \leq 0$ ;
2. On pose $\theta = \arctan(x)$ et $y = \sin(\theta)$. Montrer que $\tan^2(\theta) = \frac{y^2}{1-y^2}$ ;
3. En déduire que $x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$ ;
4. En déduire que $y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$ ;
5. En déduire que $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

☐

T.19

**Exercice 15.** *Autour de* $\cos(\arctan(x))$ :
Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\cos(\arctan(0))$
2. $\cos(\arctan(1))$
3. $\cos(\arctan(-1))$
4. $\cos(\arctan(\sqrt{3}))$
5. $\cos(\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}))$
6. $\cos(\arctan(-\sqrt{3}))$

☐

**Exercice 16.** $\cos(\arctan(x))$ *: cas général* :

1. Montrer que $\cos(\arctan(x)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ;
2. On pose $\theta = \arctan(x)$ et $y = \cos(\theta)$. Montrer que $\tan^2(\theta) = \frac{1-y^2}{y^2}$ ;
3. En déduire que $x^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$ ;
4. En déduire que $y^2 = \frac{1}{1+x^2}$ ;
5. En déduire que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

☐

T.20

## 1.2 Formules de trigonométrie

### 1.2.1 Formules d'addition, de soustraction et de duplication

**Théorème 4** (Addition et soustraction en trigonométrie). *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Alors :*

| | |
|---|---|
| $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ | $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ |
| $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ | $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ |

**Théorème 5** (Duplication en trigonométrie). *Soit* $a \in \mathbb{R}$. *Alors :*

| | |
|---|---|
| $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ | $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$ |

T.21

**Exercice 17.** *Cacul de* $\cos(\frac{\pi}{12})$ *et* $\sin(\frac{\pi}{12})$ :

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ ;
2. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et que $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

☐

➔ Exercice 18. *Cacul de* $\cos(\frac{\pi}{8})$ :

1. Montrer que $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$ ;
2. Utiliser la formule de duplication $a = \frac{\pi}{8}$ et en déduire que $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$.

☐

T.22

➔ Exercice 19. *Résolution de* $\cos(x) + \sin(x) = 1$ :

1. Développer l'expression $(\cos(x) + \sin(x))^2$ en utilisant une identité remarquable ;
2. En déduire que $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1 + \sin(2x)$ ;
3. En déduire les solutions de l'équation $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1$ ;
4. En déduire les solutions de l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

☐

T.23

### 1.2.2 Formules de linéarisation et de factorisation

**Théorème 6** (Linéarisation en trigonométrique). *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Alors :*

| | |
|---|---|
| $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ | $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ |
| $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\cos(a-b) - \dfrac{1}{2}\cos(a+b)$ | $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\cos(a+b) + \dfrac{1}{2}\cos(a-b)$ |
| $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\sin(a+b) + \dfrac{1}{2}\sin(a-b)$ | |

T.24

➔ Exercice 20. *Période, fréquence, pulsation* :

Linéariser puis calculer la période, la fréquence et la pulsation des signaux suivants :

1 $s_1(t) = \sin(2t+1)\cos(3t-1)$
2 $s_2(t) = 2\sin(2t+1)\sin(4t-1)$
3 $s_3(t) = 3\cos(-2t+1)\cos(3t-1)$
4 $s_4(t) = 5\sin(5\pi t+2)\sin(3\pi t-1)$
5 $s_5(t) = \sin^2(\frac{2\pi}{3}t+1)$
6 $s_6(t) = 2\sin(\frac{\pi}{5}t+1)\cos(\frac{\pi}{6}t-1)$
7 $s_7(t) = \sin(\frac{2\pi}{3}t+1)\cos(3\pi t-1)$
8 $s_8(t) = 2\cos^2(\frac{\pi}{6}t-1)$

☐

T.25

**Théorème 7** (Factorisation en trigonométrie). *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$. *Alors :*

| | |
|---|---|
| $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ | $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ |
| $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ | $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$ |

T.26

➔ Exercice 21. *Quelques équations trigonométriques* :

Factoriser les signaux suivantes :

1 $s_1(t) = \sin(2t+1) + \sin(3t-1)$
2 $s_2(t) = \sin(2t+1) - \sin(4t-1)$
3 $s_3(t) = \cos(-2t+1) + \cos(3t-1)$
4 $s_4(t) = \cos(5\pi t+2) - \cos(3\pi t)$
5 $s_5(t) = \sin(\frac{2\pi}{3}t+1) + \cos(3\pi t)$
6 $s_6(t) = \sin(\frac{\pi}{5}t+1) - \cos(\frac{\pi}{6}t-1)$

☐

T.27

### 1.2.3 Propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

**Théorème 8** (Fonctions trigonométriques réciproques). *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

- $\sin(\arcsin(x)) = x$ *si* $x \in [-1,1]$ ;
- $\cos(\arccos(x)) = x$ *si* $x \in [-1,1]$ ;
- $\tan(\arctan(x)) = x$ ;
- $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *si* $x \in [-1,1]$ ;
- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ *si* $x \in [-1,1]$ ;
- $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ *si* $x \neq 0$ ;
- $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ;
- $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

T.28

➔ Exercice 22. *Fonctions trigonométriques réciproques* :
Donner les valeurs des expressions suivantes, lorsqu'elles existent :

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\arcsin(\cos(1))$ | 2 $\arccos(\sin(2))$ | 3 $\cos(\arcsin(1))$ |
| 4 $\sin(\arccos(2))$ | 5 $\arcsin(\sin(\frac{1}{2}))$ | 6 $\arccos(\cos(-1))$ |
| 7 $\cos(\arcsin(\frac{1}{4}))$ | 8 $\sin(\arctan(\frac{3}{2}))$ | 9 $\arcsin(\sin(3))$ |
| 10 $\arcsin(\sin(1))$ | 11 $\arcsin(\cos(2))$ | 12 $\sin(\arcsin(1))$ |
| 13 $\cos(\arcsin(2))$ | 14 $\arcsin(\cos(\frac{1}{2}))$ | 15 $\arcsin(\sin(-1))$ |
| 16 $\sin(\arcsin(\frac{1}{4}))$ | 17 $\cos(\arctan(\frac{3}{2}))$ | 18 $\arcsin(\cos(3))$ |

□

T.29

➔ Exercice 23. *Fonctions trigonométriques réciproques* :
Donner les valeurs des expressions suivantes, lorsqu'elles existent :

| | | |
|---|---|---|
| 1 $\arccos(\cos(1))$ | 2 $\arcsin(\sin(2))$ | 3 $\cos(\arccos(1))$ |
| 4 $\sin(\arcsin(2))$ | 5 $\arccos(\cos(\frac{1}{2}))$ | 6 $\arcsin(\cos(-1))$ |
| 7 $\sin(\arccos(\frac{1}{4}))$ | 8 $\cos(\arccos(\frac{3}{2}))$ | 9 $\arccos(\sin(4))$ |
| 10 $\arccos(\sin(1))$ | 11 $\arccos(\cos(2))$ | 12 $\sin(\arctan(1))$ |
| 13 $\cos(\arctan(2))$ | 14 $\arccos(\sin(\frac{1}{2}))$ | 15 $\arccos(\sin(-1))$ |
| 16 $\cos(\arccos(\frac{1}{4}))$ | 17 $\sin(\arccos(\frac{3}{2}))$ | 18 $\arccos(\cos(4))$ |

□

T.30

## 1.3 Forme polaire $A\cos(\omega t + \varphi)$

**Théorème 9** ($A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$). *Soient $A > 0$, $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors $A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$ avec $a = A\cos\varphi$ et $b = A\sin\varphi$.*

➔ Exercice 24. $A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$ :
Écrire les signaux suivants sous la forme $s(t) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$ :

1. $s(t) = 2\cos(2t + \frac{\pi}{3})$ ;
2. $s(t) = 5\cos(3t + \frac{\pi}{4})$ ;
3. $s(t) = -3\sin(3t + \frac{\pi}{4})$.

□

T.31

**Théorème 10** ($a\cos(\omega t)-b\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)$). *Soient $a,b\in\mathbb{R}$. Alors $a\cos(\omega t)-b\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ avec $A=\sqrt{a^2+b^2}$ et*

- *si $a>0$, $\varphi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (à $2\pi$ près) ;*
- *si $a<0$, $\varphi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi$ (à $2\pi$ près).*
- *si $a=0$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ si $b>0$ et $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ si $b<0$*

➔ EXERCICE 25. $a\cos(\omega t)-b\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ :
Soit $s(t)=\cos(t)-\sin(t)$.

- Montrer que $s(t)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(t)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(t)\right)$;
- En déduire que $s(t)=\sqrt{2}\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$;
- Montrer que l'on retrouve bien les valeurs données par les formules du théorème précédent.

□

T.32

➔ EXERCICE 26. $a\cos(\omega t)-b\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ :
Soit $s(t)=2\cos(2t)-3\sin(2t)$. On cherche à écrire $s(t)$ sous la forme $s(t)=A\cos(2t+\varphi)$.

1. Montrer que $A\cos(\varphi)=2$ et $A\sin(\varphi)=3$ ;
2. En déduire que $A^2=13$, et que $\tan(\varphi)=\frac{3}{2}$ ;
3. En déduire que $\cos(\varphi)=\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin(\varphi)=\frac{3}{\sqrt{13}}$ ;
4. En déduire que $\varphi\in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ ;
5. En déduire que $\varphi=\arctan(\frac{3}{2})$, à $2\pi$ près.

□

T.33

➔ EXERCICE 27. $a\cos(\omega t)-b\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ :
Soit $s(t)=-3\cos(2t)+4\sin(2t)$. On cherche à écrire $s(t)$ sous la forme $s(t)=A\cos(2t+\varphi)$.

1. Montrer que $A\cos(\varphi)=-3$ et $A\sin(\varphi)=-4$ ;
2. En déduire que $A^2=25$, et que $\tan(\varphi)=\frac{4}{3}$ ;
3. En déduire que $\cos(\varphi)=-\frac{3}{5}$ et $\sin(\varphi)=-\frac{4}{5}$ ;
4. En déduire que $\varphi\in]-\pi;-\frac{\pi}{2}[$ ;
5. En déduire que $\varphi=\pi+\arctan(\frac{4}{3})$, à $2\pi$ près.

□

T.34

# 2 Fonctions puissances, logarithmes et exponentielles

## 2.1 Logarithmes

### 2.1.1 Logarithme népérien

**Définition 11** (Logarithme népérien)**.** Le **logarithme népérien** représente la valeur de la surface se trouvant entre le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et l'axe des abscisses, entre les points d'abscisse 1 et $x \geq 1$. Si $0 < x < 1$, la surface correspondante est comptée négativement. On la note $x \mapsto \ln(x)$, ses domaines sont : $D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$, $I_{\ln} = \mathbb{R}$.

**Valeurs particulières** : $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ (avec $e \approx 2{,}718$ le nombre d'Euler), $\ln(2) \approx 0{,}693$.

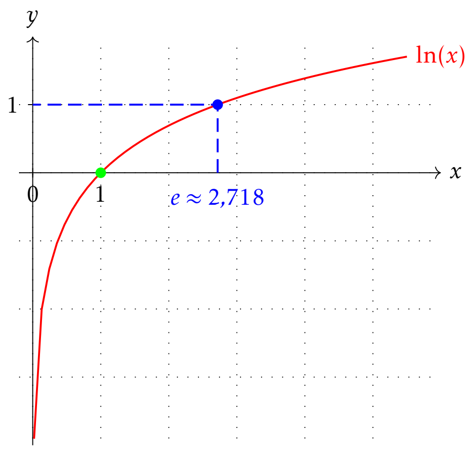


FIGURE 4 – Graphe du logarithme népérien.

T.36

**EXERCICE 28.** *Surface située sous la courbe $y = \frac{1}{x}$ et propriétés :*

1. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $0 < x \leq 4$. On fera figurer les positions des points de la courbe d'abscisses $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 et 4 ;
2. Hachurez la surface d'aire $\mathcal{A}_1 = \ln(2)$ située entre ce graphe et l'axe des abscisses ;
3. Hachurez la surface d'aire $\mathcal{A}_2$ située entre ce graphe et l'axe des abscisses, pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ;
4. Que peut-on dire de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ ? En déduire que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ ;
5. Que peut-on dire de $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$ avec un raisonnement analogue ?
6. Calculer $\ln(1)$ ;
7. Vers quoi tend $\ln(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ?
8. Vers quoi tend $\ln(x)$ quand $x > 0$ tend vers 0 ?

□

T.37

**Théorème 12** (Propriétés de calcul)**.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.*

- $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^y) = y\ln(x)$

**Attention**
Soient $x,y \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\ln(x+y) \neq \ln(x) + \ln(y)$
- $\dfrac{1}{\ln(x)} \neq -\ln(x)$

T.38

EXERCICE 29. *Propriétés de* $\ln(x)$ :
Démontrer les égalités suivantes :

1 $\ln(18) - \ln(6) = \ln(3)$
2 $\ln(32) + \ln(16) = 9\ln(2)$
3 $2\ln(7) - \ln(98) = -\ln(2)$
4 $\ln(56) - \ln(8) = \ln(7)$

□

EXERCICE 30. *Propriétés de* $\ln(x)$ :
Sachant que $\ln(2) \approx 0{,}69$ et $\ln(3) \approx 1{,}10$ à $10^{-2}$ près, donner la valeur à $10^{-1}$ près des constantes suivantes (sans calculatrice!) :

1 $\ln(4)$ 2 $\ln(6)$ 3 $\ln(\frac{1}{2})$ 4 $\ln(\frac{9}{4})$ 5 $\ln(18)$

□

T.39

### 2.1.2 Logarithmes à base $a$

**Définition 13** (Logarithme à base $a$)**.** Le logarithme à base $a$ (avec $a > 0$) est la fonction définie par : $x \mapsto \log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

**Propriétés**

- Mêmes domaines que ln : $D = \mathbb{R}_+^*$, $I = \mathbb{R}$
- Valeurs particulières : $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(a^n) = n$
- Mêmes propriétés de calcul que ln
- Même allure graphique que ln avec une courbe « écrasée » d'un facteur $\dfrac{1}{\ln(a)}$ suivant l'axe des ordonnées

*Exemple* 14 ($\log_2(x)$ et $\log_{10}(x)$). $\log_2(2^n) = n$ et $\log_{10}(10^n) = n$.

T.40

**Définition 15** (Logarithme à base 10)**.** Le logarithme à base 10 est la fonction définie par : $x \mapsto \log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

**Propriétés**

- Mêmes domaines que ln : $D = \mathbb{R}_+^*$, $I = \mathbb{R}$
- Valeurs particulières : $\log_{10}(1) = 0$, $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(10^n) = n$
- Mêmes propriétés de calcul que ln
- Même allure graphique que ln avec une courbe « écrasée » d'un facteur $\dfrac{1}{\ln(10)}$ suivant l'axe des ordonnées

**Remarque** : $\log_{10}$ est utilisé pour définir l'**échelle logarithmique**, qui permet de représenter sur un même graphique des nombres dont les ordres de grandeurs sont très différents : il amplifie les variations proches de 0 et atténue les grandes variations.

T.41

### 2.1.3 Les décibels

**Définition 16** (Décibels (dB))**.** Pour exprimer un rapport de puissance $G = P_1/P_2$ (gain $G$ ou atténuation $A$), on a souvent recours à une échelle logarithmique, le décibel (dB) :

$$G_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}(G) = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

**Propriétés**

- Un doublement de puissance correspond à un gain d'environ 3 dB : $10\log_{10}(2G) \approx 3+10\log_{10}(G) = 3 + G_{\mathrm{dB}}$ ;
- Une multiplication d'un facteur 10 correspond à un gain de 10 dB : $10\log_{10}(10G) = 10+10\log_{10}(G) = 10 + G_{\mathrm{dB}}$ ;
- Une perte de puissance d'un facteur 2 correspond à une atténuation d'environ 3 dB : $10\log_{10}(G/2) \approx -3 + 10\log_{10}(G) = -3 + G_{\mathrm{dB}}$ ;
- Une perte de puissance d'un facteur 10 correspond à une atténuation de 10 dB : $10\log_{10}(G/10) = -10 + 10\log_{10}(G) = -10 + G_{\mathrm{dB}}$.

T.42

➔ Exercice 31. *Décibels* : Compléter les tableaux suivants, sans calculatrice, en utilisant les propriétés des décibels.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gain | | 20 | | | | 200 | 0,5 |
| gain en dB | 10 dB | | -7 dB | -10 dB | 0 dB | | |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| gain | | 40 | | | | 50 | 0,1 |
| gain en dB | 20 dB | | 13 dB | 10 dB | 3 dB | | |

T.43

**Définition 17** (Le dBm et le dBW)**.** Pour $P$ une puissance en Watts, on définit :

- $P_{\mathrm{dBm}} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{1\,\mathrm{mW}}\right)$ ;
- $P_{\mathrm{dBW}} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{1\,\mathrm{W}}\right) = P_{\mathrm{dBm}} - 30dB$.

**Remarques**

- Ces unités sont sans dimension ;
- leurs propriétés sont dérivées de celles du décibel.

T.44

➔ Exercice 32. *dBm et dBW* : Compléter les tableaux suivants, sans calculatrice, en utilisant les propriétés des décibels.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| puissance | | 20 W | | | |
| puissance en dBm | 10 dBm | | | | 0 dBm |
| puissance en dBW | | | -7 dBW | -10 dBW | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| puissance | | 40 W | | | |
| puissance en dBm | 20 dBm | | 13 dBm | 10 dBm | |
| puissance en dBW | | | | | 3 dBW |

T.45

**Rappel : loi d'Ohm**
La puissance $P$ dissipée par une résistance $R$ traversée par un courant d'intensité $I$ et de tension $U$ vaut : $P = UI = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$

**Décibels en fonction de la tension**
Pour $P_1 = \frac{U_1^2}{R}$ et $P_2 = \frac{U_2^2}{R}$ on obtient $\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2}$ et $\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left(\dfrac{U_1}{U_2}\right)$

**Définition 18** (Le dBV et le dB$\mu$V)**.** Pour $U$ une tension en Volts, on définit :

- $U_{\text{dBV}} = 20\log_{10}\left(\frac{U}{1\text{ V}}\right)$ ;
- $U_{\text{dB}\mu\text{V}} = 20\log_{10}\left(\frac{U}{1\ \mu\text{V}}\right) = U_{\text{dBV}} + 120dB.$

T.46

➔ Exercice 33. *dB$\mu$V et dBV* : Compléter les tableaux suivants, sans calculatrice, en utilisant les propriétés des décibels.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| tension | | 20 V | | | |
| tension en dB$\mu$V | 10 dB$\mu$V | | | | 0 dB$\mu$V |
| tension en dBV | | | -6 dBV | -10 dBV | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| tension | | 40 V | | | |
| tension en dB$\mu$V | 20 dB$\mu$V | | 14 dB$\mu$V | 10 dB$\mu$V | |
| tension en dBV | | | | | 6 dBV |

T.47

## 2.2 Exponentielles

### 2.2.1 Fonction exponentielle

**Définition 19** (Exponentielle)**.** L'exponentielle est la fonction réciproque de ln définie par $x \mapsto \exp(x) = e^x$. Ses domaines sont : $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $I_{\exp} = \mathbb{R}_+^*$. Son graphe est donné figure 5.

**Valeurs particulières** : $e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2{,}718$ avec $e$ le nombre d'Euler.

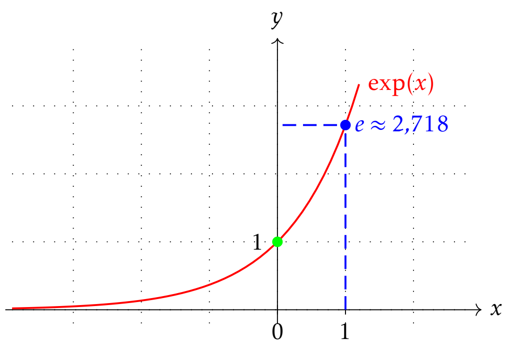


Figure 5 – Graphe de la fonction exponentielle.

**Remarque** : Deux fonctions réciproques s'entendent comme deux fonctions qui inversent les relations entre antécédent et image : dans le cas de ln et exp, $x = \ln(y)$ est équivalent à $y = \exp(x)$ sous réserve que $x$ et $y$ soient choisis dans les ensembles de définition et les ensembles images des deux fonctions. T.48

**Théorème 20** (Propriétés de calcul)**.** *Soient $x,y \in \mathbb{R}$.*

- $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$
- $\exp(x \cdot y) = (\exp(x))^y = (\exp(y))^x$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

**Attention**

Soient $x,y \in \mathbb{R}$. $\exp(x) + \exp(y) \neq \exp(x+y)$

T.49

Exercice 34. *Propriétés de l'exponentielle :* Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifiez les expressions suivantes :

1. $s(t) = (\exp(t))^2 + 1 - e^{2t}$
2. $A = \sqrt{e}\exp(-\frac{1}{2})$
3. $B = (e^2 - e)\exp(-1)$
4. $s(t) = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \exp(2t) - \exp(-2t)$

□

Exercice 35. *Résolution d'équations :* Résolvez les équations suivantes où $t$ est l'inconnue réelle à déterminer :

1. $\exp(2t+1) = 2$
2. $7\exp(3t-1) + 2 = 0$
3. $\exp(2t) - 2\exp(t) + 1 = 0$
4. $\exp(t) - 2\exp(-t) + 1 = 0$

□

T.50

**Définition 21** (Exponentielle à base $a$)**.** Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. L'exponentielle à base $a \neq 1$ est la fonction définie par $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$. Des exemples de graphes pour différentes valeurs de $a$ sont donnés figure 6.

**Propriétés**

- Mêmes domaines que l'exponentielle
- Propriétés de calculs mathématiques déduites de celles de exp et de ln (cf. théorème 12 et 20)

**Cas particuliers**

- Lorsque $a = 1$, on retrouve la fonction constante $x \mapsto 1$ ;
- pour $a = 2$, on obtient $x \mapsto 2^x$ ;
- pour $a = 10$, on obtient $x \mapsto 10^x$.

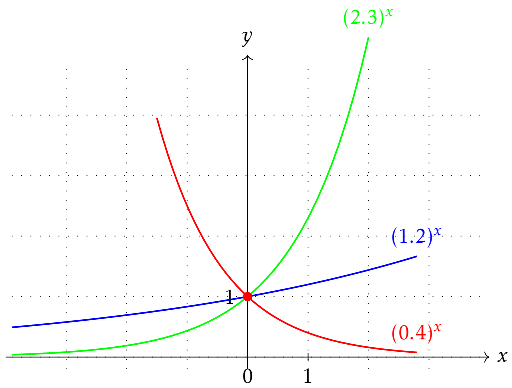


Figure 6 – Graphe de quelques expontielles à base $a$.

T.51

**Exercice 36.** *Propriétés de l'exponentielle de base $a$ :* Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifiez les expressions suivantes :

1 $s(t) = 2^t \exp(2t\ln(2)) - 8^t$

2 $A = \sqrt{2}\exp(-\frac{1}{2}\ln(2))$

3 $B = 10^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{3}{2}\ln(10)\right)$

4 $s(t) = \left(\frac{2^t - 2^{-t}}{2}\right)^2 - \exp(2t\ln(2)) - \frac{1}{2^{2t}}$

□

**Exercice 37.** *Résolution d'équations :* Résolvez les équations suivantes où $t$ est l'inconnue réelle à déterminer :

1 $10^{2t-1} = 2$

2 $7 \cdot 2^{5t-1} + 1 = 0$

3 $10^{2t} + 2 \cdot 10^t + 3 = 0$

4 $2^t - 2^{-t} + 1 = 0$

□

T.52

## 2.3 Monômes de puissances réelles

**Définition 22** (Monômes de puissances réelles)**.** Les monômes de puissances réelles généralisent les monômes $x^n$ (où $n \in \mathbb{N}$) à des $n$ dans $\mathbb{R}$. Ils sont définis par : $x \mapsto x^\alpha = \exp\big(\alpha\ln(x)\big) = e^{\alpha\ln(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, sur les domaines : $D = \mathbb{R}_+^*$, $I = \mathbb{R}_+^*$. Des exemples de graphes pour différentes valeurs de $\alpha$ sont donnés figure 7.

**Propriétés**

Propriétés de calculs mathématiques déduites de celles de exp et de ln (cf. théorème 12, et 20)

**Cas particuliers**

- Lorsque $\alpha = 0$, la fonction est constante $x \mapsto 1$
- Lorsque $\alpha = 1$, la fonction est l'identité $x \mapsto x$

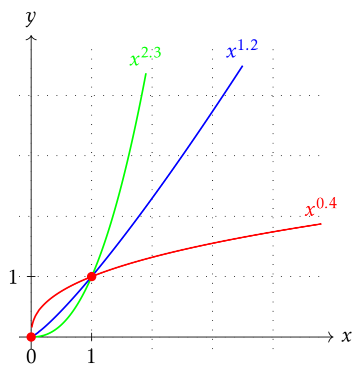


Figure 7 – Graphe de quelques puissances réelles.

T.53

## 2.4 Racines n-ièmes

**Définition 23** (Racines n-ièmes)**.** Les **racines n-ièmes** sont les fonctions définies par $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$f(x)$ est le réel $y$ tel que $y^n = x$ ; dans $\mathbb{R}$, ce nombre est unique et peut être négatif lorsque $n$ est impair ! Si $n$ est pair, on impose en plus que $x \geq 0$ pour obtenir une définition unique.

Leurs graphes sont donnés figure 8. Leurs domaines sont :

| si $n$ est : | pair | impair |
|---|---|---|
| $D_f$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}$ |
| $I_f$ | $\mathbb{R}^+$ | $\mathbb{R}$ |

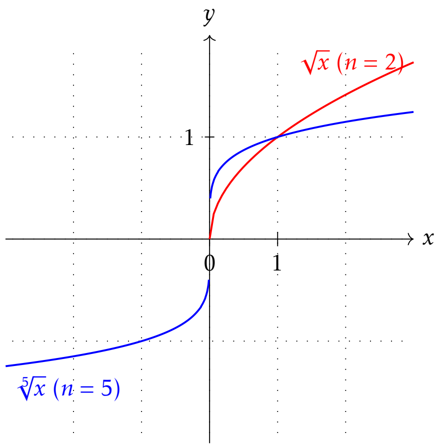


FIGURE 8 – Graphe des fonctions racines n-ièmes.

T.54

**Théorème 24** (Manipulation des **exposants** et des **opérandes**). *Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^*_+$.*

- $\sqrt[n\cdot m]{x} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{x}\right)} = x^{\frac{1}{n\cdot m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[\frac{n}{m}]{x} = \sqrt[n]{(x^m)} = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{(x\cdot y)} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = (x\cdot y)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}\cdot y^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

T.55

**Attention à ne pas inventer des propriétés !**

Soient $x,y \in \mathbb{R}^+$, alors :

- $\sqrt[n+m]{x} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[m]{x}$ $\qquad x^{\frac{1}{n+m}} \neq x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{m}}$
- $\sqrt[n]{(x+y)} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ $\qquad (x+y)^{\frac{1}{n}} \neq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$

T.56

**EXERCICE 38.** *Racines et puissances fractionnaires* :

Démontrer les égalités suivantes :

**1** $\sqrt{27} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ **2** $\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$ **3** $2\sqrt[9]{2^6} + 2^{\frac{5}{3}} = 4\sqrt[3]{4}$

□

T.57

# 3 Les nombres complexes

## 3.1 Un peu d'histoire

- école italienne (Cardan, Bombelli), autour de 1570;
- introduits pour résoudre les équations du troisième degré $x^3 + px + q = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

*Exemple* 25 (Équation $x^3 - x = 0$ (avec $p = -1$ et $q = 0$)). Solution évidente : 0, pourtant la formule précédente ne marche pas : $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -1/27 < 0$, mais si on admet l'existence de $\sqrt{-1}$, on retrouve bien $x = 0$ :

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{-1}{27}}}$$

T.59

## 3.2 Algèbre des nombres complexes

### 3.2.1 Définition de l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$

**Définition 26** (Ensemble des complexes $\mathbb{C}$)**.** On appelle nombre complexe, ou simplement complexe, tout nombre $z$ qui s'écrit sous la forme $z = x + jy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et où $j$ est un nombre (dit imaginaire) vérifiant la relation $j^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, il est muni de deux **lois de composition internes** (notées + et $\times$) définies, pour tout $z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C}$, par :

- loi d'**addition** sur $\mathbb{C}$ : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$;
- loi de **multiplication** sur $\mathbb{C}$ : $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$. En particulier, on retrouve $j^2 = j \times j = -1$.

T.60

**Définition 27** (Partie réelle, imaginaire et notation cartésienne)**.**

- $x$ est appelé **partie réelle** et on note $x = \mathrm{Re}\{z\}$;
- $y$ est appelé **partie imaginaire** et on note $y = \mathrm{Im}\{z\}$;
- la notation $x + jy$ est appelée la **notation cartésienne** du nombre complexe $z$.

T.61

➔ Exercice 39. *Calcul sur les complexes* :
Calculer les nombres complexes suivants :

| | | |
|---|---|---|
| 1 $z = (1 + j) + (3 - j)$ | 2 $z = (-3 + j) - (4 - 3j)$ | 3 $z = (2 - j) + (-3 - 9j)$ |
| 4 $z = (-2 - 3j)(1 - j)$ | 5 $z = (1 + j)(-1 - j)$ | 6 $z = (5 + 3j)(5 - 3j)$ |

□

**Remarques**

- les réels sont des cas particuliers des complexes, puisque ce sont les nombres de la forme $x + 0 \times j$. De fait $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- les nombres complexes de la forme $jy$ avec $y$ quelconque sont appelés des **imaginaires purs**;
- on note aussi souvent $i$ plutôt que $j$. Mais pour éviter la confusion avec la lettre désignant l'intensité en électricité, nous préférerons utiliser $j$.

T.62

### 3.2.2 $\mathbb{C}$, un corps commutatif

**Propriété 28** (Addition dans $\mathbb{C}$)**.** *Soient $z = x + jy, z_1, z_2$ et $z_3$ quatre complexes. L'addition :*

1. *est **commutative** : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ;*
2. *est **associative** : $\left(z_1 + z_2\right) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right)$ ;*
3. *possède un (unique) **élément neutre** $0$ ;*
4. *définit l'(unique) **opposé** de $z = x + jy$ comme étant le complexe $-z = -x - jy$.*

**Remarques** : soient $z_1$ et $z_2$ deux complexes, alors

- on dit que $z_1$ est un élément neutre de l'addition si pour tout complexe $z$, on a $z_1 + z = z$ ;
- on dit que $z_2$ est un opposé du complexe $z$ lorsque $z_2 + z = z_1$ où $z_1$ est l'élément neutre de la loi d'addition (c'est-à-dire $z_1 = 0$).

T.63

**Propriété 29** (Multiplication dans $\mathbb{C}$)**.** *Soient $z = x + jy, z_1, z_2$ et $z_3$ quatre complexes. La multiplication :*

1. *est **commutative** : $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ ;*
2. *est **associative** : $\left(z_1 \times z_2\right) \times z_3 = z_1 \times \left(z_2 \times z_3\right)$ ;*
3. *possède un (unique) **élément neutre** qui est égal à $1$ ;*
4. *définit l'**inverse** de $z = x + jy \neq 0$ comme étant le complexe $\dfrac{x}{x^2 + y^2} - j\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ ;*
5. *est **distributive sur l'addition** : $z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$.*

**Remarques** :

- toutes ces propriétés font de $\mathbb{C}$ un **corps commutatif** ;
- on dit que $z_1$ est l'inverse du complexe $z$ lorsque $z_1 \times z = 1$ où $1$ est l'élément neutre de la loi de multiplication.

T.64

**Exercice 40.** *Inverse* :
Calculer l'inverse des nombres complexes suivants :
**1** $z = 4 - j$ **2** $z = -3 + j$ **3** $z = -3 - 9j$ **4** $z = 3 + 4j$ ☐

**Exercice 41.** *Division* :
Calculer les nombres complexes suivants :
**1** $z = \frac{1+j}{-1-j}$ **2** $z = \frac{2+3j}{-2-3j}$ **3** $z = \frac{2+3j}{1+j}$ **4** $z = \frac{-2-3j}{1-j}$ ☐

T.65

### 3.2.3 $\mathbb{C}$, un EV sur $\mathbb{R}$ de dimension 2

**Propriété 30** (Structure d'EV de $\mathbb{C}$)**.** *Soient $z = x + jy \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la **multiplication externe** « $\cdot$ » d'un complexe par un réel par : $\lambda \cdot z = (\lambda x) + j(\lambda y)$. Alors, $\mathbb{C}$ muni de la loi d'addition précédemment définie et de cette loi de multiplication externe est un EV de dimension 2 et de base canonique $(1, j)$.*

**Notation complexe et vecteur**
Ainsi, un nombre complexe apparaît comme un vecteur à 2 dimensions : $z = x + jy$ peut-être vu comme le vecteur $\vec{u} = (x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

T.66

**Remarques** :

- on utilise souvent la même notation pour la multiplication interne « $\times$ » et la multiplication externe « $\cdot$ », voire pas de symbole du tout. Le contexte permet de savoir de quelle multiplication il s'agit ;
- un nombre réel pouvant être vu comme un nombre complexe particulier, la multiplication externe peut aussi être vue comme une multiplication interne particulière.

**Propriété 31** (Égalité de deux complexes)**.** *Soient $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ deux complexes. Alors :*

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [x_1 = x_2 \text{ \underline{et} } y_1 = y_2]$

- $z_1 = 0 \Leftrightarrow [x_1 = 0 \text{ } \underline{et} \text{ } y_1 = 0]$

T.67 Soit $z = x + jy$ un complexe. Puisque $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (cf. figure 9) :

- **Interprétation affine** : on peut définir le point $M(z)$ du plan avec $z$ l'**affixe** du point $M$ comme le point de **coordonnées cartésiennes** $(x,y)$ ;
- **Interprétation vectorielle** : on peut définir le vecteur $\vec{u}(z)$ du plan avec $z$ l'**affixe** du vecteur comme le vecteur reliant l'origine O au point de coordonnées $(x,y)$.

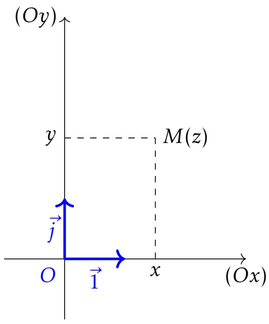


FIGURE 9 – Coordonnées cartésiennes $(x,y)$ d'un point $M$ du plan.

T.68

### 3.2.4 Conjugué d'un nombre complexe

**Définition 32** (Conjugué). Le **conjugué** du complexe $z = x + jy$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ ou $z^*$ défini par $\overline{z} = z^* = x - jy$. L'opération effectuée s'appelle la conjugaison.

**Propriété 33** (Conjugaison). *Soient $z = x + jy$, $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ trois nombres complexes. Alors :*

1. $x = \mathrm{Re}\{z\} = \mathrm{Re}\{z^*\} = \dfrac{z + z^*}{2}$ *et* $y = \mathrm{Im}\{z\} = -\mathrm{Im}\{z^*\} = \dfrac{z - z^*}{2j}$
2. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
3. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
4. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

T.69

EXERCICE 42. *Conjugaison* : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1 $z = 4 - j$ 2 $z = -3 + j$ 3 $z = -3 - 9j$ 4 $z = 3 + 4j$ ☐

EXERCICE 43. *Conjugaison et opérations* : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1 $z = (1 + j) + (3 + j)$ 2 $z = (3 + j) - (4 - 3j)$ 3 $z = (2 + j) + (-3 - 9j)$
4 $z = (-2 - 3j)(1 - 2j)$ 5 $z = (2 + j)(-2 - j)$ 6 $z = (2 + 3j)(5 - 2j)$ ☐

T.70

## 3.3 Forme polaire d'un nombre complexe

### 3.3.1 Coordonnées polaires

Soit $z = x + jy$ un complexe. Le point $M(z)$ du plan ou le vecteur $\overrightarrow{OM}(z) = \vec{u}(z)$ du plan peuvent être repérés par leurs coordonnées polaires (cf. figure 10) :

- distance à l'origine : $r = \|\overrightarrow{OM}\| = \|\vec{u}\|$ ; $r$ **est appelé le module de** $z$ **et noté** $r = |z|$.
- angle polaire : $\theta = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \vec{u}})$ ; $\theta$ **est appelé l'argument de** $z$ **et noté** $\theta = \arg(z)$.

**Conclusion** : Le couple module/angle $(r,\theta)$ de $z$ peut aussi servir à repérer $M$ (ou $\vec{u}$) dans le plan au même titre que les coordonnées cartésiennes. Il forme les **coordonnées polaires** de $M(z)$. T.71

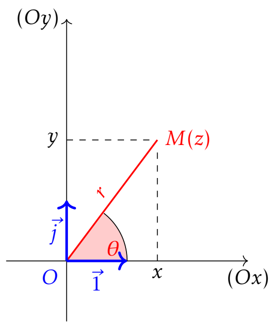


Figure 10 – Coordonnées cartésiennes $(x,y)$ et polaires $(r,\theta)$ d'un point $M$ du plan.

**Définition 34** (Module et argument d'un nombre complexe)**.** Soit $z = x + jy$ un complexe. Alors il existe un unique $r = |z| > 0$ appelé module de $z$ et un unique $\theta = \arg(z) \in ]-\pi, \pi]$ appelé argument de $z$ tels que $z = r\cos\theta + jr\sin\theta$ et

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- $x = r\cos(\theta)$ ;
- $y = r\sin(\theta)$.

**Remarque** : lorsque $z$ est un réel, le module est la valeur absolue, définie pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, par

T.72 $|x| = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$

**Arguments remarquables**

- si $z \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\arg\{z\} = 0$ ;
- si $z \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg\{z\} = \pi$ ;
- si $z = jy$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\arg\{z\} = \frac{\pi}{2}$ ;
- si $z = jy$ avec $y \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg\{z\} = -\frac{\pi}{2}$.

T.73

Exercice 44. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

1 $z = 1 + j$ 2 $z = 1 - j$ 3 $z = 2 + 3j$ 4 $z = -2 - 3j$

□

Exercice 45. *Donner la forme cartésienne des complexes dont le module et l'argument sont :*

1 $(1; \frac{\pi}{4})$ 2 $(\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3})$ 3 $(7;0)$ 4 $(5;\pi)$ 5 $(3; \frac{\pi}{2})$

□

T.74

**Propriété 35** (Module)**.** *Soient $z = x + jy$, $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ trois nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :*

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ *et* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ;
2. *Inégalité triangulaire :* $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
3. $zz^* = |z|^2$ ;
4. $\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}$ ;
5. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$ ;
6. $|z^n| = |z|^n$.

T.75

Exercice 46. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

**1** $z = \frac{1+j}{-1-j}$ **2** $z = \frac{2+3j}{-2-3j}$ **3** $z = \frac{2+3j}{1+j}$
**4** $z = (1+j)(-1-j)$ **5** $z = (5+3j)(5-3j)$ **6** $z = (2+3j)(1+j)$
**7** $z = (1+j)^2$ **8** $z = (2+3j)^{-4}$ **9** $z = \frac{1}{-2-3j}$

☐

➔ EXERCICE 47. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*
**1** $z = \frac{1}{3+j}$ **2** $z = \frac{1}{-3+j}$ **3** $z = \frac{1}{-2-2j}$ **4** $z = \frac{1}{1+4j}$

☐

➔ EXERCICE 48. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*
**1** $z = \frac{1+j}{-2-j}$ **2** $z = \frac{2+3j}{-2-2j}$ **3** $z = \frac{2+3j}{2+j}$ **4** $z = \frac{-2-j}{1-j}$

☐

T.76

**Propriété 36** (Argument)**.** *Soient $z = x + jy$, $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ trois nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :*

1. $\arg\{z_1 z_2\} \equiv \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\} \pmod{2\pi}$;
2. $\arg\{z_1/z_2\} \equiv \arg\{z\} - \arg\{z_2\} \pmod{2\pi}$;
3. $\arg\{1/z\} \equiv -\arg\{z\} \pmod{2\pi}$;
4. $\arg\{z^*\} \equiv -\arg\{z\} \pmod{2\pi}$;
5. $\arg\{z^n\} \equiv n\arg\{z\} \pmod{2\pi}$;

T.77

➔ EXERCICE 49. *Propriétés de l'argument :* Soient $z_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + j$. Sachant que $\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$, donner le module et l'argument des complexes suivants :
**1** $z_1$ **2** $z_2$ **3** $z_1^*$ **4** $z_2^*$ **5** $1/z_1$ **6** $z_1 z_2$
**7** $z_2^2$ **8** $z_1^*/z_2$ **9** $z_1^4$ **10** $z_2^3$ **11** $z_1^{-4}$ **12** $jz_1$

☐

T.78

Soient :

- $z_1$ de module $r$ et d'angle $\theta$
- $z_2$ de module $r$ et d'angle $\theta + 2\pi$ (360°)

$z_1$ et $z_2$ définissent exactement le même point $M$ du plan 2D (cf. figure 11). Donc $z_1 = z_2$.

**Propriété 37** (Égalité de deux complexes)**.** *Soient $z_1$ et $z_2$ deux complexes de module respectif $r_1$ et $r_2$ et d'angle avec $(0,x)$ respectif $\theta_1$ et $\theta_2$. Alors : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}]$. Dire que $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ signifie qu'il existe une valeur $k \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.*

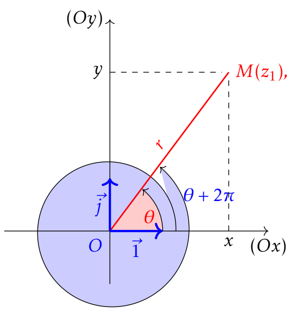


FIGURE 11 – De l'unicité de l'argument.

Pour définir un complexe $z$ (et donc un point $M$) de **manière unique** à l'aide d'un couple module/angle $(r,\theta)$, il faut donc lever toutes ambiguïtés sur l'angle : c'est l'objectif de l'**argument** de $z$ qui fournit une valeur d'angle limitée à $]-\pi;\pi]$. T.79

**Définition 38** (Argument d'un complexe non nul)**.** Soit $z = x + jy$ un complexe non nul. Alors : $\exists! \theta \in ]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z|(\cos\theta + j\sin\theta)$. Ce nombre (réel), noté $\arg\{z\}$, est appelé **argument** de $z$. Il est tel que $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$ avec :

- si $x > 0$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
- si $x < 0$ et $y \geq 0$, $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
- si $x < 0$ et $y < 0$, $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$
- si $x = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $y > 0$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ si $y < 0$

**Remarque** : $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ et $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ désignent le même angle, à $2\pi$ près. Par commodité, on
T.80 pourra alors simplement utiliser $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ lorsque $x < 0$ sans se préoccuper du signe de $y$.

### 3.3.2 Notation exponentielle d'un nombre complexe

**Définition 39** (Notation exponentielle d'un complexe)**.** Soit $z = x + jy$ un complexe de module $r$ et d'(unique) argument $\theta$. Alors $z$ se note sous la **forme exponentielle** $z = re^{j\theta}$. Toutes les propriétés des exponentielles réelles restent vraies dans $\mathbb{C}$ et sont analogues aux propriétés des puissances.

**Remarque** : Pour faciliter les calculs, on utilise souvent la notation $re^{j\theta}$ même lorsque $\theta \notin ]-\pi; \pi]$.

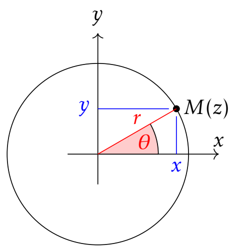


FIGURE 12 – Coordonnées cartésiennes $(x,y)$ et polaires $(r,\theta)$ d'un point $M$ du plan.

T.81

**Propriété 40** (Identification du module et de l'argument)**.** *Si $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in ]-\pi, \pi]$, et $z = re^{j\theta}$, alors*

- $|z| = r$ ;
- $\arg\{z\} = \theta$.

**Propriété 41** (Quelques complexes remarquables)**.**

- *$e^{j\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \pmod{2\pi}$ ;*
- $e^{j0} = 1$, $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$, $e^{j\pi} = -1$, $e^{j2\pi} = 1$ ;
- $re^{j0} = r$, $re^{j\frac{\pi}{2}} = jr$, $re^{-j\frac{\pi}{2}} = -jr$, $re^{j\pi} = -r$, $re^{j2\pi} = r$.

T.82

➔ EXERCICE 50. *Forme polaire* : Soit $z = 2 - j$.

1. Représenter $z$ graphiquement ;
2. Donner la forme polaire de $z$.

Mêmes questions pour $z = -5 + 3j$. □

T.83

➔ EXERCICE 51. *Module et argument* : Déterminer le module et l'argument (en degrés et en radians) des nombres complexes suivants, et représentez-les graphiquement :

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** $z_1 = -1 - j$ | **2** $z_2 = 3 - j$ | **3** $z_3 = -2 + 4j$ | **4** $z_4 = \sqrt{3} + j$ |
| **5** $z_5 = -2 + j\sqrt{12}$ | **6** $z_6 = -4 + 4j$ | **7** $z_7 = 3 - 3j$ | **8** $z_8 = \dfrac{z_1}{z_2}$ |
| **9** $z_9 = \dfrac{z_1}{z_3}$ | **10** $z_{10} = \dfrac{z_2}{z_4}$ | | |

**Éléments de réponse** : $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg(z_1) = -135° = -\frac{3\pi}{4}$ ; $|z_2| = \sqrt{10}$, $\arg(z_2) = -\frac{180}{\pi}\arctan(\frac{1}{3})° = -\arctan(\frac{1}{3})$ ; $|z_3| = 2\sqrt{5}$, $\arg(z_3) = 180 - \frac{180}{\pi}\arctan(2)° = \pi - \arctan(2)$

□

T.84

**Exercice 52.** *Notation exponentielle* : Déterminer la notation exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_8 = (-j)^{18}$
2. $z_9 = (1+j)^{-23}$
3. $z_{10} = (-\sqrt{3}+j)^{51}$
4. $z_{11} = \dfrac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$
5. $z_{12} = 1 + \cos\varphi + j\sin\varphi$
6. $z_{13} = (1 + j\tan\varphi)^2$

□

T.85

**Exercice 53.** *Module et argument* : Déterminer le module et l'argument du complexe $z$ tel que $z = (1+j)^n + (1-j)^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

□

**Exercice 54.** *Module et argument* : Soit $z = e^{j\theta}$. Déterminer le module et l'argument du complexe $Z$ défini par : $Z = z^2 + z$.

□

T.86

## 3.4 Application à la géométrie : transformations du plan et lieu géométrique

### 3.4.1 Transformations du plan

**Théorème 42** (Translation). *Soit $z_1$ (respectivement $z_2$) l'affixe du vecteur $\vec{u_1}$ (respectivement $\vec{u_2}$) et du point $M_1$ (respectivement $M_2$) du plan. Alors (cf. figure 13) :*

- *Le vecteur $\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ est d'affixe $z = z_1 + z_2$ ;*
- *Le point $M$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ est d'affixe $z = z_1 + z_2$ ;*
- *Plus généralement le point $A(a)$, translaté du point $B(b)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(u)$, est d'affixe $a = b + u$ ;*

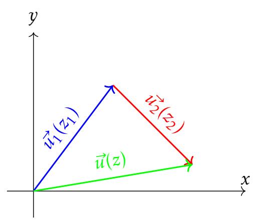


Figure 13 – Translation dans le plan.

T.87

**Théorème 43** (Symétries). *Soit $z$ un complexe, affixe du point $M$. Alors (cf. figure 14) :*

- *Le point $M'(z')$, symétrique de $M$ par rapport à l'axe des abscisses $(O,x)$, est d'affixe $z' = z^*$ ;*
- *Le point $M''(z'')$, symétrique de $M$ par rapport à l'origine, est d'affixe $z'' = -z$.*

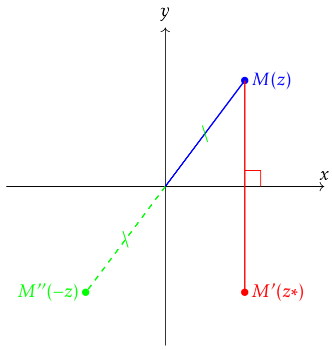


FIGURE 14 – Symétries dans le plan.

T.88

**Théorème 44** (Rotations). *Soit $B$ le point du plan d'affixe $b = x_b + jy_b = r_b \exp(j\theta_b)$.*

- *La rotation de centre 0 et d'angle $\theta$ transforme le point $B$ en le point $B'$ d'affixe $b' = x_{b'} + jy_{b'} = r_b \exp(j(\theta_b + \theta))$ avec $b' = b\exp(j\theta)$, $x_{b'} = x_b \cos(\theta) - y_b \sin(\theta)$ et $y_{b'} = x_b \sin(\theta) + y_b \cos(\theta)$. Cette transformation est illustrée figure 15.*
- *La rotation de centre $A(a)$ et d'angle $\theta$ transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}(b-a)$ en le vecteur $\overrightarrow{AB'}(b'-a)$ avec $b' - a = (b-a).\exp(j\theta))$, autrement dit $b' = a + (b-a)\exp(j\theta)$, $x_{b'} = x_a + (x_b - x_a)\cos(\theta) - (y_b - y_a)\sin(\theta)$ et $y_{b'} = y_a + (x_b - x_a)\sin(\theta) + (y_b - y_a)\cos(\theta)$*

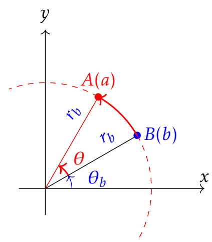


FIGURE 15 – Rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$

T.89

### 3.4.2 Produit scalaire

**Définition 45** (Produit scalaire). Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$. Alors le **produit scalaire de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$**, noté $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, est le nombre réel défini par :

- Définition géométrique : $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos\left(\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}\right)$.
- Définition analytique : $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = x_1x_2 + y_1y_2$ ;
- Définition avec les nombres complexes : $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \mathrm{Re}\{z_1^* z_2\}$.

**Rappels** :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe un réel $\lambda$ non nul tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$;
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

T.90

### 3.4.3 Lieu géométrique

**Définition 46** (Lieu géométrique)**.** Le **lieu géométrique** est l'ensemble des points (ou de manière équivalente leurs affixes complexes) satisfaisant une condition donnée.

*Exemple* 47 (Des lieux géométriques : droites, cercles, disques, ...). Soient $a$, $b$ et $u$ trois nombres complexes. Alors :

1. La droite passant par le point $A(a)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u)$ est d'**équation paramétrique** $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}/z = a + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ;
2. La droite passant par le point $A(a)$ et de vecteur normal $\vec{u}(u)$ est d'équation $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}\{(z-a)^* u\} = 0\}$ ;
3. La droite passant par les points $A(a)$ et $B(b)$ est d'**équation paramétrique** $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}/z = a + \lambda(b-a), \lambda \in \mathbb{R}\}$ ;
4. Le cercle de centre $A(a)$ et de rayon $R$ est : $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C}/|z-a| = R\}$ ;
5. Le disque ouvert de centre $A(a)$ et de rayon $R$ est : $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}/|z-a| < R\}$.

T.91

**Exercice 55.** *Équation de droite* : Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$ :

1. passant par le point $M(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1)$.
2. passant par le point $M(1,2)$ et de vecteur normal $\vec{u}(1,-1)$.
3. passant par les points $M(1,2)$ et $N(-1,1)$.

□

T.92

**Exercice 56.** *Équation de droite* : Déterminer les équations des droites :

1. passant par les points $A(1,2)$ et $B(-1,0)$ ; (solution : $x - y + 1 = 0$) ;
2. passant par $M(1,1)$ et de vecteur normal $\vec{u}(1,2)$ ; (solution : $x + 2y - 3 = 0$)
3. passant par $M(1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2)$ ; (solution : $2x - y - 1 = 0$) ;
4. médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(1,2)$ et $B(-1,0)$ (rappel : la médiatrice de $[AB]$ est la droite orthogonale à la droite $(AB)$ passant par le milieu du segment $[AB]$) ;
5. passant par $A(1,2)$ et perpendiculaire à la droite $(AB)$ avec $B(-1,0)$.

□

T.93

**Exercice 57.** *Équations de droite dans le plan* : Soient $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ deux points du plan et soit $\vec{u}(\alpha,\beta)$ un vecteur. Déterminer l'équation de la droite :

1. passant par $M_1$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ ;
2. passant par $M_1$ et de vecteur normal $\vec{u}$ ;
3. passant par $M_1$ et $M_2$ ;
4. médiatrice du segment $[M_1M_2]$ ;
5. passant par $M_1$ et perpendiculaire à la droite $(M_1M_2)$.

□

T.94

**Exercice 58.** *Droites dans le plan* : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ et soit $P(x_P,y_P)$ un point du plan.

1. À quelle condition $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ?
2. À quelle condition $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles orthogonales ?
3. Quelle est la distance de $P$ à la droite $\mathcal{D}$ ?

□

**Exercice 59.** *Lieu géométrique* : Déterminer l'ensemble des affixes satisfaisant les relations :

1 $\mathrm{Im}(z) > 1$ 2 $\mathrm{Re}(z) \geq \frac{1}{2}$ 3 $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$ 4 $|2z-3| > 3$

☐

T.95

## 3.5 Application à la trigonométrie

**Théorème 48** (Formules d'Euler). *Soit* $\theta \in \mathbb{R}$. *Alors :* $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$

**Exercice 60.** *Linéarisation de* $\sin^2(x)$ :

1. Montrer que $\sin^2(x) = \dfrac{e^{2jx}+e^{-2jx}-2}{-4}$ en utilisant une formule d'Euler ;
2. En déduire que $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

☐

**Exercice 61.** *Linéarisation d'expressions trigonométriques* :
En s'inspirant de l'exercice précédent, linéariser les expressions suivantes :

1 $s_1(t) = \cos^2(t)$
2 $s_2(t) = \cos^3(t)$
3 $s_3(t) = \cos(t)\sin(t)$
4 $s_4(t) = \sin^3(t)$
5 $s_5(t) = \cos^2(t)\sin(t)$
6 $s_6(t) = \cos(t)\sin^2(t)$

☐

T.96

**Théorème 49** (Formule de Moivre). *Soient* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$. *Alors* $(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$

**Exercice 62.** *Factorisation de* $\cos(2x)$ *et* $\sin(2x)$ :

1. Développer l'expression $(\cos(x)+j\sin(x))^2$ ;
2. En déduire que $\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ en utilisant le formule de Moivre.

☐

**Exercice 63.** *Factorisation d'expressions trigonométriques* :
En s'inspirant de l'exercice précédent, factoriser les expressions suivantes :

1 $s_1(t) = \cos(3t)$
2 $s_2(t) = \sin(3t)$
3 $s_3(t) = \cos(4t)$
4 $s_4(t) = \sin(4t)$

☐

T.97

## 3.6 Racines complexes

**Problème**
Soit $z_0 = x_0 + jy_0 = r_0e^{j\theta_0}$ avec $x_0$, $y_0$, $r_0$ et $\theta_0$, la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $z_0 \in \mathbb{C}$, respectivement. On cherche à résoudre l'équation :

$$z^2 = z_0, \textbf{ avec } z \in \mathbb{C}$$

➔ Exercice 64. *Racines carrées complexes* : Calculer les racines carrées complexes des nombres complexes suivants (on donnera la réponse sous forme cartésienne et sous forme exponentielle) :
**1** $z_0 = j$ **2** $z_1 = 1 + j$ **3** $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$ **4** $z_2 = 2\exp(j\frac{\pi}{6})$ ☐

➔ Exercice 65. *Résolution d'équation* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \sqrt{3} + j$, en déduire l'expression exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

☐

T.98

**Théorème 50** (racines complexes d'un polynôme du second degré à coefficients réels)**.** *Soient, $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels, avec $a \neq 0$. si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions complexes conjuguées $x_1 = \frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = x_1^* = \frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

➔ Exercice 66. *Racines* : Déterminer les solutions, éventuellement complexes, des équations :

1. $x^2 + x + 1 = 0$ ;
2. $x^2 - x + 1 = 0$ ;
3. $2x^2 + 2x + 1 = 0$ ;
4. $x^2 + 1 = 0$ ;
5. $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

☐

T.99

**Théorème 51.** *Racines complexes d'un polynôme du second degré à coefficients complexes Soient, $a$, $b$ et $c$ trois nombres complexes, avec $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ avec $\delta$ une racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$.*

➔ Exercice 67. *Racines d'un polynôme du second degré à coefficients complexes* : Résoudre l'équation $x^2 - (1 + j)x + j = 0$. ☐

T.100

➔ Exercice 68. *Résolution d'équation* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (8 + 6j)z + 15 + 30j = 0$, la méthode de résolution des équations du second degré à coefficients réels restant valable pour les coefficients complexes. ☐

➔ Exercice 69. *Résolution d'équation* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

**1** $z^5 + 1 - j = 0$ **2** $z^5 - (-1 + j)^{-1} = 0$

☐

T.101

**Problème**
Chercher les racines énièmes de l'unité, c'est chercher les complexes $z$ tels que $z^n = 1$.

**Théorème 52** (Racine énième de l'unité)**.** *En posant $z = r.\exp(j\theta)$, on a : $z$ est solution du problème ssi $r = 1$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il y a donc $n$ solutions $z_k = e^{j\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.*

*Démonstration.* Il suffit d'égaler les modules et arguments de $z$ et de 1. ☐

T.102

**Définition 53** (Racines énièmes d'un nombre complexe)**.** Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines énièmes de $z_0$ sont les nombres complexes $z$ solutions de l'équations $z^n = z_0$.

**Théorème 54** (Racines énièmes d'un nombre complexe)**.** *Les racines énièmes du nombre compelxe* $z_0 = \rho\exp(j\varphi)$ *sont les* $n$ *nombres complexes* $z_k = \sqrt[n]{\rho}\exp\left(j\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ *avec* $k \in \{0,\ldots,n-1\}$.

T.103

**Exercice 70.** *Racines énièmes* :

1. Donner les racines cinquièmes de l'unité.
2. Donner les racines cubiques de $-1$.
3. Calculer les racines :

| | | |
|---|---|---|
| 1 5ièmes de 1 | 2 4ièmes de -1 | 3 cubiques de $j$ |
| 4 carrées de $-j$ | 5 5ièmes de $1+j$ | 6 5ièmes de $\sqrt{3}+j$ |

Réponses : 1 $\omega_k = \exp(j\frac{2k\pi}{5})$, avec $0 \le k \le 4$; 2 $\omega_k = \exp(j\frac{(2k+1)\pi}{4})$, avec $0 \le k \le 3$; 3 $\omega_k = \exp(j\frac{(2k+1/2)\pi}{3})$, avec $0 \le k \le 2$

□

T.104

**Exercice 71.** *Résolution d'équations* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ :

| | |
|---|---|
| 1 $(1+z)^n = (1-z)^n$ | 2 $z^5+1-j=0$ |
| 3 $z^5-(-1+j)^{-1}=0$ | 4 $1+z+z^2+\cdots+z^n=0$ |

□

T.105

## 3.7 Application à l'électricité

Dans un problème d'électricité, on a généralement affaire à :

- une tension : $u(t) = U_0\cos(\omega t+\varphi_u) = \mathrm{Re}\{U_0 e^{j\varphi_u}e^{j\omega t}\}$
- une intensité : $i(t) = I_0\cos(\omega t+\varphi_i) = \mathrm{Re}\{I_0 e^{j\varphi_i}e^{j\omega t}\}$

En utilisant les complexes, on peut définir :

- Tension/intensité complexe $\underline{U} = U_0e^{j\varphi_u}$ et $\underline{I} = I_0e^{j\varphi_i}$ amplitudes complexes de la tension et de l'intensité
- impédance complexe : $Z = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX$ avec $R$ la résistance et $X$ la réactance
- bobine, inductance $L$ : $u = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow u(t) = -L\omega I_0\sin(\omega t+\varphi_i)$ et $\underline{U} = Z\underline{I}$ avec $Z = jL\omega$
- condensateur, capacité $C$ : $i = C\dfrac{du}{dt} \Rightarrow i(t) = -C\omega U_0\sin(\omega t+\varphi_u)$ et $\underline{U} = Z\underline{I}$ avec $Z = \dfrac{1}{jC\omega}$

T.106