Mathématiques des transmissions
Ressource R114

Cyrille SICLET, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr
Kévin KASPER, kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr
Bruno TISSERAND, bruno.tisserand@univ-grenoble-alpes.fr
Clara CHATEIGNER, clara.chateigner@univ-grenoble-alpes.fr

IUT Département Réseaux & Télécommunications
Version 2025

- Les Maths en RT

Objectif

Maitriser les outils mathématiques utiles pour l'informatique,les réseaux et les télécoms.

Les ressources

- R113 (S1) : Mathématiques du signal
- R114 (S1) : Mathématiques des transmissions
- R213 (S2) : Mathématiques des systèmes numériques
- R214 (S2) : Analyse mathématique des signaux

- Ressource R114, Mathématiques des transmissions

- **Volume horaire :**
  - 35,5 heures
  - 17 séances de cours/travaux dirigés (17×2h),
  - 1 devoir surveillé (1×1h30)
- **Évaluation**
  - Devoirs à la maison : 7 QCM, coeff 1
  - Devoirs intermédiaires en TD (documents autorisés, calculatrices interdites) : 3 QCM, coeff 9
  - Devoir surveillé final (documents et calculatrices interdits) : coeff 10

- Compétences ciblées et apprentissages critiques ouverts par la ressource R114

- Compétence RT1 - Administrer Niveau 1 :
  - AC0111 : Maîtriser les lois fondamentales de l'électricité afin d'intervenir sur des équipements de réseaux et télécommunications.
- Compétence RT2 - Connecter Niveau 1 :
  - AC0211 : Mesurer et analyser les signaux ;
  - AC0212 : Caractériser des systèmes de transmissions élémentaires et découvrir la modélisation mathématique de leur fonctionnement.

- SAÉ et ressources concernées par la ressource R114

SAÉ concernées

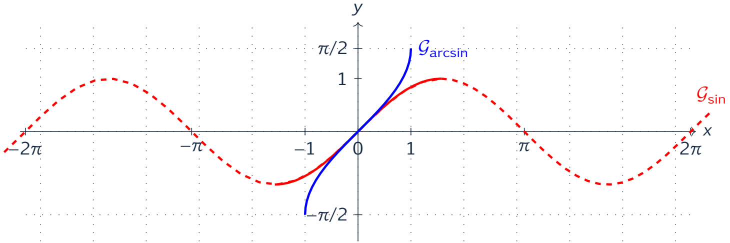
- SAÉ13 : Découvrir un dispositif de transmission ;
- SAÉ22 : Mesurer et caractériser un signal ou un système ;
- SAÉ24 : Projet intégratif.

Ressources concernées

- R205 : Signaux et systèmes pour les transmissions ;
- R206 : Numérisation de l'information ;
- R214 : Analyse mathématiques des signaux.

1. - Plan

1.1.1. - Fonctions sinus et arc sinus



Définition 1 (Fonction arcsin).

arcsin (ou asin) est la fonction définie dans $[-1;1]$ et à valeurs dans $[-\pi/2;\pi/2]$ qui à tout x associe l'angle θ dont le sin vaut x ($\sin(\theta) = x$). C'est la fonction réciproque de la fonction sin lorsque son domaine de définition est restreint à $[-\pi/2;\pi/2]$.

Remarque : Dire que $x = \sin(\theta)$ et $\theta = \arcsin(x)$ est équivalent lorsque $x \in [-1;1]$ et $\theta \in [-\pi/2;\pi/2]$

1.1.1. - Sinus et arc sinus remarquables

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)

1.1.1. - Exercices

Exercice 1. *Autour de* $\arcsin(\sin(\theta))$:

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\arcsin(\sin(\pi))$
2. $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{2}))$
3. $\arcsin(\sin(\frac{11\pi}{6}))$
4. $\arcsin(\sin(-\frac{7\pi}{4}))$
5. $\arcsin(\sin(7\pi+1))$
6. $\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{2}-1))$
7. $\arcsin(\sin(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}))$
8. $\arcsin(\sin(\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{4}))$
9. $\arcsin(\sin(\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{4}))$

□

Exercice 2. $\arcsin(\sin(\theta))$ *: cas général* :

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}+2k\pi; \frac{\pi}{2}+2k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\sin(\theta))$?
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi; \frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi]$. Que vaut $\arcsin(\sin(\theta))$?
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\sin(\theta))$?

□

1.1.1. - Exercices

Exercice 3. *Autour de* $\arcsin(\cos(\theta))$:

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1 $\arcsin(\cos(\pi))$	2 $\arcsin(\cos(\frac{3\pi}{2}))$	3 $\arcsin(\cos(\frac{11\pi}{6}))$
4 $\arcsin(\cos(-\frac{7\pi}{4}))$	5 $\arcsin(\cos(7\pi+1))$	6 $\arcsin(\cos(\frac{9\pi}{2}-1))$
7 $\arcsin(\cos(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}))$	8 $\arcsin(\cos(\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{4}))$	9 $\arcsin(\cos(\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{4}))$

□

Exercice 4. $\arcsin(\cos(\theta))$ *: cas général* :

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [2k\pi; \pi + 2k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\cos(\theta))$?
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [(2k+1)\pi; \pi + (2k+1)\pi]$. Que vaut $\arcsin(\cos(\theta))$?
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [k\pi; \pi + k\pi]$. Que vaut $\arcsin(\cos(\theta))$?

□

1.1.1. - Exercices

Exercice 5. *Autour de* $\cos(\arcsin(x))$:
Donner les valeurs des expressions suivantes :

1 $\cos(\arcsin(0))$ 2 $\cos(\arcsin(1))$ 3 $\cos(\arcsin(-1))$

4 $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2}))$ 5 $\cos(\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}))$ 6 $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2}))$

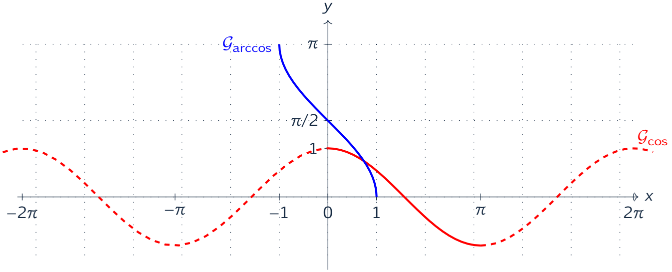
□

Exercice 6. $\cos(\arcsin(x))$ *: cas général* :

1. Montrer que $\cos(\arcsin(x)) \geq 0, \forall x \in [-1;1]$;
2. Que vaut $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x))$ pour $x \in [-1;1]$?
3. En déduire que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1;1]$.

□

1.1.2. - Fonctions cosinus et arc cosinus



Définition 2 (Fonction arccos).

arccos (ou acos) est la fonction définie dans $[-1;1]$ et à valeurs dans $[0;\pi]$ qui à tout x associe l'angle θ dont le cosinus vaut x ($\cos(\theta) = x$). C'est la fonction réciproque de la fonction cos lorsque son domaine de définition est restreint à $[0;\pi]$.

Remarque : Dire que $x = \cos(\theta)$ et $\theta = \arccos(x)$ est équivalent lorsque $x \in [-1;1]$ et $\theta \in [0;\pi]$

1.1.2. - Cosinus et arc cosinus remarquables

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	0

1.1.2. - Exercices

Exercice 7. *Autour de* $\arccos(\cos(\theta))$:

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\arccos(\cos(\pi))$
2. $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
3. $\arccos(\cos(\frac{11\pi}{6}))$
4. $\arccos(\cos(-\frac{7\pi}{4}))$
5. $\arccos(\cos(7\pi+1))$
6. $\arccos(\cos(\frac{9\pi}{2}-1))$
7. $\arccos(\cos(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}))$
8. $\arccos(\cos(\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{4}))$
9. $\arccos(\cos(\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{4}))$

Exercice 8. $\arccos(cos(\theta))$ *: cas général* :

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [2k\pi; \pi+2k\pi]$. Que vaut $\arccos(\cos(\theta))$?
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [(2k+1)\pi; \pi+(2k+1)\pi]$. Que vaut $\arccos(\cos(\theta))$?
3. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [k\pi; \pi+k\pi]$. Que vaut $\arccos(\cos(\theta))$?

1.1.2. - Exercices

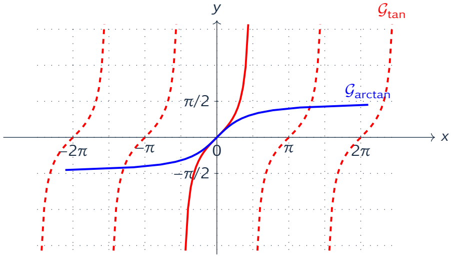
Exercice 9. *Autour de* $\sin(\arccos(x))$:
Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\sin(\arccos(0))$
2. $\sin(\arccos(1))$
3. $\sin(\arccos(-1))$
4. $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$
5. $\sin(\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}))$
6. $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$

Exercice 10. $\sin(\arccos(x))$ *: cas général* :

1. Montrer que $\sin(\arccos(x)) \geq 0, \forall x \in [-1;1]$;
2. Que vaut $\cos^2(\arccos(x)) + \sin^2(\arccos(x))$ pour $x \in [-1;1]$?
3. En déduire que $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1;1]$.

1.1.3. - Fonctions tangente arc tangente



.

Définition 3 (Fonction arctan).

arctan (ou atan) est la fonction définie dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\pi/2;\pi/2[$ qui à tout x associe l'angle θ dont le tan vaut x . C'est la fonction réciproque de la fonction tan lorsque son domaine de définition est restreint à $]-\pi/2;\pi/2[$.

Remarque : Dire que $x = \tan(\theta)$ et $\theta = \arctan(x)$ est équivalent lorsque $\theta \in]-\pi/2;\pi/2[$.

1.1.3. - Tangentes et arcs tangentes remarquables

Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\tan(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)

1.1.3. - Exercices

Exercice 11. *Autour de* $\arctan(\tan(\theta))$:

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\arctan(\tan(\pi))$
2. $\arctan(\tan(\frac{7\pi}{3}))$
3. $\arctan(\tan(\frac{11\pi}{6}))$
4. $\arctan(\tan(-\frac{7\pi}{4}))$
5. $\arctan(\tan(7\pi+1))$
6. $\arctan(\tan(\frac{9\pi}{2}-1))$
7. $\arctan(\tan(\frac{7\pi}{4}+\frac{1}{2}))$
8. $\arctan(\tan(\frac{9\pi}{4}-\frac{1}{4}))$
9. $\arctan(\tan(\frac{1}{8}-\frac{5\pi}{4}))$

□

Exercice 12. $\arctan(tan(\theta))$ *: cas général* :

Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+2\pi]$. Que vaut $\arctan(\tan(\theta))$? □

1.1.3. - Exercices

Exercice 13. *Autour de* $\sin(\arctan(x))$:

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\sin(\arctan(0))$
2. $\sin(\arctan(1))$
3. $\sin(\arctan(-1))$
4. $\sin(\arctan(-\sqrt{3}))$
5. $\sin(\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}))$
6. $\sin(\arctan(\sqrt{3}))$

Exercice 14. $\sin(\arctan(x))$ *: cas général* :

1. Montrer que $\sin(\arctan(x)) \geq 0$, pour $x \geq 0$ et $\sin(\arctan(x)) \leq 0$, pour $x \leq 0$;
2. On pose $\theta = \arctan(x)$ et $y = \sin(\theta)$. Montrer que $\tan^2(\theta) = \frac{y^2}{1-y^2}$;
3. En déduire que $x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$;
4. En déduire que $y^2 = \frac{x^2}{1+x^2}$;
5. En déduire que $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1.1.3. - Exercices

Exercice 15. *Autour de* $\cos(\arctan(x))$:

Donner les valeurs des expressions suivantes :

1. $\cos(\arctan(0))$
2. $\cos(\arctan(1))$
3. $\cos(\arctan(-1))$
4. $\cos(\arctan(\sqrt{3})$
5. $\cos(\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}))$
6. $\cos(\arctan(-\sqrt{3}))$

□

Exercice 16. $\cos(\arctan(x))$ *: cas général* :

1. Montrer que $\cos(\arctan(x)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
2. On pose $\theta = \arctan(x)$ et $y = \cos(\theta)$. Montrer que $\tan^2(\theta) = \frac{1-y^2}{y^2}$;
3. En déduire que $x^2 = \frac{1-y^2}{y^2}$;
4. En déduire que $y^2 = \frac{1}{1+x^2}$;
5. En déduire que $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

□

1.2.1. - Formules d'addition, de soustraction et de duplication

Théorème 4 (Addition et soustraction en trigonométrie).

Soient a,b $\in \mathbb{R}$. *Alors :*

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Théorème 5 (Duplication en trigonométrie).

Soit a $\in \mathbb{R}$. *Alors :*

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

1.2.1. - Exercices

Exercice 17. *Cacul de* $\cos(\frac{\pi}{12})$ *et* $\sin(\frac{\pi}{12})$:

1. Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$;
2. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et que $\sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

□

Exercice 18. *Cacul de* $\cos(\frac{\pi}{8})$:

1. Montrer que $\cos(\frac{\pi}{8}) > 0$;
2. Utiliser la formule de duplication $a = \frac{\pi}{8}$ et en déduire que $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$.

□

1.2.1. - Exercices

Exercice 19. *Résolution de* $\cos(x) + \sin(x) = 1$:

1. Développer l'expression $(\cos(x) + \sin(x))^2$ en utilisant une identité remarquable ;
2. En déduire que $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1 + \sin(2x)$;
3. En déduire les solutions de l'équation $(\cos(x) + \sin(x))^2 = 1$;
4. En déduire les solutions de l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

□

1.2.2. - Formules de linéarisation

Théorème 6 (Linéarisation en trigonométrique).

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. *Alors :*

- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\cos(a-b) - \dfrac{1}{2}\cos(a+b)$
- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\cos(a+b) + \dfrac{1}{2}\cos(a-b)$
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\sin(a+b) + \dfrac{1}{2}\sin(a-b)$

1.2.2. - Exercices

Exercice 20. *Période, fréquence, pulsation* :
Linéariser puis calculer la période, la fréquence et la pulsation des signaux suivants :

1. $s_1(t) = \sin(2t+1)\cos(3t-1)$
2. $s_2(t) = 2\sin(2t+1)\sin(4t-1)$
3. $s_3(t) = 3\cos(-2t+1)\cos(3t-1)$
4. $s_4(t) = 5\sin(5\pi t+2)\sin(3\pi t-1)$
5. $s_5(t) = \sin^2(\frac{2\pi}{3}t+1)$
6. $s_6(t) = 2\sin(\frac{\pi}{5}t+1)\cos(\frac{\pi}{6}t-1)$
7. $s_7(t) = \sin(\frac{2\pi}{3}t+1)\cos(3\pi t-1)$
8. $s_8(t) = 2\cos^2(\frac{\pi}{6}t-1)$

□

1.2.2. - Formules de factorisation

Théorème 7 (Factorisation en trigonométrie).

Soient $a,b \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$;
- $\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$;
- $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

1.2.2. - Exercices

Exercice 21. *Quelques équations trigonométriques* :
Factoriser les signaux suivantes :

1. $s_1(t) = \sin(2t+1) + \sin(3t-1)$
2. $s_2(t) = \sin(2t+1) - \sin(4t-1)$
3. $s_3(t) = \cos(-2t+1) + \cos(3t-1)$
4. $s_4(t) = \cos(5\pi t+2) - \cos(3\pi t)$
5. $s_5(t) = \sin(\frac{2\pi}{3}t+1) + \cos(3\pi t)$
6. $s_6(t) = \sin(\frac{\pi}{5}t+1) - \cos(\frac{\pi}{6}t-1)$

1.2.3. - Propriétés des fonctions trigonométriques réciproques

Théorème 8 (Fonctions trigonométriques réciproques).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\sin(\arcsin(x)) = x$ *si* $x \in [-1,1]$;
- $\cos(\arccos(x)) = x$ *si* $x \in [-1,1]$;
- $\tan(\arctan(x)) = x$;
- $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ *si* $x \in [-1,1]$;
- $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ *si* $x \in [-1,1]$;
- $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ *si* $x \neq 0$;
- $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
- $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1.2.3. - Exercices

Exercice 22. *Fonctions trigonométriques réciproques* :
Donner les valeurs des expressions suivantes, lorsqu'elles existent :

1. $\arcsin(\cos(1))$
2. $\arccos(\sin(2))$
3. $\cos(\arcsin(1))$
4. $\sin(\arccos(2))$
5. $\arcsin(\sin(\frac{1}{2}))$
6. $\arccos(\cos(-1))$
7. $\cos(\arcsin(\frac{1}{4}))$
8. $\sin(\arctan(\frac{3}{2}))$
9. $\arcsin(\sin(3))$
10. $\arcsin(\sin(1))$
11. $\arcsin(\cos(2))$
12. $\sin(\arcsin(1))$
13. $\cos(\arcsin(2))$
14. $\arcsin(\cos(\frac{1}{2}))$
15. $\arcsin(\sin(-1))$
16. $\sin(\arcsin(\frac{1}{4}))$
17. $\cos(\arctan(\frac{3}{2}))$
18. $\arcsin(\cos(3))$

□

1.2.3. - Exercices

Exercice 23. *Fonctions trigonométriques réciproques* :
Donner les valeurs des expressions suivantes, lorsqu'elles existent :

1. $\arccos(\cos(1))$
2. $\arcsin(\sin(2))$
3. $\cos(\arccos(1))$
4. $\sin(\arcsin(2))$
5. $\arccos(\cos(\frac{1}{2}))$
6. $\arcsin(\cos(-1))$
7. $\sin(\arccos(\frac{1}{4}))$
8. $\cos(\arccos(\frac{3}{2}))$
9. $\arccos(\sin(4))$
10. $\arccos(\sin(1))$
11. $\arccos(\cos(2))$
12. $\sin(\arctan(1))$
13. $\cos(\arctan(2))$
14. $\arccos(\sin(\frac{1}{2}))$
15. $\arccos(\sin(-1))$
16. $\cos(\arccos(\frac{1}{4}))$
17. $\sin(\arccos(\frac{3}{2}))$
18. $\arccos(\cos(4))$

$\square$

1.3. - $A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$

Théorème 9 ($A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$).

Soient $A > 0$, $\omega > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors
$A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$ avec $a = A\cos\varphi$ et $b = A\sin\varphi$.

EXERCICE 24. $A\cos(\omega t+\varphi) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$:
Écrire les signaux suivants sous la forme $s(t) = a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t)$:

1. $s(t) = 2\cos(2t + \frac{\pi}{3})$;
2. $s(t) = 5\cos(3t + \frac{\pi}{4})$;
3. $s(t) = -3\sin(3t + \frac{\pi}{4})$.

□

1.3. - $a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Théorème 10 ($a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et

- *si $a > 0$, $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (à 2π près);*
- *si $a < 0$, $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ (à 2π près).*
- *si $a = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si $b > 0$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ si $b < 0$*

EXERCICE 25. $a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$:
Soit $s(t) = \cos(t) - \sin(t)$.

- Montrer que $s(t) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(t) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(t)\right)$;
- En déduire que $s(t) = \sqrt{2}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$;
- Montrer que l'on retrouve bien les valeurs données par les formules du théorème précédent.

1.3. - Exercices

Exercice 26. $a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$:
Soit $s(t) = 2\cos(2t) - 3\sin(2t)$. On cherche à écrire $s(t)$ sous la forme $s(t) = A\cos(2t + \varphi)$.

1. Montrer que $A\cos(\varphi) = 2$ et $A\sin(\varphi) = 3$;
2. En déduire que $A^2 = 13$, et que $\tan(\varphi) = \frac{3}{2}$;
3. En déduire que $\cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{3}{\sqrt{13}}$;
4. En déduire que $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$;
5. En déduire que $\varphi = \arctan(\frac{3}{2})$, à 2π près.

$\square$

1.3. - Exercices

Exercice 27. $a\cos(\omega t) - b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi)$:
Soit $s(t) = -3\cos(2t) + 4\sin(2t)$. On cherche à écrire $s(t)$ sous la forme $s(t) = A\cos(2t + \varphi)$.

1. Montrer que $A\cos(\varphi) = -3$ et $A\sin(\varphi) = -4$;
2. En déduire que $A^2 = 25$, et que $\tan(\varphi) = \frac{4}{3}$;
3. En déduire que $\cos(\varphi) = -\frac{3}{5}$ et $\sin(\varphi) = -\frac{4}{5}$;
4. En déduire que $\varphi \in]-\pi; -\frac{\pi}{2}[$;
5. En déduire que $\varphi = \pi + \arctan(\frac{4}{3})$, à 2π près.

□

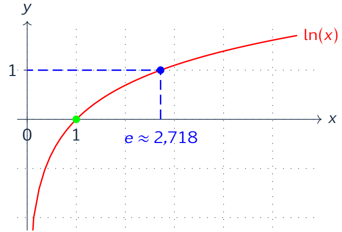
2. - Plan

2.1.1. - Logarithme népérien

Définition 11 (Logarithme népérien).

Le **logarithme népérien** représente la valeur de la surface se trouvant entre le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et l'axe des abscisses, entre les points d'abscisse 1 et $x \geq 1$. Si $0 < x < 1$, la surface correspondante est comptée négativement. On la note $x \mapsto \ln(x)$, ses domaines sont : $D_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$, $I_{\ln} = \mathbb{R}$.

Valeurs particulières : $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ (avec $e \approx 2{,}718$ le nombre d'Euler), $\ln(2) \approx 0{,}693$.



2.1.1. - Exercice

Exercice 28. *Surface située sous la courbe $y = \frac{1}{x}$ et propriétés :*

1. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pour $0 < x \leq 4$. On fera figurer les positions des points de la courbe d'abscisses $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2 et 4 ;
2. Hachurez la surface d'aire $\mathcal{A}_1 = \ln(2)$ située entre ce graphe et l'axe des abscisses ;
3. Hachurez la surface d'aire $\mathcal{A}_2$ située entre ce graphe et l'axe des abscisses, pour $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$;
4. Que peut-on dire de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$? En déduire que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$;
5. Que peut-on dire de $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$ avec un raisonnement analogue ?
6. Calculer $\ln(1)$;
7. Vers quoi tend $\ln(x)$ quand x tend vers $+\infty$?
8. Vers quoi tend $\ln(x)$ quand $x > 0$ tend vers 0 ?

2.1.1. - Propriétés

Théorème 12 (Propriétés de calcul).

Soient $x,y \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln\left(x^y\right) = y\ln(x)$

Attention

Soient $x,y \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\ln(x+y) \neq \ln(x) + \ln(y)$
- $\frac{1}{\ln(x)} \neq -\ln(x)$

2.1.1. - Exercices

Exercice 29. *Propriétés de* $\ln(x)$:

Démontrer les égalités suivantes :

1. $\ln(18) - \ln(6) = \ln(3)$
2. $\ln(32) + \ln(16) = 9\ln(2)$
3. $2\ln(7) - \ln(98) = -\ln(2)$
4. $\ln(56) - \ln(8) = \ln(7)$

□

Exercice 30. *Propriétés de* $\ln(x)$:

Sachant que $\ln(2) \approx 0{,}69$ et $\ln(3) \approx 1{,}10$ à 10^{-2} près, donner la valeur à 10^{-1} près des constantes suivantes (sans calculatrice !) :

1. $\ln(4)$
2. $\ln(6)$
3. $\ln(\frac{1}{2})$
4. $\ln(\frac{9}{4})$
5. $\ln(18)$

□

2.1.2. - Logarithmes à base a

Définition 13 (Logarithme à base a).

Le logarithme à base a (avec $a > 0$) est la fonction définie par :

$$x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Propriétés

- Mêmes domaines que ln : $D = \mathbb{R}_+^*$, $I = \mathbb{R}$
- Valeurs particulières : $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(a^n) = n$
- Mêmes propriétés de calcul que ln
- Même allure graphique que ln avec une courbe « écrasée » d'un facteur $\dfrac{1}{\ln(a)}$ suivant l'axe des ordonnées

Exemple 14 ($\log_2(x)$ et $\log_{10}(x)$).

$\log_2(2^n) = n$ et $\log_{10}(10^n) = n$.

2.1.2. - Logarithme à base 10

Définition 15 (Logarithme à base 10).

Le logarithme à base 10 est la fonction définie par :
$x \mapsto \log_{10}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Propriétés

- Mêmes domaines que ln : $D = \mathbb{R}_+^*$, $I = \mathbb{R}$
- Valeurs particulières : $\log_{10}(1) = 0$, $\log_{10}(10) = 1$, $\log_{10}(10^n) = n$
- Mêmes propriétés de calcul que ln
- Même allure graphique que ln avec une courbe « écrasée » d'un facteur $\dfrac{1}{\ln(10)}$ suivant l'axe des ordonnées

Remarque : $\log_{10}$ est utilisé pour définir l'**échelle logarithmique**, qui permet de représenter sur un même graphique des nombres dont les ordres de grandeurs sont très différents : il amplifie les variations proches de 0 et atténue les grandes variations.

2.1.3. - Application : décibels (dB)

Définition 16 (Décibels (dB)).

Pour exprimer un rapport de puissance $G = P_1/P_2$ (gain G ou atténuation A), on a souvent recours à une échelle logarithmique, le décibel (dB) :

$$G_{\text{dB}} = 10\log_{10}(G) = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

Propriétés

- Un doublement de puissance correspond à un gain d'environ 3 dB : $10\log_{10}(2G) \approx 3 + 10\log_{10}(G) = 3 + G_{\text{dB}}$;
- Une multiplication d'un facteur 10 correspond à un gain de 10 dB : $10\log_{10}(10G) = 10 + 10\log_{10}(G) = 10 + G_{\text{dB}}$;
- Une perte de puissance d'un facteur 2 correspond à une atténuation d'environ 3 dB : $10\log_{10}(G/2) \approx -3 + 10\log_{10}(G) = -3 + G_{\text{dB}}$;
- Une perte de puissance d'un facteur 10 correspond à une atténuation de 10 dB : $10\log_{10}(G/10) = -10 + 10\log_{10}(G) = -10 + G_{\text{dB}}$.

2.1.3. - Exercice

EXERCICE 31. *Décibels* : Compléter les tableaux suivants, sans calculatrice, en utilisant les propriétés des décibels.

gain		20				200	0,5
gain en dB	10 dB		-7 dB	-10 dB	0 dB		

gain		40				50	0,1
gain en dB	20 dB		13 dB	10 dB	3 dB		

2.1.3. - Le dBm et le dBW

Définition 17 (Le dBm et le dBW).

Pour P une puissance en Watts, on définit :

- $P_{\text{dBm}} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{1\text{ mW}}\right)$;
- $P_{\text{dBW}} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{1\text{ W}}\right) = P_{\text{dBm}} - 30dB$.

Remarques

- Ces unités sont sans dimension;
- leurs propriétés sont dérivées de celles du décibel.

2.1.3. - Exercices

Exercice 32. *dBm et dBW :* Compléter les tableaux suivants, sans calculatrice, en utilisant les propriétés des décibels.

puissance		20 W			
puissance en dBm	10 dBm				0 dBm
puissance en dBW			-7 dBW	-10 dBW	

puissance		40 W			
puissance en dBm	20 dBm		13 dBm	10 dBm	
puissance en dBW					3 dBW

2.1.3. - Le dBV et le dBμV

Rappel : loi d'Ohm

La puissance P dissipée par une résistance R traversée par un courant d'intensité I et de tension U vaut : $P = UI = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$

Décibels en fonction de la tension

Pour $P_1 = \frac{U_1^2}{R}$ et $P_2 = \frac{U_2^2}{R}$ on obtient $\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2}$ et $\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)_{\text{dB}} = 20\log_{10}\left(\dfrac{U_1}{U_2}\right)$

Définition 18 (Le dBV et le dBμV).

Pour U une tension en Volts, on définit :

- $U_{\text{dBV}} = 20\log_{10}\left(\frac{U}{1\text{ V}}\right)$;
- $U_{\text{dB}\mu\text{V}} = 20\log_{10}\left(\dfrac{U}{1\ \mu\text{V}}\right) = U_{\text{dBV}} + 120dB$.

2.1.3. - Exercices

➔ EXERCICE 33. *dBµV et dBV* : Compléter les tableaux suivants, sans calculatrice, en utilisant les propriétés des décibels.

tension		20 V			
tension en dBµV	10 dBµV				0 dBµV
tension en dBV			-6 dBV	-10 dBV	

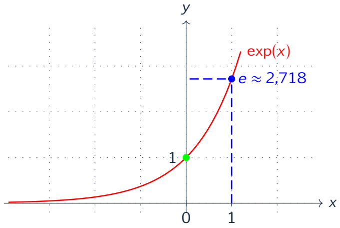
tension		40 V			
tension en dBµV	20 dBµV		14 dBµV	10 dBµV	
tension en dBV					6 dBV

2.2.1. - Exponentielle

Définition 19 (Exponentielle).

L'exponentielle est la fonction réciproque de ln définie par $x \mapsto \exp(x) = e^x$. Ses domaines sont : $D_{\exp} = \mathbb{R}$, $I_{\exp} = \mathbb{R}_+^*$.

Valeurs particulières : $e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2{,}718$ avec e le nombre d'Euler.



Remarque : Deux fonctions réciproques inversent les relations entre antécédent et image : $x = \ln(y)$ est équivalent à $y = \exp(x)$ sous réserve que x et y soient choisis dans les ensembles de définition et les ensembles images des deux fonctions.

2.2.1. - Propriétés

Théorème 20 (Propriétés de calcul).

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$
- $\exp(x \cdot y) = (\exp(x))^y = (\exp(y))^x$
- $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Attention

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $\exp(x) + \exp(y) \neq \exp(x+y)$

2.2.1. - Exercices

Exercice 34. *Propriétés de l'exponentielle* : Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifiez les expressions suivantes :

1. $s(t) = (\exp(t))^2 + 1 - e^{2t}$
2. $A = \sqrt{e}\exp(-\frac{1}{2})$
3. $B = (e^2 - e)\exp(-1)$
4. $s(t) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \exp(2t) - \exp(-2t)$

Exercice 35. *Résolution d'équations* : Résolvez les équations suivantes où t est l'inconnue réelle à déterminer :

1. $\exp(2t + 1) = 2$
2. $7\exp(3t - 1) + 2 = 0$
3. $\exp(2t) - 2\exp(t) + 1 = 0$
4. $\exp(t) - 2\exp(-t) + 1 = 0$

2.2.1. - Exponentielle à base a

Définition 21 (Exponentielle à base a).

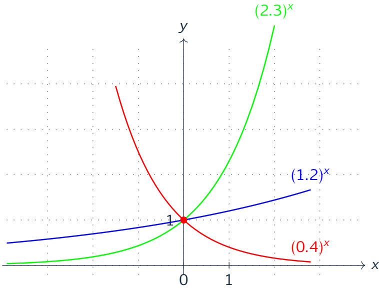
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. L'exponentielle à base $a \neq 1$ est la fonction définie par $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$.

Propriétés

- Mêmes domaines que l'exponentielle
- Propriétés de calculs mathématiques déduites de celles de exp et de ln

Cas particuliers

- Lorsque $a = 1$, on retrouve la fonction constante $x \mapsto 1$;
- pour $a = 2$, on obtient $x \mapsto 2^x$;
- pour $a = 10$, on obtient $x \mapsto 10^x$.



2.2.1. - Exercices

Exercice 36. *Propriétés de l'exponentielle de base a :* Soit $t \in \mathbb{R}$. Simplifiez les expressions suivantes :

1. $s(t) = 2^t \exp(2t\ln(2)) - 8^t$
2. $A = \sqrt{2}\exp(-\frac{1}{2}\ln(2))$
3. $B = 10^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{3}{2}\ln(10)\right)$
4. $s(t) = \left(\frac{2^t - 2^{-t}}{2}\right)^2 - \exp(2t\ln(2)) - \frac{1}{2^{2t}}$

□

Exercice 37. *Résolution d'équations :* Résolvez les équations suivantes où t est l'inconnue réelle à déterminer :

1. $10^{2t-1} = 2$
2. $7 \cdot 2^{5t-1} + 1 = 0$
3. $10^{2t} + 2 \cdot 10^t + 3 = 0$
4. $2^t - 2^{-t} + 1 = 0$

□

2.3. - Monômes

Définition 22 (Monômes de puissances réelles).

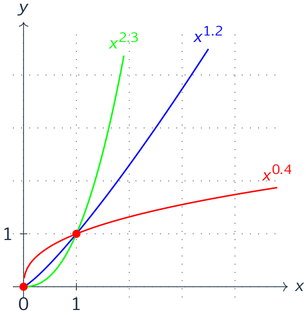
Les monômes de puissances réelles généralisent les monômes x^n (où $n \in \mathbb{N}$) à des n dans $\mathbb{R}$. Ils sont définis par :
$x \mapsto x^\alpha = \exp\big(\alpha \ln(x)\big) = e^{\alpha \ln(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, sur les domaines : $D = \mathbb{R}_+^*$, $I = \mathbb{R}_+^*$.

Propriétés

Propriétés de calculs mathématiques déduites de celles de exp et de ln

Cas particuliers

- Lorsque $\alpha = 0$, la fonction est constante $x \mapsto 1$
- Lorsque $\alpha = 1$, la fonction est l'identité $x \mapsto x$

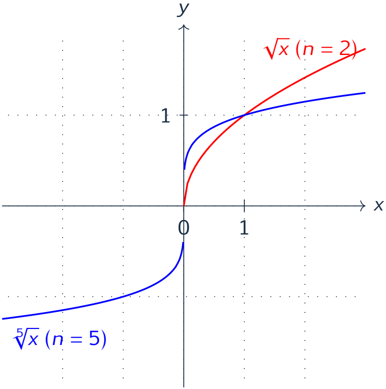


2.4. - Racines n-ièmes

Définition 23 (Racines n-ièmes).

Les **racines n-ièmes** sont les fonctions définies par $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$f(x)$ est le réel y tel que $y^n = x$; dans $\mathbb{R}$, ce nombre est unique et peut être négatif lorsque n est impair ! Si n est pair, on impose en plus que $x \geq 0$ pour obtenir une définition unique.

si n est :	pair	impair
D_f	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$
I_f	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$



2.4. - Propriétés

Théorème 24 (Manipulation des exposants et des opérandes).

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ *et* $y \in \mathbb{R}_+^*$.

- $\sqrt[n\cdot m]{x} = \sqrt[n]{\left(\sqrt[m]{x}\right)} = x^{\frac{1}{n\cdot m}} = \left(x^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[\frac{n}{m}]{x} = \sqrt[n]{(x^m)} = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{(x\cdot y)} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = (x\cdot y)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}\cdot y^{\frac{1}{n}}$
- $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = (x^m)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}}$

2.4. - Propriétés

Attention à ne pas inventer des propriétés !

Soient $x, y \in \mathbb{R}^+$, alors :

- $\sqrt[n+m]{x} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[m]{x}$ $\qquad x^{\frac{1}{n+m}} \neq x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{1}{m}}$
- $\sqrt[n]{(x+y)} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$ $\qquad (x+y)^{\frac{1}{n}} \neq x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$

2.4. - Exercices

Exercice 38. *Racines et puissances fractionnaires* :
Démontrer les égalités suivantes :

1. $\sqrt{27}+\sqrt{3}=4\sqrt{3}$
2. $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$
3. $2\sqrt[9]{2^6}+2^{\frac{5}{3}}=4\sqrt[3]{4}$

$\square$

3. - Plan

3.1. - Un peu d'histoire

- école italienne (Cardan, Bombelli), autour de 1570 ;
- introduits pour résoudre les équations du troisième degré $x^3 + px + q = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Exemple 25 (Équation $x^3 - x = 0$ (avec $p = -1$ et $q = 0$)).

Solution évidente : 0, pourtant la formule précédente ne marche pas : $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -1/27 < 0$, mais si on admet l'existence de $\sqrt{-1}$, on retrouve bien $x = 0$:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{-1}{27}}}$$

3.2.1. - Ensemble des complexes $\mathbb{C}$

Définition 26 (Ensemble des complexes $\mathbb{C}$).

On appelle nombre complexe, ou simplement complexe, tout nombre z qui s'écrit sous la forme $z = x + jy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et où j est un nombre (dit imaginaire) vérifiant la relation $j^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$, il est muni de deux **lois de composition internes** (notées $+$ et $\times$) définies, pour tout $z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C}$, par :

- loi d'**addition** sur $\mathbb{C}$: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$;
- loi de **multiplication** sur $\mathbb{C}$: $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + y_1x_2)$. En particulier, on retrouve $j^2 = j \times j = -1$.

3.2.1. - Notation cartésienne

Définition 27 (Partie réelle, imaginaire et notation cartésienne).

- x est appelé **partie réelle** et on note $x = \mathrm{Re}\{z\}$;
- y est appelé **partie imaginaire** et on note $y = \mathrm{Im}\{z\}$;
- la notation $x + jy$ est appelée la **notation cartésienne** du nombre complexe z.

3.2.1. - Exercice et remarques

Exercice 39. *Calcul sur les complexes* :

Calculer les nombres complexes suivants :

1. $z = (1+j)+(3-j)$
2. $z = (-3+j)-(4-3j)$
3. $z = (2-j)+(-3-9j)$
4. $z = (-2-3j)(1-j)$
5. $z = (1+j)(-1-j)$
6. $z = (5+3j)(5-3j)$

□

Remarques

- les réels sont des cas particuliers des complexes, puisque ce sont les nombres de la forme $x + 0 \times j$. De fait $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- les nombres complexes de la forme jy avec y quelconque sont appelés des **imaginaires purs** ;
- on note aussi souvent i plutôt que j. Mais pour éviter la confusion avec la lettre désignant l'intensité en électricité, nous préférerons utiliser j.

3.2.2. - $\mathbb{C}$, un corps commutatif

Propriété 28 (Addition dans $\mathbb{C}$).

Soient $z = x + jy, z_1, z_2$ et z_3 quatre complexes. L'addition :

1. *est **commutative** : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;*
2. *est **associative** : $\left(z_1 + z_2\right) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right)$;*
3. *possède un (unique) **élément neutre** 0 ;*
4. *définit l'(unique) **opposé** de $z = x + jy$ comme étant le complexe $-z = -x - jy$.*

Remarques : soient z_1 et z_2 deux complexes, alors

- on dit que z_1 est un élément neutre de l'addition si pour tout complexe z, on a $z_1 + z = z$;
- on dit que z_2 est un opposé du complexe z lorsque $z_2 + z = z_1$ où z_1 est l'élément neutre de la loi d'addition (c'est-à-dire $z_1 = 0$).

3.2.2. - $\mathbb{C}$, un corps commutatif

Propriété 29 (Multiplication dans $\mathbb{C}$).

Soient $z = x + jy, z_1, z_2$ et z_3 quatre complexes. La multiplication :

1. *est* ***commutative*** *: $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$;*
2. *est* ***associative*** *: $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$;*
3. *possède un (unique)* ***élément neutre*** *qui est égal à 1 ;*
4. *définit l'****inverse*** *de $z = x + jy \neq 0$ comme étant le complexe $\dfrac{x}{x^2+y^2} - j\dfrac{y}{x^2+y^2}$;*
5. *est* ***distributive sur l'addition*** *: $z_1 \times (z_2 + z_3) = (z_1 \times z_2) + (z_1 \times z_3)$.*

Remarques :

- toutes ces propriétés font de $\mathbb{C}$ un **corps commutatif** ;
- on dit que z_1 est l'inverse du complexe z lorsque $z_1 \times z = 1$ où 1 est l'élément neutre de la loi de multiplication.

3.2.2. - Exercices

Exercice 40. *Inverse* :

Calculer l'inverse des nombres complexes suivants :

1 $z = 4 - j$ 2 $z = -3 + j$ 3 $z = -3 - 9j$ 4 $z = 3 + 4j$ ☐

Exercice 41. *Division* :

Calculer les nombres complexes suivants :

1 $z = \frac{1+j}{-1-j}$ 2 $z = \frac{2+3j}{-2-3j}$ 3 $z = \frac{2+3j}{1+j}$ 4 $z = \frac{-2-3j}{1-j}$ ☐

3.2.3. - $\mathbb{C}$, un EV sur $\mathbb{R}$ de dimension 2

Propriété 30 (Structure d'EV de $\mathbb{C}$).

Soient $z = x + jy \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la ***multiplication externe*** *« $\cdot$ » d'un complexe par un réel par : $\lambda \cdot z = (\lambda x) + j(\lambda y)$. Alors, $\mathbb{C}$ muni de la loi d'addition précédemment définie et de cette loi de multiplication externe est un EV de dimension 2 et de base canonique $(1, j)$.*

Notation complexe et vecteur

Ainsi, un nombre complexe apparaît comme un vecteur à 2 dimensions : $z = x + jy$ peut-être vu comme le vecteur $\vec{u} = (x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

3.2.3. - $\mathbb{C}$, un EV sur $\mathbb{R}$ de dimension 2

Remarques :

- on utilise souvent la même notation pour la multiplication interne « $\times$ » et la multiplication externe « $\cdot$ », voire pas de symbole du tout. Le contexte permet de savoir de quelle multiplication il s'agit ;
- un nombre réel pouvant être vu comme un nombre complexe particulier, la multiplication externe peut aussi être vue comme une multiplication interne particulière.

Propriété 31 (Égalité de deux complexes).

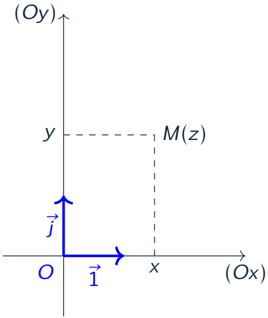
Soient $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ deux complexes. Alors :

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [x_1 = x_2 \ \underline{\text{et}}\ y_1 = y_2]$
- $z_1 = 0 \Leftrightarrow [x_1 = 0 \ \underline{\text{et}}\ y_1 = 0]$

3.2.3. - Interprétation géométrique

Soit $z = x + jy$ un complexe. Puisque $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$:

- **Interprétation affine** : on peut définir le point $M(z)$ du plan avec z l'**affixe** du point M comme le point de **coordonnées cartésiennes** (x,y) ;
- **Interprétation vectorielle** : on peut définir le vecteur $\vec{u}(z)$ du plan avec z l'**affixe** du vecteur comme le vecteur reliant l'origine O au point de coordonnées (x,y).



3.2.4. - Conjugué d'un nombre complexe

Définition 32 (Conjugué).

Le **conjugué** du complexe $z = x + jy$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$ ou z^* défini par $\overline{z} = z^* = x - jy$. L'opération effectuée s'appelle la conjugaison.

Propriété 33 (Conjugaison).

Soient $z = x + jy$, $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ trois nombres complexes. Alors :

1. $x = \operatorname{Re}\{z\} = \operatorname{Re}\{z^*\} = \dfrac{z + z^*}{2}$ *et* $y = \operatorname{Im}\{z\} = -\operatorname{Im}\{z^*\} = \dfrac{z - z^*}{2j}$
2. $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$
3. $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$
4. $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$

3.2.4. - Exercices

Exercice 42. *Conjugaison* : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1. $z = 4 - j$
2. $z = -3 + j$
3. $z = -3 - 9j$
4. $z = 3 + 4j$

□

Exercice 43. *Conjugaison et opérations* : Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

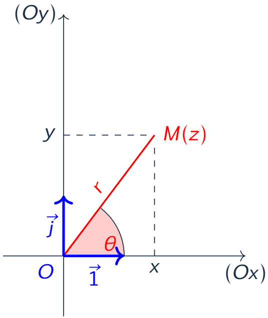
1. $z = (1 + j) + (3 + j)$
2. $z = (3 + j) - (4 - 3j)$
3. $z = (2 + j) + (-3 - 9j)$
4. $z = (-2 - 3j)(1 - 2j)$
5. $z = (2 + j)(-2 - j)$
6. $z = (2 + 3j)(5 - 2j)$

□

3.3.1. - Coordonnées polaires

Soit $z = x + jy$ un complexe. Le point $M(z)$ du plan ou le vecteur $\overrightarrow{OM}(z) = \vec{u}(z)$ du plan peuvent être repérés par leurs coordonnées polaires :

- distance à l'origine : $r = \|\overrightarrow{OM}\| = \|\vec{u}\|$;
  r est appelé le module de z et noté $r = |z|$.
- angle polaire : $\theta = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\overrightarrow{Ox}, \vec{u}})$;
  θ est appelé l'argument de z et noté $\theta = \arg(z)$.



Conclusion : Le couple module/angle (r,θ) de z peut aussi servir à repérer M (ou $\vec{u}$) dans le plan au même titre que les coordonnées cartésiennes. Il forme les **coordonnées polaires** de $M(z)$.

3.3.1. - Lien entre forme cartésienne et forme polaire

Définition 34 (Module et argument d'un nombre complexe).

Soit $z = x + jy$ un complexe. Alors il existe un unique $r = |z| > 0$ appelé module de z et un unique $\theta = \arg(z) \in]-\pi, \pi]$ appelé argument de z tels que $z = r\cos\theta + jr\sin\theta$ et

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $x = r\cos(\theta)$;
- $y = r\sin(\theta)$.

Remarque : lorsque z est un réel, le module est la valeur absolue, définie pour tout x dans $\mathbb{R}$, par $|x| = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$

3.3.1. - Arguments remarquables

Arguments remarquables

- si $z \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\arg\{z\} = 0$;
- si $z \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg\{z\} = \pi$;
- si $z = jy$ avec $y \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\arg\{z\} = \frac{\pi}{2}$;
- si $z = jy$ avec $y \in \mathbb{R}_-^*$, alors $\arg\{z\} = -\frac{\pi}{2}$.

3.3.1. - Exercices

Exercice 44. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

1. $z = 1 + j$
2. $z = 1 - j$
3. $z = 2 + 3j$
4. $z = -2 - 3j$

Exercice 45. *Donner la forme cartésienne des complexes dont le module et l'argument sont :*

1. $(1; \frac{\pi}{4})$
2. $(\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3})$
3. $(7;0)$
4. $(5;\pi)$
5. $(3; \frac{\pi}{2})$

3.3.1. - Propriétés du module d'un nombre complexe

Propriété 35 (Module).

Soient $z = x + jy$, $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ trois nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ *et* $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;
2. *Inégalité triangulaire :* $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
3. $zz^* = |z|^2$;
4. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{z^*}{|z|^2}$;
5. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$;
6. $|z^n| = |z|^n$.

3.3.1. - Exercices

Exercice 46. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

1 $z = \frac{1+j}{-1-j}$

2 $z = \frac{2+3j}{-2-3j}$

3 $z = \frac{2+3j}{1+j}$

4 $z = (1+j)(-1-j)$

5 $z = (5+3j)(5-3j)$

6 $z = (2+3j)(1+j)$

7 $z = (1+j)^2$

8 $z = (2+3j)^{-4}$

9 $z = \frac{1}{-2-3j}$

Exercice 47. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

1 $z = \frac{1}{3+j}$

2 $z = \frac{1}{-3+j}$

3 $z = \frac{1}{-2-2j}$

4 $z = \frac{1}{1+4j}$

Exercice 48. *Calculer le module des nombres complexes suivants :*

1 $z = \frac{1+j}{-2-j}$

2 $z = \frac{2+3j}{-2-2j}$

3 $z = \frac{2+3j}{2+j}$

4 $z = \frac{-2-j}{1-j}$

3.3.1. - Propriétés de l'argument

Propriété 36 (Argument).

Soient $z = x + jy$, $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$ trois nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

1. $\arg\{z_1 z_2\} \equiv \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\} \pmod{2\pi}$;
2. $\arg\{z_1/z_2\} \equiv \arg\{z\} - \arg\{z_2\} \pmod{2\pi}$;
3. $\arg\{1/z\} \equiv -\arg\{z\} \pmod{2\pi}$;
4. $\arg\{z^*\} \equiv -\arg\{z\} \pmod{2\pi}$;
5. $\arg\{z^n\} \equiv n\arg\{z\} \pmod{2\pi}$;

3.3.1. - Exercice

EXERCICE 49. *Propriétés de l'argument :* Soient $z_1 = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + j$. Sachant que $\cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$, donner le module et l'argument des complexes suivants :

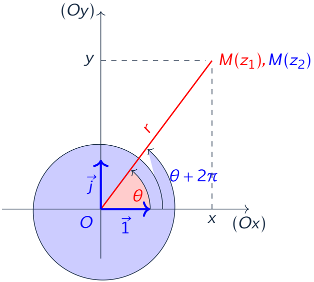
1 z_1	**2** z_2	**3** z_1^*	**4** z_2^*	**5** $1/z_1$	**6** $z_1 z_2$
7 z_2^2	**8** z_1^*/z_2	**9** z_1^4	**10** z_2^3	**11** z_1^{-4}	**12** jz_1

3.3.1. - De l'unicité de l'argument

Soient :

- z_1 de module r et d'angle θ
- z_2 de module r et d'angle $\theta + 2\pi$ (360°)

z_1 et z_2 définissent exactement le même point M du plan 2D . Donc $z_1 = z_2$.



Propriété 37 (Égalité de deux complexes).

Soient z_1 et z_2 deux complexes de module respectif r_1 et r_2 et d'angle avec $(0,x)$ respectif θ_1 et θ_2. Alors : $z_1 = z_2 \Leftrightarrow [r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}]$. Dire que $\theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}$ signifie qu'il existe une valeur $k \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$.

Pour définir un complexe z (et donc un point M) de **manière unique** à l'aide d'un couple module/angle (r, θ), il faut donc lever toutes ambiguïtés sur l'angle : c'est l'objectif de l'**argument** de z qui fournit une valeur d'angle limitée à $]-\pi;\pi]$.

3.3.1. - Argument d'un nombre complexe

Définition 38 (Argument d'un complexe non nul).

Soit $z = x + jy$ un complexe non nul. Alors : $\exists! \theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z|(\cos\theta + j\sin\theta)$. Ce nombre (réel), noté $\arg\{z\}$, est appelé **argument** de z. Il est tel que $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$ avec :

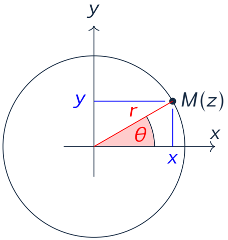
- si $x > 0$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
- si $x < 0$ et $y \geq 0$, $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$
- si $x < 0$ et $y < 0$, $\theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$
- si $x = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $y > 0$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$ si $y < 0$

Remarque : $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ et $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ désignent le même angle, à 2π près. Par commodité, on pourra alors simplement utiliser $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ lorsque $x < 0$ sans se préoccuper du signe de y.

3.3.2. - Notation exponentielle d'un complexe

Définition 39 (Notation exponentielle d'un complexe).

Soit $z = x + jy$ un complexe de module r et d'(unique) argument θ. Alors z se note sous la **forme exponentielle** $z = re^{j\theta}$.



Remarque : Pour faciliter les calculs, on utilise souvent la notation $re^{j\theta}$ même lorsque $\theta \notin]-\pi;\pi]$.

3.3.2. - Propriétés

Propriété 40 (Identification du module et de l'argument).

Si $r \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\theta \in]-\pi, \pi]$, *et* $z = re^{j\theta}$, *alors*

- $|z| = r$;
- $\arg\{z\} = \theta$.

Propriété 41 (Quelques complexes remarquables).

- $e^{j\theta}$ *est le nombre complexe de module* 1 *et d'argument* $\theta \pmod{2\pi}$;
- $e^{j0} = 1$, $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$, $e^{j\pi} = -1$, $e^{j2\pi} = 1$;
- $re^{j0} = r$, $re^{j\frac{\pi}{2}} = jr$, $re^{-j\frac{\pi}{2}} = -jr$, $re^{j\pi} = -r$, $re^{j2\pi} = r$.

3.3.2. - Exercices

Exercice 50. *Forme polaire* : Soit $z = 2 - j$.

1. Représenter z graphiquement ;
2. Donner la forme polaire de z.

Mêmes questions pour $z = -5 + 3j$. □

3.3.2. - Exercices

➔ EXERCICE 51. *Module et argument* : Déterminer le module et l'argument (en degrés et en radians) des nombres complexes suivants, et représentez-les graphiquement :

1. $z_1 = -1 - j$
2. $z_2 = 3 - j$
3. $z_3 = -2 + 4j$
4. $z_4 = \sqrt{3} + j$
5. $z_5 = -2 + j\sqrt{12}$
6. $z_6 = -4 + 4j$
7. $z_7 = 3 - 3j$
8. $z_8 = \dfrac{z_1}{z_2}$
9. $z_9 = \dfrac{z_1}{z_3}$
10. $z_{10} = \dfrac{z_2}{z_4}$

Éléments de réponse : $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg(z_1) = -135° = -\frac{3\pi}{4}$; $|z_2| = \sqrt{10}$, $\arg(z_2) = -\frac{180}{\pi}\arctan(\frac{1}{3})° = -\arctan(\frac{1}{3})$; $|z_3| = 2\sqrt{5}$, $\arg(z_3) = 180 - \frac{180}{\pi}\arctan(2)° = \pi - \arctan(2)$

3.3.2. - Exercices

Exercice 52. *Notation exponentielle* : Déterminer la notation exponentielle des nombres complexes suivants :

1. $z_8 = (-j)^{18}$
2. $z_9 = (1+j)^{-23}$
3. $z_{10} = (-\sqrt{3}+j)^{51}$
4. $z_{11} = \dfrac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$
5. $z_{12} = 1+\cos\varphi + j\sin\varphi$
6. $z_{13} = (1+j\tan\varphi)^2$

□

3.3.2. - Exercices

Exercice 53. *Module et argument* : Déterminer le module et l'argument du complexe z tel que $z = (1+j)^n + (1-j)^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

□

Exercice 54. *Module et argument* : Soit $z = e^{j\theta}$. Déterminer le module et l'argument du complexe Z défini par : $Z = z^2 + z$.

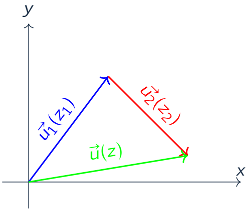
□

3.4.1. - Transformations du plan

Théorème 42 (Translation).

Soit z_1 (respectivement z_2) l'affixe du vecteur $\vec{u_1}$ (respectivement $\vec{u_2}$) et du point M_1 (respectivement M_2) du plan. Alors :

- *Le vecteur $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est d'affixe $z = z_1 + z_2$;*
- *Le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ est d'affixe $z = z_1 + z_2$;*
- *Plus généralement le point $A(a)$, translaté du point $B(b)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(u)$, est d'affixe $a = b + u$;*

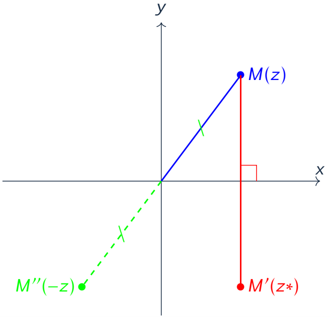


3.4.1. - Transformations du plan

Théorème 43 (Symétries).

Soit z un complexe, affixe du point M. Alors :

- *Le point $M'(z')$, symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses (O,x), est d'affixe $z' = z^*$;*
- *Le point $M''(z'')$, symétrique de M par rapport à l'origine, est d'affixe $z'' = -z$.*

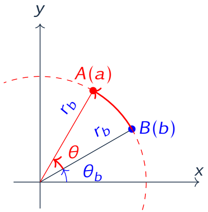


3.4.1. - Rotations

Théorème 44 (Rotations).

Soit B le point du plan d'affixe $b = x_b + jy_b = r_b \exp(j\theta_b)$.

- *La rotation de centre 0 et d'angle θ transforme le point B en le point B' d'affixe $b' = x_{b'} + jy_{b'} = r_b \exp(j(\theta_b + \theta))$ avec $b' = b\exp(j\theta)$, $x_{b'} = x_b\cos(\theta) - y_b\sin(\theta)$ et $y_{b'} = x_b\sin(\theta) + y_b\cos(\theta)$.*
- *La rotation de centre $A(a)$ et d'angle θ transforme le vecteur $\overrightarrow{AB}\,(b-a)$ en le vecteur $\overrightarrow{AB'}\,(b'-a)$ avec $b' - a = (b-a).\exp(j\theta))$, autrement dit $b' = a + (b-a)\exp(j\theta)$, $x_{b'} = x_a + (x_b - x_a)\cos(\theta) - (y_b - y_a)\sin(\theta)$ et $y_{b'} = y_a + (x_b - x_a)\sin(\theta) + (y_b - y_a)\cos(\theta)$*



3.4.2. - Produit scalaire

Définition 45 (Produit scalaire).

Soient $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives $z_1 = x_1 + jy_1$ et $z_2 = x_2 + jy_2$. Alors le **produit scalaire de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$**, noté $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$, est le nombre réel défini par :

- Définition géométrique : $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\| \|\vec{u}_2\| \cos\left(\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)}\right)$.
- Définition analytique : $\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$;
- Définition avec les nombres complexes : $\langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle = \mathrm{Re}\{z_1^* z_2\}$.

Rappels :

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'il existe un réel λ non nul tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$;
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

3.4.3. - Lieu géométrique

Définition 46 (Lieu géométrique).

Le **lieu géométrique** est l'ensemble des points (ou de manière équivalente leurs affixes complexes) satisfaisant une condition donnée.

Exemple 47 (Des lieux géométriques : droites, cercles, disques, ...).

Soient a, b et u trois nombres complexes. Alors :

1. La droite passant par le point $A(a)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u)$ est d'**équation paramétrique** $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / z = a + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}\}$;
2. La droite passant par le point $A(a)$ et de vecteur normal $\vec{u}(u)$ est d'équation $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}\{(z-a)^* u\} = 0\}$;
3. La droite passant par les points $A(a)$ et $B(b)$ est d'**équation paramétrique** $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / z = a + \lambda(b-a), \lambda \in \mathbb{R}\}$;
4. Le cercle de centre $A(a)$ et de rayon R est : $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| = R\}$;
5. Le disque ouvert de centre $A(a)$ et de rayon R est : $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z-a| < R\}$.

3.4.3. - Exercices

Exercice 55. *Équation de droite :* Déterminer l'équation de la droite $\mathcal{D}$:

1. passant par le point $M(1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,-1)$.
2. passant par le point $M(1,2)$ et de vecteur normal $\vec{u}(1,-1)$.
3. passant par les points $M(1,2)$ et $N(-1,1)$.

□

3.4.3. - Exercices

Exercice 56. *Équation de droite :* Déterminer les équations des droites :

1. passant par les points $A(1,2)$ et $B(-1,0)$; (solution : $x - y + 1 = 0$) ;
2. passant par $M(1,1)$ et de vecteur normal $\vec{u}(1,2)$; (solution : $x + 2y - 3 = 0$)
3. passant par $M(1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,2)$; (solution : $2x - y - 1 = 0$) ;
4. médiatrice du segment $[AB]$ avec $A(1,2)$ et $B(-1,0)$ (rappel : la médiatrice de $[AB]$ est la droite orthogonale à la droite (AB) passant par le milieu du segment $[AB]$) ;
5. passant par $A(1,2)$ et perpendiculaire à la droite (AB) avec $B(-1,0)$.

□

3.4.3. - Exercices

EXERCICE 57. *Équations de droite dans le plan :* Soient $M_1(x_1,y_1)$ et $M_2(x_2,y_2)$ deux points du plan et soit $\vec{u}(\alpha,\beta)$ un vecteur. Déterminer l'équation de la droite :

1. passant par M_1 et de vecteur directeur $\vec{u}$;
2. passant par M_1 et de vecteur normal $\vec{u}$;
3. passant par M_1 et M_2 ;
4. médiatrice du segment $[M_1M_2]$;
5. passant par M_1 et perpendiculaire à la droite (M_1M_2).

□

3.4.3. - Exercices

Exercice 58. *Droites dans le plan :* Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ et soit $P(x_P,y_P)$ un point du plan.

1. À quelle condition $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ?
2. À quelle condition $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles orthogonales ?
3. Quelle est la distance de P à la droite $\mathcal{D}$?

□

Exercice 59. *Lieu géométrique :* Déterminer l'ensemble des affixes satisfaisant les relations :

1 $\mathrm{Im}(z)>1$ 2 $\mathrm{Re}(z)\geq\frac{1}{2}$ 3 $0\leq\arg(z)\leq\frac{\pi}{4}$ 4 $|2z-3|>3$

□

3.5. - Formules d'Euler

Théorème 48 (Formules d'Euler).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. *Alors :* $\cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

Exercice 60. *Linéarisation de* $\sin^2(x)$:

1. Montrer que $\sin^2(x) = \dfrac{e^{2jx} + e^{-2jx} - 2}{-4}$ en utilisant une formule d'Euler ;
2. En déduire que $\sin^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

□

Exercice 61. *Linéarisation d'expressions trigonométriques* :

En s'inspirant de l'exercice précédent, linéariser les expressions suivantes :

1. $s_1(t) = \cos^2(t)$
2. $s_2(t) = \cos^3(t)$
3. $s_3(t) = \cos(t)\sin(t)$
4. $s_4(t) = \sin^3(t)$
5. $s_5(t) = \cos^2(t)\sin(t)$
6. $s_6(t) = \cos(t)\sin^2(t)$

3.5. - Formule de Moivre

Théorème 49 (Formule de Moivre).

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta$

Exercice 62. *Factorisation de* $\cos(2x)$ *et* $\sin(2x)$:

1. Développer l'expression $(\cos(x) + j\sin(x))^2$;
2. En déduire que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ et $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ en utilisant le formule de Moivre.

□

Exercice 63. *Factorisation d'expressions trigonométriques* :

En s'inspirant de l'exercice précédent, factoriser les expressions suivantes :

1. $s_1(t) = \cos(3t)$
2. $s_2(t) = \sin(3t)$
3. $s_3(t) = \cos(4t)$
4. $s_4(t) = \sin(4t)$

□

3.6. - Racines carrées complexes

Problème

Soit $z_0 = x_0 + jy_0 = r_0 e^{j\theta_0}$ avec x_0, y_0, r_0 et θ_0, la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de $z_0 \in \mathbb{C}$, respectivement. On cherche à résoudre l'équation :

$$z^2 = z_0, \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

➔ Exercice 64. *Racines carrées complexes* : Calculer les racines carrées complexes des nombres complexes suivants (on donnera la réponse sous forme cartésienne et sous forme exponentielle) :

1 $z_0 = j$ 2 $z_1 = 1 + j$ 3 $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$ 4 $z_2 = 2\exp(j\frac{\pi}{6})$ □

➔ Exercice 65. *Résolution d'équation* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = \sqrt{3} + j$, en déduire l'expression exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

□

3.6. - Racines complexes d'un polynôme du second degré

Théorème 50 (racines complexes d'un polynôme du second degré à coefficients réels).

Soient, a, b et c trois nombres réels, avec $a \neq 0$. si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ possède deux solutions complexes conjuguées $x_1 = \frac{-b-j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = x_1^* = \frac{-b+j\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

➔ EXERCICE 66. *Racines :* Déterminer les solutions, éventuellement complexes, des équations :

1. $x^2 + x + 1 = 0$;
2. $x^2 - x + 1 = 0$;
3. $2x^2 + 2x + 1 = 0$;
4. $x^2 + 1 = 0$;
5. $x^4 - x^2 - 2 = 0$.

3.6. - Racines d'un polynôme du second degré à coefficients complexes

Théorème 51.

Racines complexes d'un polynôme du second degré à coefficients complexes Soient, a, b et c trois nombres complexes, avec $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ avec δ une racine carrée complexe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

➔ EXERCICE 67. *Racines d'un polynôme du second degré à coefficients complexes :* Résoudre l'équation $x^2 - (1+j)x + j = 0$. □

3.6. - Exercices

Exercice 68. *Résolution d'équation* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(8+6j)z+15+30j=0$, la méthode de résolution des équations du second degré à coefficients réels restant valable pour les coefficients complexes.

Exercice 69. *Résolution d'équation* : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

1. $z^5+1-j=0$
2. $z^5-(-1+j)^{-1}=0$

3.6. - Racines énièmes de l'unité

Problème

Chercher les racines énièmes de l'unité, c'est chercher les complexes z tels que $z^n = 1$.

Théorème 52 (Racine énième de l'unité).

En posant $z = r.\exp(j\theta)$, on a : z est solution du problème ssi $r = 1$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il y a donc n solutions $z_k = e^{j\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Démonstration.

Il suffit d'égaler les modules et arguments de z et de 1. □

3.6. - Racines énièmes d'un nombre complexe

Définition 53 (Racines énièmes d'un nombre complexe).

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines énièmes de z_0 sont les nombres complexes z solutions de l'équations $z^n = z_0$.

Théorème 54 (Racines énièmes d'un nombre complexe).

Les racines énièmes du nombre compelxe $z_0 = \rho \exp(j\varphi)$ sont les n nombres complexes $z_k = \sqrt[n]{\rho} \exp\left(j\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$ avec $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

3.6. - Exercices

Exercice 70. *Racines énièmes* :

1. Donner les racines cinquièmes de l'unité.
2. Donner les racines cubiques de -1.
3. Calculer les racines :

1 $5^{\text{ièmes}}$ de 1	2 $4^{\text{ièmes}}$ de -1	3 cubiques de j
4 carrées de $-j$	5 $5^{\text{ièmes}}$ de $1+j$	6 $5^{\text{ièmes}}$ de $\sqrt{3}+j$

Réponses : 1 $\omega_k = \exp(j\frac{2k\pi}{5})$, avec $0 \leq k \leq 4$; 2 $\omega_k = \exp(j\frac{(2k+1)\pi}{4})$, avec $0 \leq k \leq 3$; 3 $\omega_k = \exp(j\frac{(2k+1/2)\pi}{3})$, avec $0 \leq k \leq 2$

3.6. - Exercices

Exercice 71. *Résolution d'équations :* Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $(1+z)^n = (1-z)^n$
2. $z^5 + 1 - j = 0$
3. $z^5 - (-1+j)^{-1} = 0$
4. $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$

$\square$

3.7. - Application à l'électricité : circuits RLC en régime harmonique

Dans un problème d'électricité, on a généralement affaire à :

- une tension : $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Re}\{U_0 e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}\}$
- une intensité : $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) = \mathrm{Re}\{I_0 e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}\}$

En utilisant les complexes, on peut définir :

- Tension/intensité complexe $\underline{U} = U_0 e^{j\varphi_u}$ et $\underline{I} = I_0 e^{j\varphi_i}$ amplitudes complexes de la tension et de l'intensité
- impédance complexe : $Z = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX$ avec R la résistance et X la réactance
- bobine, inductance L : $u = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow u(t) = -L\omega I_0 \sin(\omega t + \varphi_i)$ et $\underline{U} = Z\underline{I}$ avec $Z = jL\omega$
- condensateur, capacité C : $i = C\dfrac{du}{dt} \Rightarrow i(t) = -C\omega U_0 \sin(\omega t + \varphi_u)$ et $\underline{U} = Z\underline{I}$ avec $Z = \dfrac{1}{jC\omega}$