Mathématiques des systèmes numériques Ressource R213

Cyrille SICLET, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr
Kévin KASPER, kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr
Jean-Marc THIRIET, jean-marc.thiriet@univ-grenoble-alpes.fr
Cléo BARAS, cleo.baras@univ-grenoble-alpes.fr

Version 2024-2025

Table des matières

1 Introduction aux signaux discrets

Définition 1 (Les signaux discrets)**.**
Les signaux discrets sont des fonctions de la variable temporelle entière k. Ils véhiculent une information délivrée par l'évolution d'une grandeur physique mesurée à des instants t_k, et peuvent être de natures variées :

- en **électronique** : signal de tension ou d'intensité ;
- en **télécommunication** : signal électromagnétique en sortie d'un modulateur ;
- en **téléphonie** : signal de parole, signal vidéo pour une visioconférence.

Contexte général du cours
En mathématiques, on utilise souvent les lettres n ou k pour désigner des variables entières, et la lettre u pour désigner une suite dont le terme général u_n est fonction d'un paramètre entier n. Dans ce cours on utilisera cette notation usuelle pour décrire des propriétés mathématiques générales. Quand on fera référence à un signal discret, on utilisera plutôt la notation $s[k]$ pour désigner un signal s dépendant d'un paramètre entier k représentant le temps discret.

T.7

Signal continu (analogique)
Variable temporelle t réelle : signal $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Signal discret (numérique)
Variable temporelle k entière : signal $s[k]$, $k \in \mathbb{Z}$

Passage du continu au discret : échantillonnage
échantillonnage d'un signal continu $s(t)$ à la période T_e : $s[k] = s(t_0 + kT_e)$ avec t_0 instant arbitraire (souvent, $t_0 = 0$)

T.8

1.1 Rappels sur les suites numériques

1.1.1 Définitions

Définition 2 (Suite numérique)**.** Une **suite numérique** u est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, et notée : $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$.
On appelle n le **rang** et u_n est le **terme général** de la suite.

T.9

Exemple 3 (Une suite). $u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ n \mapsto \frac{1}{4}n + \frac{1}{2} \end{cases}$ est une suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{4}n + \dfrac{1}{2}$. Sa représentation est donnée à la figure 1.

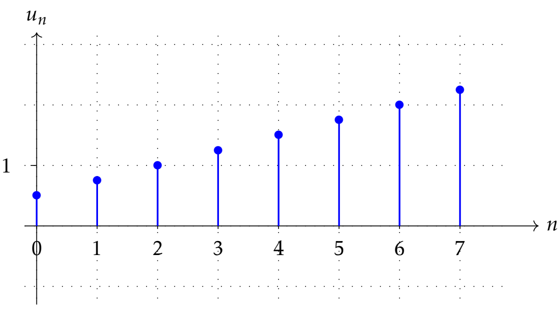

Figure 1 – Représentation d'une suite.

Remarque : Une suite u peut n'être définie qu'**à partir d'un certain rang** (apcr.) n_0 : cela signifie que
T.10 u_n n'est donné que pour $n \geq n_0$.

1.1.2 Caractéristiques

1.1.2.A Sens de variation

Définition 4 (Sens de variation)**.** Soient une suite u et $n_0 \in \mathbb{N}$. u est :

1. **croissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$
2. **strictement croissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n$
3. **décroissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$
4. **strictement décroissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} < u_n$
5. **monotone** apcr. n_0 si et seulement si u est croissante ou décroissante apcr. n_0

➔ EXERCICE 1. *Sens de variation* :

En calculant le signe de $u_{n+1} - u_n$ déterminer si le sens de variation des suites de termes généraux suivants : (on indiquera le terme à partir duquel la suite est croissante ou décroissante) :

1 $u_n = n^2 - 2n - 1$ **2** $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ **3** $u_n = \sqrt{n}$

☐

T.11

1.1.2.B Bornes

Définition 5 (Suite majorée, minorée, bornée)**.** Soient une suite u et $n_0 \in \mathbb{N}$. La suite u est :

1. **majorée** apcr. n_0 si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq M$
2. **minorée** apcr. n_0 si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq m$
3. **bornée** apcr. n_0 si et seulement si u est majorée et minorée

➔ EXERCICE 2. *Suite majorée, minorée, bornée* :

Montrer que pour $n \geq 0$:

1 $n^2 - 2n - 1 \geq -2$ **2** $-1 \leq \frac{n-1}{n+1} < 1$ **3** $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq 1$

☐

T.12

1.1.2.C Suites alternées

Définition 6 (Suite alternée)**.** Une suite u est alternée apcr. n_0 si pour tout $n \geq n_0$, u_n et u_{n+1} sont de signes opposés, autrement dit : $\forall n \geq n_0, u_n u_{n+1} < 0$

Exemple 7 (Une suite alternée). La suite u de terme général $u_n = (-1)^n$ est alternée. Sa représentation est donnée figure 2.

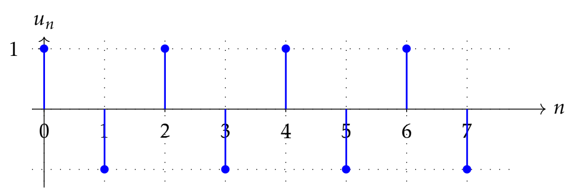

FIGURE 2 – Une suite alternée.

T.13

1.1.3 Comportement asymptotique d'une suite

1.1.3.A Convergence

Définition 8 (Suite convergente)**.** Soit $L \in \mathbb{R}$. Une suite u est **convergente** de **limite** L en $+\infty$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in]n_0; +\infty[, \left|u_n - L\right| < \epsilon$. On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim u = L$.

Exemple 9 (Une suite convergente). La suite u de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ est convergente de limite $L = 1$ comme l'illustre son graphe donné figure 3.

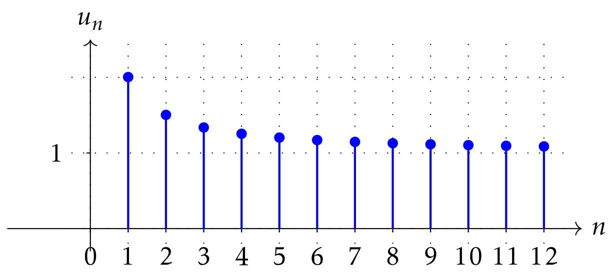

Figure 3 – Une suite convergente.

T.14

1.1.3.B Divergence

Définition 10 (Divergence)**.** Une suite u est **divergente** si elle n'est pas convergente. Elle peut :

- être **divergente de limite** $+\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in]n_0, +\infty[, u_n > A$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim u = +\infty$
- être **divergente de limite** $-\infty$ si et seulement si $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in]n_0, +\infty[, u_n < A$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim u = -\infty$
- être **divergente sans limite**

T.15

Exemple 11 (Des suites divergentes). 1. $u_n = \frac{n}{2}$ est divergente de limite $L = +\infty$ (cf. figure 4)

2. $v_n = -\frac{n}{2}$ est divergente de limite $L = -\infty$ (cf. figure 4)
3. $w_n = (-1)^n$ est divergente sans limite (cf. figure 2)

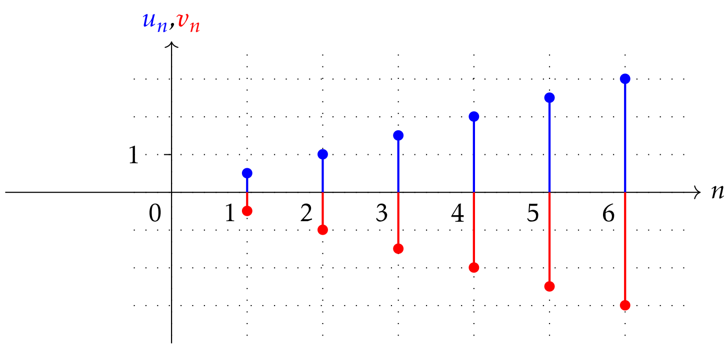

Figure 4 – Des suites divergentes.

T.16

Pour $c \in \mathbb{R}$ une constante réelle, $k \in \mathbb{N}^*$ un entier positif non nul, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ une constante réelle positive, v_n suite telle que $\lim v = +\infty$:

u_n	c	v_n^k	$\frac{1}{v_n^k}$	$\sqrt{v_n}$	$\sqrt[k]{v_n}$	v_n^α	$v_n^{-\alpha}$
Limite	$L = c$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+

u_n	$\ln(v_n)$	$\exp(v_n)$	$\cos(v_n)$	$\sin(v_n)$	$n!$
Limite	$+\infty$	$+\infty$	p.d.l.[1]	p.d.l.	$+\infty$

Note : si $v_n = v_0 + 2n\pi$, on a $\cos(v_n) = \cos(v_0)$ et $\sin(v_n) = \sin(v_0)$. De plus, si $v_n = n\pi$ alors $\sin(v_n) = 0$ et si $v_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\cos(v_n) = 0$. Dans tous ces cas particuliers, $\cos(v_n)$ et $\sin(v_n)$ sont en fait des suites constantes et donc convergentes. Dans les autres cas il n'y a pas de limite. T.17

Les limites de suites obtenues par addition, multiplication et division sont données table 1.

	$\lim\limits_{+\infty} u$	$\lim\limits_{+\infty} v$	$\lim\limits_{+\infty} \lambda u$	$\lim\limits_{+\infty} u+v$	$\lim\limits_{+\infty} u.v$	$\lim\limits_{+\infty} \frac{u}{v}$
Finie-Finie	L_u	L_v	λL_u	$L_u + L_v$	$L_u L_v$	$\frac{L_u}{L_v}$
	L_u	0^+	λL_u	L_u	0	$\operatorname{sign}(L_u)\infty$
	L_u	0^-	λL_u	L_u	0	$-\operatorname{sign}(L_u)\infty$
	0	0	0	0	0	FI
Finie-Infinie	$s\infty$	L_v	$\operatorname{sign}(s\lambda)\infty$	$s\infty$	$\operatorname{sign}(sL_v)\infty$ si $L_v \neq 0$ FI si $L_v = 0$	$\operatorname{sign}\left(\frac{s}{L_v}\right)\infty$
	L_u	$s\infty$	λL_u	$s\infty$	$\operatorname{sign}(sL_u)\infty$ si $L_u \neq 0$ FI si $L_u = 0$	0
Infinie-Infinie	$+\infty$	$+\infty$	$\operatorname{sign}(\lambda)\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
	$-\infty$	$-\infty$	$-\operatorname{sign}(\lambda)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
	$+\infty$	$-\infty$	$\operatorname{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI
	$-\infty$	$+\infty$	$-\operatorname{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI

Table 1 – Opérations sur les limites asymptotiques avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et s un signe (égal à $+1$ ou -1) ; l'abréviation FI indique une forme indéterminée.

T.18

Propriété 12. *Soient u, v et w trois suites définies apcr. n_0.*

1. *Si (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers une limite l inférieure à tous ses majorants*
2. *Si (u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers une limite l supérieure à tous les minorants*

Propriété 13. *Si $\forall n > n_0, u_n \leq w_n \leq v_n$, et si $\lim u = \lim v = l$, alors $\lim w = l$.*

Propriété 14. *Si $\forall n > n_0, v_n \geq u_n$,*

1. *si $\lim u = +\infty$, alors $\lim v = +\infty$*
2. *si $\lim v = -\infty$, alors $\lim u = -\infty$*

T.19

Exercice 3. *Convergence d'une suite numérique* :
Déterminer si les suites u suivantes sont convergentes et si oui, quelles sont leurs limites ?

1 $u_n = \dfrac{3n-1}{7n+2}$ **2** $u_n = \dfrac{n^2+1}{7n+2}$ **3** $u_n = \dfrac{n.(-1)^n+1}{n+1}$

□

1. p.d.l. : pas de limite

➔ Exercice 4. *Convergence de suites numériques* :
Étudier la convergence des suites u dont le terme général u_n est :

1 $\dfrac{2n-4}{3n+5}$ 2 $n^3 - 2n^2$ 3 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 4 $\dfrac{\cos(n)}{n}$
5 $\dfrac{\exp(2n+1)}{\exp(3n-1)}$ 6 $\dfrac{n!}{2^n}$ 7 $\dfrac{n!}{n^n}$ 8 $\dfrac{1}{n+(-1)^n}$ □

T.20

1.2 Suites récurrentes

1.2.1 Définitions

Définition 15 (Suite récurrente)**.** Une **suite récurrente** u est une suite définie implicitement par une relation de récurrence permettant de calculer le terme u_n à partir des termes précédents et de n : $u_n = \phi(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, n)$, où ϕ est une fonction.

Exemple 16 (La suite de Fibonacci). Elle est définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et par deux conditions initiales imposant u_0 et u_1.

T.21

Méthodologie 17 (Démonstration par récurrence)**.** *Pour démontrer qu'une propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$:*

1. *On démontre la propriété au rang n_0, i.e. on démontre que $\left(\mathcal{P}_{n_0}\right)$ est vrai.*
2. *On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai pour n quelconque et on démontre que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai (souvent en utilisant la relation de récurrence liant $(\mathcal{P}_n)$ à $(\mathcal{P}_{n+1})$).*

➔ Exercice 5. *Somme des entiers de 1 à n* : montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

➔ Exercice 6. *Somme des puissances de q* : montrer par récurrence que pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. □

T.22

1.2.2 Suites récurrentes classiques

1.2.2.A Suite géométrique de raison q

Définition 18 (Suite géométrique de raison q)**.** Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite u est **géométrique de raison** q lorsqu'elle est définie par la relation de récurrence : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = q\, u_n$.

Théorème 19 (Suite géométrique de raison q)**.** *Soit $q \in \mathbb{C}$. u est une suite géométrique de raison q si et seulement si $\forall 0 \leq k \leq n$, $u_n = u_k\, q^{n-k}$.*

Démonstration. Par récurrence □

T.23

1.2.2.B Suite arithmétique de raison q

Définition 20 (Suite arithmétique de raison q)**.** Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite u est **arithmétique de raison** q lorsqu'elle est définie par la relation de récurrence : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + q$.

Théorème 21 (Suite arithmétique de raison q)**.** *Soit $q \in \mathbb{C}$. u est une suite arithmétique de raison q si et seulement si* $\forall 0 \leq k \leq n$, $u_n = u_k + (n-k)q$.

Démonstration. Par récurrence □

T.24

➔ Exercice 7. *Soit u_n la suite définie par la relation : $u_{n+1} = u_n - 3$, avec $u_0 = 1$:*

1. Quelle est la nature de cette suite ?
2. Calculer u_{12}.
3. u_n est-elle divergente ou convergente ? Calculer la limite si elle existe.

□

➔ Exercice 8. *Mêmes questions pour :*

1 $u_{n+1} = 2u_n$ **2** $u_{n+1} = 0.5u_n$ **3** $u_{n+1} = u_n + 1$

□

➔ Exercice 9. *Récurrence :* Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. **Inégalité de Bernoulli** : pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$

□

T.25

1.3 Signaux discrets

1.3.1 Signaux discrets usuels

Notation

Un signal discret est une suite $\{x[k]\}$ à termes réels ou complexes définie par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{C} \\ k &\mapsto x[k] \end{aligned}$$

Remarque : par abus de langage, on désignera souvent un signal par $x[k]$ au lieu de $\{x[k]\}$.

T.26

Définition 22 (Impulsion de Kronecker)**.** On appelle **impulsion de Kronecker** la suite $\delta = \{\delta[k]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par : $\delta : \begin{cases} \delta[0] = 1 & \\ \delta[k] = 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$. Ce signal est représenté graphiquement figure 5.

T.27

Définition 23 (Échelon unité)**.** On appelle **suite unité** ou **échelon unité**, la suite $u = \{u[k]\}_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par : $u : \begin{cases} u[k] = 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ u[k] = 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}$. Ce signal est représenté graphiquement figure 6.

T.28

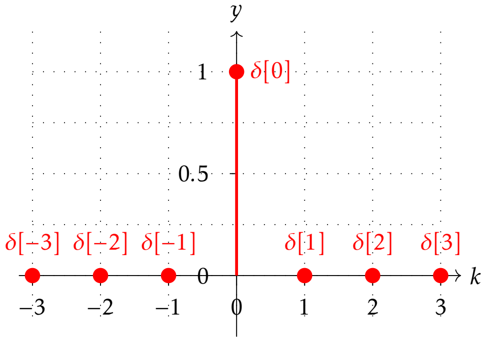

FIGURE 5 – Impulsion de Kronecker $\delta = \{\delta[k]\}_{k\in\mathbb{N}}$.

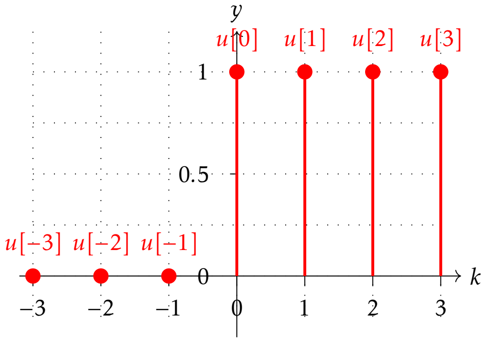

FIGURE 6 – Echelon $u = \{u[k]\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

1.3.2 Propriétés temporelles

Définition 24 (Signal discret causal)**.** Lorsque $x[k] = 0$ pour $k < 0$, on dit que x est causal.

Propriété 25 (Rendre un signal causal)**.** *Tout signal x, multiplié par l'échelon unité u, devient causal.*

Définition 26 (Signal discret de durée finie)**.** On dit que x est de durée finie lorsqu'il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que $x[k] = 0$ pour $k < k_1$ et $k > k_2$.

Définitions 27 (Avance, retard)**.** Étant donné un signal x et k_0 un entier naturel, on définit le signal y comme :

- le **signal retardé** de k_0 échantillons par : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y[k] = x[k - k_0]$; la représentation de y est celle de x décalée de k_0 échantillons vers la droite.
- le **signal avancé** de k_0 échantillons par : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y[k] = x[k + k_0]$; la représentation de y est celle de x décalée de k_0 échantillons vers la gauche.

T.29

EXERCICE 10. *Signaux discrets* :

- Représenter graphiquement les signaux suivants pour $-3 \leq k \leq 10$:
  1 $s[k] = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1]$ 2 $s[k] = u[k] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$
  3 $s[k] = u[k] + \frac{1}{2}u[k-1]$ 4 $s[k] = u[k+1] - u[k-1]$
  5 $s[k] = u[k] - \frac{1}{2}u[k-1]$ 6 $s[k] = ku[k]$
  7 $s[k] = u[k] + \frac{k}{2}u[k-1]$ 8 $s[k] = (k+1)u[k+1] - (k-1)u[k-1]$
- Parmi les signaux précédents, lesquels sont causaux ? De durée finie ?

□

T.30

1.3.3 Systèmes discrets

Définition 28 (Système discret)**.** Un système discret F est une transformation d'une suite $x[k]$ (entrée du système) en une suite $y[k] = \mathrm{F}\{x[k]\}$ (sortie).

Définition 29 (Systèmes discrets linéaires)**.** On dit qu'un système discret F est linéaire lorsque $\mathrm{F}\{\alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k]\} = \alpha_1 \mathrm{F}\{x_1[k]\} + \alpha_2 \mathrm{F}\{x_2[k]\}$
avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ et $x_1[k]$ et $x_2[k]$ deux signaux discrets.

Définition 30 (Système discrets invariants)**.** On dit qu'un système discret F est invariant lorsque $\mathrm{F}\{x[k-n]\} = y[k-n]$ pour tous k,n entiers.

Exemples 31 (Systèmes linéaires, invariants... ou pas).

- $y[k] = x^3[k]$: non linéaire, invariant ;
- $y[k] = kx[k]$: linéaire, non invariant ;
- $y[k] = 3x[k] + 2x[k-1]$: linéaire et invariant.

T.31

Propriété 32 (Équation aux différences)**.** *Un système discret est linéaire et invariant (SLI) si et seulement si sa sortie $y[k]$ peut être calculée à partir de son entrée $x[k]$ par une **équation aux différences** du type :* $\sum_{n=0}^{N} a_n y[k-n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[k-m]$.

Opérateurs élémentaires.
Un SLI discret peut être réalisé à l'aide des trois opérateurs de base :

- retard $y[k] = x[k-1]$;
- amplification a : $y[k] = ax[k]$;
- addition : $y[k] = x_1[k] + x_2[k]$.

Exemples 33 (Relations entrée-sortie).

- $y[k] = x[k] + 2x[k-1]$
- $y[k] - ay[k-1] = x[k-1]$ (Système récursif du premier ordre)

T.32

Définition 34 (Réponse impulsionnelle)**.** On appelle réponse impulsionnelle d'un SLI discret la réponse (sortie) du système à l'impulsion de Kronecker $\delta[k]$ (entrée du système) : $h[k] = \mathrm{F}\{\delta[k]\}$

Définition 35 (Filtre numérique)**.** Un SLI discret est aussi appelé filtre numérique.

T.33

Définition 36 (Système (filtre) causal)**.** Un SLI est dit causal si sa réponse impulsionnelle $h[k]$ est causale.

Définition 37 (Système (filtre) à réponse impulsionnelle finie ou infinie)**.** Un SLI est dit à réponse impulsionnelle finie (RIF) si $h[k]$ est à durée limitée. Dans le cas contraire, on dit qu'il est à réponse impulsionnelle infinie (RII).

➔ Exercice 11. *Réponse impulsionnelle* :

Donner la réponse impulsionnelle des systèmes régis par les relations entrée sorties suivantes et indiquer si le système est causal, RIF ou RII :

1 $y[k] = x[k] + \frac{1}{2}x[k-1]$

2 $y[k] = 2x[k+1] + \frac{1}{2}x[k-1]$

3 $y[k] = x[k] + x[k-1] + x[k-2]$

□

T.34

Théorème 38 (Produit de convolution)**.** *La sortie d'un SLI de réponse impulsionnelle finie causale h et d'entrée x, est le signal y défini par :* $y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]x[k-n]$ *où l'opération $*$ est appelé* ***produit de convolution*** *et $h[k] = 0$ pour $k \geq L \in \mathbb{N}$.*

➔ Exercice 12. *On applique un signal $x[k]$ à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h[k]$. Donner la réponse $y[k]$ obtenu en sortie du filtre lorsque :*

1. $x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] + 3\delta[k-1]$;
2. $x[k] = \delta[k] + \delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] - \delta[k-1]$;
3. $x[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] - 2\delta[k-1]$.

□

T.35

Propriété 39 (Produit de convolution)**.** *Soient s_1, s_2, s_3 trois signaux, λ un réel et k_0 un entier. Alors :*

1. ***Multiplication par une constante*** : $(\lambda s_1) * s_2 = \lambda(s_1 * s_2)$;
2. ***Commutativité*** : $s_1 * s_2 = s_2 * s_1$;
3. ***Associativité*** : $(s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3)$;
4. ***Distributivité par rapport à l'addition*** : $s_1 * (s_2 + s_3) = (s_1 * s_2) + (s_1 * s_3)$;
5. ***Convolution avec une impulsion de Kronecker*** : $s * \delta = s$ *et* $s[k] * \delta[k-k_0] = s[k-k_0]$.

➔ Exercice 13. *On applique un signal $x[k]$ à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h[k]$.Appliquer les propriétés précédentes pour calculer la réponse $y[k]$ obtenu en sortie du filtre lorsque :*

1. $x[k] = \delta[k] - 3\delta[k-1]$ et $h[k] = 2\delta[k] + 3\delta[k-2]$;
2. $x[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-2]$ et $h[k] = \delta[k] - 2\delta[k-1] + \delta[k-3]$.

□

T.36

2 De la géométrie 2D à l'algèbre linéaire nD

2.1 Éléments de géométrie 2D

2.1.1 Point dans l'espace 2D

Dans le plan (l'**espace 2D**), un **point** $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ est identifié par un couple **ordonné** de valeurs réelles m_1 et m_2.

Muni du **repère cartésien orthonormé** de centre $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$ sur l'axe $[0x)$ et $\vec{\jmath}$ sur l'axe $[Oy)$ (cf. figure 7), le couple de valeurs $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ donne les **coordonnées** de M :

- m_1 est son **abscisse** : c'est la distance qui sépare le point M de l'axe des ordonnées
- m_2 est son **ordonnée** : c'est la distance qui sépare le point M de l'axe des abscisses

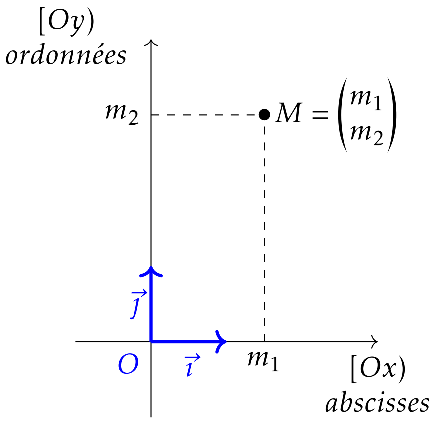

FIGURE 7 – Repérage d'un point dans le plan 2D.

T.38

2.1.2 Vecteurs 2D

2.1.2.A Vecteurs, des déplacements

Définition 40 (Du point au vecteur)**.** Partant d'un point $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ dans le repère cartésien, le **vecteur** $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ est l'**entité** qui décrit le déplacement allant de O (point de départ) à M (point final). (cf. figure 8.) Il consiste à se déplacer de m_1 dans le sens de $\vec{\imath}$ puis de m_2 dans le sens de $\vec{\jmath}$. On le note : $\boxed{\overrightarrow{OM} = m_1\vec{\imath} + m_2\vec{\jmath}}$.

Cas particuliers : le vecteur nul, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

Le vecteur nul est $\vec{0} = \overrightarrow{OO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

T.39

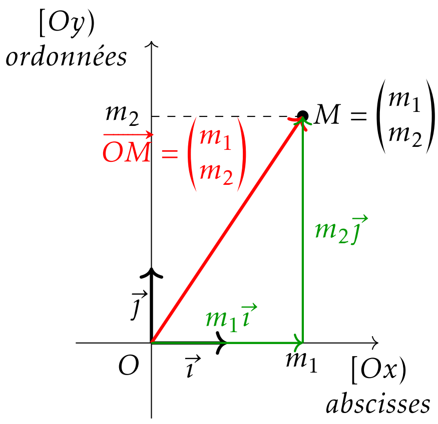

FIGURE 8 – Vecteur en 2D.

2.1.2.B Vecteurs, déplacements indépendants de leur point de départ

Définition 41 (Un vecteur à partir de ses deux extrémités). Pour deux points $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le couple de valeurs $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit donc : $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{\imath} + (b_2 - a_2)\vec{\jmath}$. (cf. figure 9).

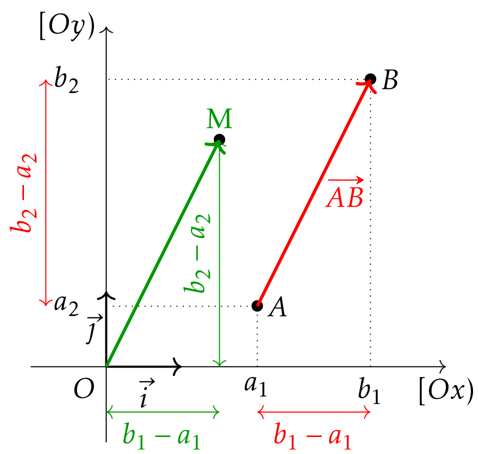

FIGURE 9 – Vecteur en 2D.

⚠ Remarque : Puisqu'un vecteur est une **mesure de déplacement**, il est égal au vecteur $\overrightarrow{OM}$ où M est le point $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

➔ EXERCICE 14. *Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec :*

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

□

T.40

Définition 42 (Description d'un vecteur). Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (cf. figure 8) peut se décrire à l'aide :

1. d'une **direction** : celle de la droite (OM)
2. d'un **sens** : celui allant de O vers M
3. d'une **longueur** : celle du segment $[OM]$

Puisqu'il exprime un déplacement, il n'est pas nécessaire d'en exprimer les points d'extrémités et on le notera plus généralement $\vec{v}$.

T.41

2.1.3 Égalité de deux vecteurs

Théorème 43 (Égalité de deux vecteurs). *Deux vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *sont égaux*

$\iff$ *leurs coordonnées sont égales :*

$$\begin{cases} u_1 = v_1 & \text{(égalité des abscisses)} \\ u_2 = v_2 & \text{(égalité des ordonnées)} \end{cases}$$

$\iff$ *leur direction, leur sens et leur longueur sont égaux.*

⚠ **Remarque** : Deux vecteurs sont de même direction s'ils sont portés par (ou s'ils dirigent) des droites parallèles.

T.42

2.1.4 Vecteurs colinéaires

Définition 44 (Vecteurs colinéaires). Des vecteurs sont **colinéaires** s'ils sont de même direction (mais pas nécessairement de même sens ni de même longueur). (cf. figure 10).

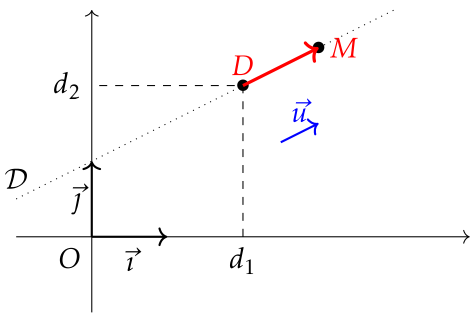

Figure 10 – Vecteurs colinéaires

Définition 45 (Notion de produit externe). Soit un vecteur $\vec{v}$ de longueur L_v. Un vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ s'écrit $\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}$ où λ est un réel. La longueur de $\vec{u}$, notée L_u, est : $\boxed{L_u = |\lambda| L_v}$. L'opération "$\cdot$" s'appelle un **produit externe** (ou multiplication externe).

➔ Exercice 15. *Parmi les vecteurs suivants, dire lesquels sont colinéaires :*

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

□

T.43

2.1.5 Opérations vectorielles en 2D

2.1.5.A Multiplication externe en 2D

Définition 46 (Produit **externe** .)**.** Dans le plan 2D, le résultat du **produit externe** du réel λ et du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}$ qui :

- est colinéaire à $\vec{v}$;
- dont la longueur est celle de $\vec{v}$ multipliée par $|\lambda|$;
- et dont le sens est celui de $\vec{v}$ si $\lambda > 0$ et est opposé à $\vec{v}$ si $\lambda < 0$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont : $\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}}$; le nombre λ s'appelle un **scalaire**. (cf. figure 11).

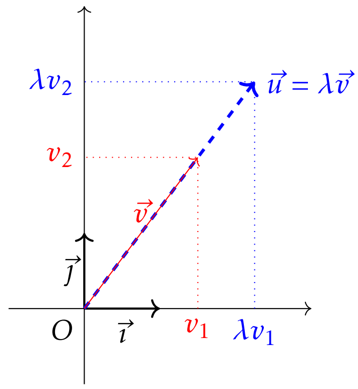

FIGURE 11 – Multiplication externe d'un vecteur par un scalaire dans le plan 2D.

Remarques :

- Par souci de rapidité et de lisibilité, le produit $\lambda \cdot \vec{v}$ sera souvent écrit $\lambda \vec{v}$
- Le produit externe étire la longueur d'un vecteur si $|\lambda| > 1$ et la contracte si $0 < |\lambda| < 1$.

T.44

Propriété 47 (Propriétés de "$\cdot$")**.** *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs et λ un réel.*

- *Si $\lambda \neq 0$, $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \vec{u}$*
- *Si $\lambda = 0$, alors $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (même si $\vec{v}$ n'est pas $\vec{0}$).*

Propriété 48 (Équation paramétrique de droite)**.** *Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ passant par le point D est l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{DM}$ est colinéaire à $\vec{u}$:* $\boxed{\mathcal{D} = \left\{ M \middle/ \overrightarrow{DM} = \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$.

T.45

EXERCICE 16. *Équation de droite* : donner l'équation paramétrique de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ avec

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **3** $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

T.46

2.1.5.B Addition en 2D

Définition 49 (Addition +). Dans le plan 2D, le résultat de la somme des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\boxed{\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}}$ dont les coordonnées sont : $\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}}$. (cf. figure 12).

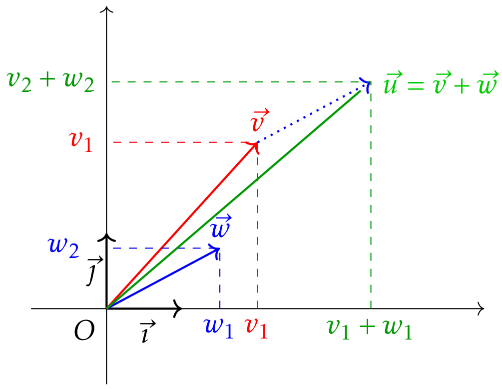

Figure 12 – Addition de deux vecteurs dans le plan 2D.

T.47

2.1.5.C Combinaisons linéaires

Définition 50 (Combinaisons linéaires)**.** Étant donnés m vecteurs (ayant chacun 2 coordonnées), notés $\vec{v_j}$ avec j variant de 1 à m et m réels, notés λ_j avec j variant de 1 à m, le vecteur $\boxed{\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \ldots + \lambda_m \vec{v_m} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v_j}}$ est appelé **combinaison linéaire** (CL) des vecteurs $\vec{v_j}$ et des réels λ_j.

➔ Exercice 17. *Des CL :* $\vec{v} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2} + 3\vec{v_3}$ est une combinaison linéaire de $m = 3$ vecteurs avec les scalaires $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$; quelles sont les coordonnées de $\vec{v}$ lorsque $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$? □

T.48

2.1.6 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

Définition 51 (Espace des vecteurs $\mathbb{R}^2$)**.** L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ d'abscisse v_1 et d'ordonnée v_2 dans le repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme l'**espace (ensemble) de vecteurs** $\mathbb{R}^2$:
$\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} / v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Définition 52 (Espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$)**.** L'espace de vecteurs $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition entre vecteurs et du produit externe entre un réel et un vecteur définis précédemment, définit l'**espace vectoriel** noté $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

T.49

Théorème 53 (Stabilité de $\mathbb{R}^2$)**.** *Dans l'espace vectoriel* $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, .)$, *toute* ***combinaison linéaire*** *de vecteurs de l'espace est un vecteur de l'espace : on dit que l'espace est stable pour l'addition et la multiplication.*

Remarque : $\mathbb{R}^2$ est un espace à 2 dimensions (2 coordonnées par vecteurs, 2 directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ pour
T.50 décrire un vecteur).

2.1.7 Droites dans $\mathbb{R}^2$

Définition 54 (Équations de droite dans $\mathbb{R}^2$)**.** Dans $\mathbb{R}^2$, la droite passant par un point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble de points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan dont les coordonnées sont *contraintes* par **une** relation. Cette relation est soit :

- une **équation cartésienne** de la forme : $ax + by + c = 0$ avec a, b, et c trois coefficients réels et $\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Cette écriture généralise les deux expressions de la forme $y = ax + b$ et $x = c$.
- une **équation paramétrique** de la forme $\overrightarrow{DM} = \lambda\vec{u}$ avec λ un réel associé de manière unique à x et y.

➔ Exercice 18. *Équation de droite :* donner l'équation de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ avec

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **3** $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

T.51

2.1.8 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

Rappel : Projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$

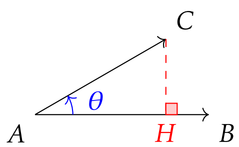

Figure 13 – Produit scalaire de deux vecteurs par projection orthogonale.

Le projeté orthogonal de C sur (AB) est H (cf. figure 13). Il définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$, noté $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle$, par la relation : $\boxed{\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = \overline{AH}.\overline{AB} = AC.AB.\cos(\theta)}$ avec :

- $\overline{AH}$ (resp. $\overline{AB}$) la distance algébrique (signée) entre A et H (resp. B)
- AC (resp. AB) la distance géométrique (non signée) entre A et C (resp. B)
- θ, l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

T.52

Le produit scalaire de deux vecteurs $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AC.AB.\cos(\theta)$ est un nombre réel, mesurant à la fois ① l'**alignement** de deux vecteurs et ② l'**angle** qui les séparent (cf. figure 14).

Il s'interprète dans les cas suivants de la sorte :

1. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec C et B du "même coté" de A alors $\theta = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AC.AB$ est une quantité positive (**alignement**).
2. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec C et B chacun d'un côté de A alors $\theta = \pi$ et $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = -AC.AB$ (**alignement opposé**).
3. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **orthogonaux** alors $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$.

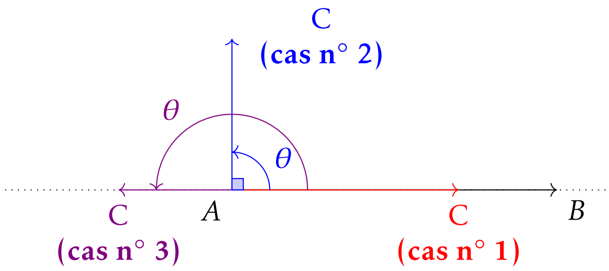

Figure 14 – Cas limites du produit scalaire

T.53

Définition 55 (Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$)**.** Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ définis par leurs coordonnées (① abscisses u_1 et v_1 et ② ordonnées u_2 et v_2) peut se calculer avec : $\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2}$. Il est alors appelé **produit scalaire canonique**.

T.54

Définition 56 (Vecteurs orthogonaux)**.** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

➔ Exercice 19. *Parmi les vecteurs suivants, dire lesquels sont orthogonaux* :

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

□

Définition 57 (Vecteur normal)**.** Si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurx directeurs d'une droite, on dit qu'il est normale à cette droite.

➔ Exercice 20. *Équation de droite* : donner l'équation de la droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{u}$ avec

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **2** $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ **3** $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

T.55

2.1.9 Norme dans $\mathbb{R}^2$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AC.AB.\cos(\theta)$ permet également de mesurer la longueur d'un vecteur :

Démonstration. Lorsque $C = B$ avec donc un angle $\theta = 0$, on obtient : $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AB.AB = AB^2$, donc $AB = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right\rangle}$. □

Définition 58 (Norme)**.** La **norme** d'un vecteur $\vec{v}$, notée $\|\vec{v}\|$, mesurant sa longueur L_v (autrement dit la **distance** non signée entre ses deux extrémités), se définit à partir du produit scalaire par : $\boxed{L_v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}}$.

⚠ **Remarque** : De tout vecteur $\vec{v}$ non nul peut être déduit un **vecteur unitaire** $\vec{u}$ (c'est à dire de
T.56 longueur 1) en prenant : $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$.

Théorème 59 (Norme associée au produit scalaire canonique)**.** *Pour un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ défini par ses coordonnées dans le repère orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la norme de $\vec{v}$ (basée sur le produit scalaire canonique) se calcule avec :*

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Définition 60 (Espace vectoriel euclidien)**.** L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit **scalaire** canonique (et de sa **norme**) est un **espace vectoriel euclidien**.

T.57

➔ Exercice 21. *Équations de droite* :
Dans le repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$,

① Tracer puis donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation cartésienne $2x + 3y + 5 = 0$.

② Soient le point $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Déterminer l'équation cartésienne des droites suivantes :

- ❶ $\mathcal{D}_2$: droite parallèle à $\mathcal{D}_1$ et passant par A
- ❷ $\mathcal{D}_3$: droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$
- ❸ $\mathcal{D}_4$: droite passant par A et orthogonale à la direction $\vec{u}$.

□

T.58

➔ Exercice 22. *Propriété du triangle* : Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On construit ensuite les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

① Tracer le triangle ABC et positionner les points I et J.

② Donner les coordonnées de I et de J.

③ Donner les longueurs AI et AJ.

④ Déterminer l'équation cartésienne de la droite (IJ).

⑤ Démontrer que la droite (IJ) passe par le milieu du segment $[BC]$.

□

T.59

2.2 Éléments de géométrie 3D

2.2.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$

Définition 61 (L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$). L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ avec v_1, v_2, v_3 trois nombres réels forme l'espace vectoriel noté $\mathbb{R}^3$. $\vec{v}$ s'interprète comme un déplacement de O vers un point M dont les coordonnées dans le repère cartésien orthonormé $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont : v_1 pour abscisse, v_2 pour ordonnée et v_3 pour altitude, avec : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}}$. $\vec{v}$ se décrit toujours comme une direction, un sens et une longueur. (cf. figure 15).

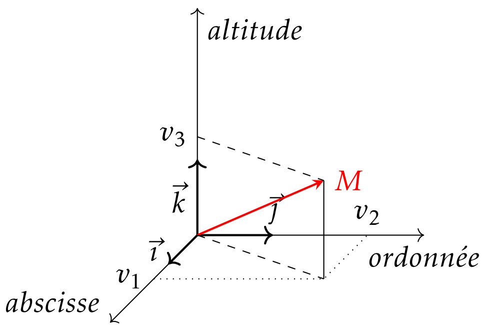

Figure 15 – L'espace 3D.

⚠ **Remarque** : $\mathbb{R}^3$ définit l'espace 3D, donc un **espace de dimension 3** : 3 coordonnées/3 directions par vecteur pour décrire un déplacement. T.60

Cas particulier

$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Théorème 62 (Égalité de deux vecteurs). *Deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont égaux*

$$\iff \text{leurs coordonnées sont égales : } \begin{cases} u_1 = v_1 & \text{(égalité des abscisses)} \\ u_2 = v_2 & \text{(égalité des ordonnées)} \\ u_3 = v_3 & \text{(égalité des altitudes)} \end{cases}$$

$\iff$ *leur direction, leur sens et leur longueur sont égaux.*

T.61

2.2.2 Opérations vectorielles dans $\mathbb{R}^3$

Définition 63 (Addition "+"). Pour deux vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur somme est

$\boxed{\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}}$.

Définition 64 (Produit externe "$\cdot$"). Pour un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ et λ un nombre réel, $\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ de coordonnées $\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}}$ (de même direction mais de longueur et de sens modifié par λ).

T.62

Définition 65 (Combinaisons linéaires). Étant donnés ① m vecteurs (ayant chacun 3 coordonnées), notés $\vec{v}_j$ avec j variant de 1 à m, et ② m réels, notés λ_i avec j variant de 1 à m, le vecteur $\boxed{\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j}$ est appelé **combinaison linéaire** (CL) des vecteurs $\vec{v}_j$ et des réels λ_j.

Exercice 23. *Une CL* : Quel est le vecteur résultat de la combinaison linéaire $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$ avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$? □

T.63

2.2.3 Produit scalaire et norme dans $\mathbb{R}^3$

Définition 66 (Produit scalaire canonique). Soient deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ définis par leurs coordonnées dans le repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient L_u et L_v leurs longueurs respectives et θ l'angle qui les sépare. On définit :

- le produit scalaire canonique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par : $\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$; ce nombre mesure l'**alignement** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- la norme associée par : $\boxed{\|\vec{v}\| = L_v = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$; ce nombre mesure la **longueur** de $\vec{v}$.

T.64

2.2.4 Exercices

Exercice 24. *Calculs de produit scalaire et de norme* : On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Calculer, à l'aide du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u} + \vec{w}\|$.

□

➔ EXERCICE 25. : Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, montrer que le triangle ayant pour sommets $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est rectangle isocèle.

□

T.65

2.3 Généralisation à la nD

2.3.1 Principe de la généralisation

On peut facilement généraliser les vecteurs de la 2D et de la 3D à la nD : un vecteur $\vec{v}$ est un **n-uplet ordonné** de n coordonnées $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où les v_i sont des nombres réels.

Se généralisent aussi l'addition, la multiplication externe et la dimension. Ces opérations servent à former l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Se généralisent enfin le produit scalaire (mesure d'alignement) et la norme (mesure de distance) qui font de $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel euclidien. T.66

2.3.2 Notion de nD

Les principes de la généralisation à la nD sont donnés table 2. T.67

2.3.3 Quelques interprétations de nD

Des exemples simples

Un vecteur nD est donc la donnée de n informations numériques ordonnées, repérées en composantes.

- $n = 4$: espace **spatio-temporel** avec abscisse, ordonnée, altitude et temps.
- $n = 3$: espace des couleurs avec leur niveau de rouge, vert, bleu.
- $n = 2$: les 2 coefficients (a_0, a_1) d'un polynôme de la forme $a_0 + a_1 X$.

Domaines d'application

- (Télé)communications (modulation/démodulation) : se repérer sur les porteuses
- Big Data : croiser des données en groupe d'intérêt
- Statistiques : par ex. profil moyen d'un étudiant validant son BUT

T.68

2.4 Combinaison linéaire : en route vers les matrices

Les CL $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j$ impliquent une **famille** de m vecteurs (ordonnés par l'indice j), chacun défini par n coordonnées :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \vec{v}_m = \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ \vdots \\ v_{n,m} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \textit{abscisse} \\ \textit{ordonnée} \\ \vdots \\ \end{array}$$

Cette famille peut se manipuler par le biais d'un tableau appelé **matrice** dont les m colonnes sont les n coordonnées des m vecteurs :

		En 2D	En nD ($n \geq 1$)
Espace	**espace vectoriel**	$(\mathbb{R}^2,\mathbb{R},+,\cdot)$	$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R},+,\cdot)$
	Vecteurs	$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
	Scalaire	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathbb{R}$
Opérations	**Addition**	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$
	Multiplication	$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$	$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$
	CL de m vecteurs	$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j$	
	Égalité	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ \dots \\ u_n = v_n \end{cases}$
Alignement	**Produit scalaire**	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i$	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$
	Norme	$\lVert \vec{u} \rVert = L_u = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} u_i^2}$	$\lVert \vec{u} \rVert = L_u = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$

TABLE 2 – Généralisation à la nD

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & \vec{v}_m \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,m} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

T.69

3 Matrices

3.1 Algèbre des matrices

3.1.1 Définitions

Définition 67 (Matrice à n lignes et m colonnes)**.** Une matrice A de n lignes et m colonnes est définie par $n \times m$ coefficients, réels ou complexes, identifiés par deux indices (dits de ligne et de colonne) rangé dans un *"tableau"* : le coefficient $a_{i,j}$ désigne le coefficient de A à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La matrice A peut alors être représentée par :

$$\begin{array}{rcl} & \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \overset{m}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} n \\ \text{ligne } i \end{array} \end{array}$$

T.71

⚠ **Remarques** :

- De façon plus compacte, la matrice A est notée : $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$.
- Les pointillés traduisent une suite logique dans les coefficients et leurs indices.
- En algèbre linéaire, chaque colonne de la matrice représente les n coordonnées d'un vecteur.

Exemple 68 (Une matrice). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice ayant $n = 2$ lignes et $m = 4$ colonnes donc avec 8 coefficients : $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 2$, $a_{1,3} = 3$, $a_{1,4} = 4$, $a_{2,1} = 5$, $a_{2,2} = 6$, $a_{2,3} = 7$ et $a_{2,4} = 8$.

Dans un contexte d'algèbre linéaire, A désigne la famille de 4 vecteurs du plan 2D, donnés par leurs coordonnées : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. T.72

Bien que les coefficients des matrices puissent être complexes, on se limitera dans le cadre de ce cours aux coefficients réels.

⚠ **Remarque** : L'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Définition 69 (Matrice nulle)**.** Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $O_{n\times m}$ lorsqu'elle a n lignes et m colonnes :

$$\begin{array}{rcl} & \overset{m}{\longleftrightarrow} & \\ O_{n\times m} = & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & n \end{array}$$

T.73

3.1.2 Quelques matrices particulières

3.1.2.A Matrices carrées

Définition 70 (Matrice carrée)**.** Une **matrice carrée** est une matrice ayant autant de lignes que de colonnes (autrement dit $n = m$). On dit qu'elle est de **taille** n.

$$A = \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} n$$

diagonale

Elle possède une *diagonale* formée par les coefficients $a_{i,i}$ avec i variant de 1 à n (c'est à dire ceux ayant le même indice de ligne que de colonne).

⚠ **Remarque** : L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels est $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, noté
T.74 également (pour simplifier) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.1.2.B Matrices diagonales

Définition 71 (Matrice diagonale)**.** Une **matrice diagonale** A est une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls, sauf ceux de la diagonale (les $a_{i,i}$ avec i variant de 1 à n). Elle prend la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est diagonale $\Longleftrightarrow \forall i \neq j, a_{i,j} = 0$

T.75

3.1.2.C Matrices identités

Définition 72 (Matrice identité)**.** La **matrice identité de taille** n est une matrice carrée diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. On la note :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice identité $\Longleftrightarrow a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

T.76

3.1.2.D Matrices triangulaires

Définition 73 (Matrices triangulaires supérieures). On appelle **matrice triangulaire supérieure** une matrice carrée A dont tous les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i > j$ (donc *au dessous de la diagonale*) sont nuls, soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure $\Longleftrightarrow a_{i,j} = 0$ si $i < j$

T.77

Définition 74 (Matrices triangulaires inférieures). On appelle **matrice triangulaire inférieure** une matrice carrée A dont tous les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i < j$ (donc *en dessus de la diagonale*) sont nuls, soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire inférieur $\Longleftrightarrow a_{i,j} = 0$ si $i > j$

⚠ **Remarque** : Une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure. T.78

3.1.2.E Vecteurs

Définitions 75 (Vecteur ligne et vecteur colonne). On appelle :

- **vecteur ligne** : une matrice possédant une seule ligne ($n = 1$) et plusieurs (m) colonnes, soit : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \end{pmatrix}$
- **vecteur colonne** : une matrice possédant plusieurs (n) lignes et une seule colonne ($m = 1$), soit : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$

T.79

3.1.2.F Matrices symétriques

Définition 76 (Matrice carrée symétrique)**.** Une matrice carrée A est **symétrique** si ses coefficients vérifient $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout i et j :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & \cdots & & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est symétrique lorsque $\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = a_{j,i}$

T.80

3.1.2.G Matrices antiymétriques

Définition 77 (Matrice carrée antisymétrique)**.** Une matrice carrée A est **antisymétrique** si ses coefficients vérifient $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout i et j :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & \cdots & & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est antisymétrique lorsque $\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = -a_{j,i}$

T.81

Exemple 78 (Des exemples des matrices).

Matrice	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Dimension	2×2	3×2	3×3
Carrée	✓	✗	✓
Diagonale	✗	✗	✓
Triang. supérieure	✓	✗	✓
Triang. inférieure	✗	✗	✓
Symétrique	✗	✗	✓

T.82

3.1.3 Opération sur les matrices

3.1.3.A Égalité de deux matrices

Théorème 79 (Égalité de matrices)**.** *Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times m$. Alors $A = B$ si et seulement si, pour tous indices i et j, $a_{i,j} = b_{i,j}$.*

Exemple 80 (Égalité de matrices).

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 2$ et $c = 3$ et $d = 4$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}_2 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

T.83

3.1.3.B Transposition de matrices

Définition 81 (Transposée d'une matrice)**.** Soit une matrice $\boldsymbol{A} = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$ de taille $n \times m$. La **transposée** de $\boldsymbol{A}$, notée $\boldsymbol{A}^T$, est la matrice de taille $m \times n$ définie par : $\boldsymbol{A}^T = (a_{j,i}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$.

⚠ **Remarque** : La transposition transforme les colonnes d'une matrice $\boldsymbol{A}$ en lignes de $\boldsymbol{A}^T$; elle transforme donc un vecteur colonne en vecteur ligne (et réciproquement).

T.84

➔ Exercice 26. : Calculer la transposée de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

□

T.85

3.1.3.C Addition

Définition 82 (Addition de deux matrices)**.** Soient $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ et $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times m$. La somme de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est la matrice de taille $n \times m$:

$$\boxed{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{i,j} + b_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix}}.$$

⚠ **Remarque** : l'addition matricielle généralise l'addition vectorielle en travaillant colonne par colonne.

Exemple 83. La somme de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est : $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

T.86

3.1.3.D Multiplication par un scalaire

Définition 84 (Multiplication (externe) d'une matrice par un scalaire)**.** Soient $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et λ un réel ou un complexe. Le produit externe de $\boldsymbol{A}$ par λ est la matrice $\boldsymbol{B}$ de taille $n \times m$ valant

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \lambda \cdot \boldsymbol{A} = (\lambda a_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,m} \end{pmatrix}}.$$

Remarques :

- Ce produit est une généralisation du produit externe vectoriel
- L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication externe ainsi définies forment un espace vectoriel.

Exemple 85. Pour $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 2$, on obtient $2 \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

T.87

Exercice 27. *Factoriser les matrices suivantes* :
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^4 \\ 2^5 & 2^8 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + 4 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. □

Exercice 28. *Transposition* : Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice carrée de taille n. Montrer que $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T$ est une matrice symétrique et que $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T$ est une matrice antisymétrique. On pourra illustrer la démonstration avec la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. □

T.88

3.1.3.E Produit d'une matrice et d'un vecteur

Définition 86 (Multiplication d'une matrice et d'un vecteur)**.** Soient $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et $\boldsymbol{U} = (u_i)$ un vecteur colonne de m lignes. Le produit de $\boldsymbol{A}$ par le vecteur $\boldsymbol{U}$, noté $\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{U}}$ ou $\boxed{\boldsymbol{AU}}$, est le **vecteur colonne** $\boldsymbol{V} = (v_i)$ de n lignes dont les coefficients pour tout indice de ligne i sont : $\boxed{v_i = \sum_{p=1}^{m} a_{i,p} u_p}$. (cf. illustration donnée figure 16).

Remarques :

- Le produit n'existe que si les dimensions de $\boldsymbol{A}$ et de $\boldsymbol{U}$ concordent : il faut que le nombre de colonnes de $\boldsymbol{A}$ soit égal au nombre de lignes de $\boldsymbol{U}$
- T.89 Le produit entre une matrice et un vecteur a **un sens d'écriture** : $\boldsymbol{UA}$ n'existe pas (toujours)

T.90 *Exemple* 87 (Produit entre une matrice et un vecteur)*.* Le produit entre la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (de taille 2×3) et le vecteur $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (de taille 3×1) est le vecteur $\boldsymbol{V}$ de taille 2×1 dont les coefficients sont :

- $v_1 = \sum_{p=1}^{3} a_{1,p} u_p = a_{1,1} u_1 + a_{1,2} u_2 + a_{1,3} u_3 = 1.1 + 2.(-1) + 3.0 = -1$
- $v_2 = \sum_{p=1}^{3} a_{2,p} u_p = a_{2,1} u_1 + a_{2,2} u_2 + a_{2,3} u_3 = 4.1 + 5.(-1) + 6.0 = -1$

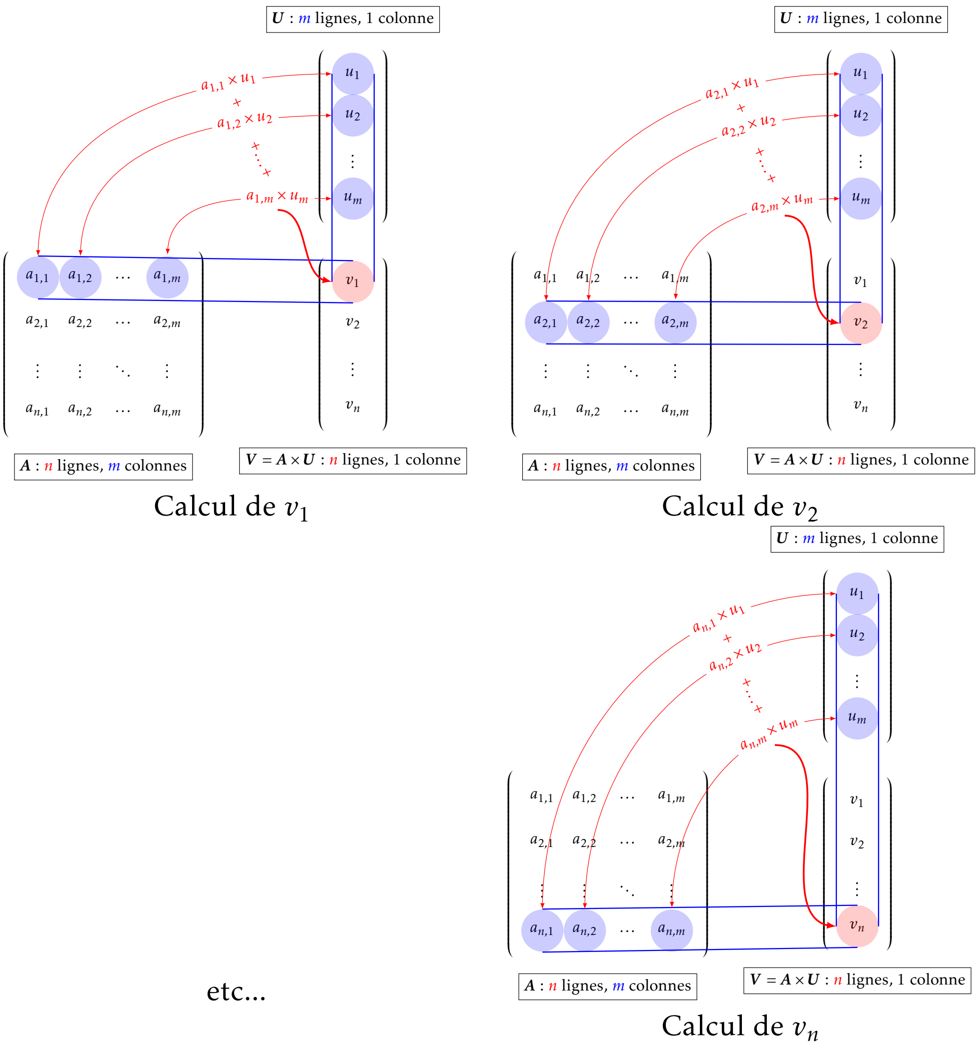

Figure 16 – Illustration du calcul du produit d'une matrice avec un vecteur

Donc $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ T.91

Écriture matricielle d'une combinaison linéaire
Soient m de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_m$ ayant chacun n coordonnées (notées $v_{i,j}$ pour le vecteur $\vec{v}_i$) et m réels λ_j. La combinaison linéaire $\boxed{\vec{v} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j}$ est un vecteur dont les n coordonnées sont données par le vecteur colonne $\boxed{\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{U}}$ avec :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & \vec{v}_m \end{array} \\ \boldsymbol{A} = & \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

T.92

Écriture matricielle d'un produit scalaire

Soient 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par leurs coordonnées $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors le produit scalaire canonique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule avec : $\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{V}}$ où ^{T} désigne l'opération de transposition.

⚠ **Remarque** : Le résultat de $\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{V}$ est factuellement une **matrice** ne contenant qu'un terme ; par souci de simplicité, il est vu comme un nombre réel (ici le résultat du produit scalaire). T.93

Écriture matricielle de la norme

Soit un vecteur $\vec{v}$ défini par ses coordonnées $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors la norme de $\vec{v}$ (associée au produit scalaire canonique) se calcule avec : $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{V}}}$ où ^{T} désigne l'opération de transposition. T.94

3.1.3.F Produit de deux matrices

Définition 88 (Multiplication de deux matrices)**.** Soient $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et $\boldsymbol{B} = (b_{j,k})$ une matrice de taille $m \times q$. Alors le produit de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, noté $\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}$ ou $\boxed{\boldsymbol{AB}}$, est la matrice $\boldsymbol{C} = (c_{i,k})$ de n lignes et q colonnes telle que pour tout indice de ligne in et tout indice de colonne k : $\boxed{c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}}$. (cf illustration de la figure 17).

T.95

T.96

Exemple 89 (Produit de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ par $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$). Les coefficients du produit se calculent comme suit (cf. figure 18 pour une illustration graphique).

- $c_{1,1} = 1 \times 1 + 2 \times 4 + 3 \times 7 = 30$
- $c_{1,2} = 1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 = 36$
- $c_{1,3} = 1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 9 = 42$
- $c_{2,1} = (-1) \times 1 + 0 \times 4 + 1 \times 7 = 6$
- $c_{2,2} = (-1) \times 2 + 0 \times 5 + 1 \times 8 = 6$
- $c_{2,3} = (-1) \times 3 + 0 \times 6 + 1 \times 9 = 6$
- $c_{3,1} = 4 \times 1 + 5 \times 4 + 6 \times 7 = 66$
- $c_{3,2} = 4 \times 2 + 5 \times 5 + 6 \times 8 = 81$
- $c_{3,3} = 4 \times 3 + 5 \times 6 + 6 \times 9 = 96$

T.97

➔ EXERCICE 29. *Produit matriciel* :

On considère les matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer les produits $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{BC}$ et $\boldsymbol{CB}$, lorsqu'ils ont un sens. □

➔ EXERCICE 30. *Commutativité* :

Soient $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer, après avoir justifié leur existence les matrices $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{BA}$. Qu'en déduisez-vous ?

□

T.98

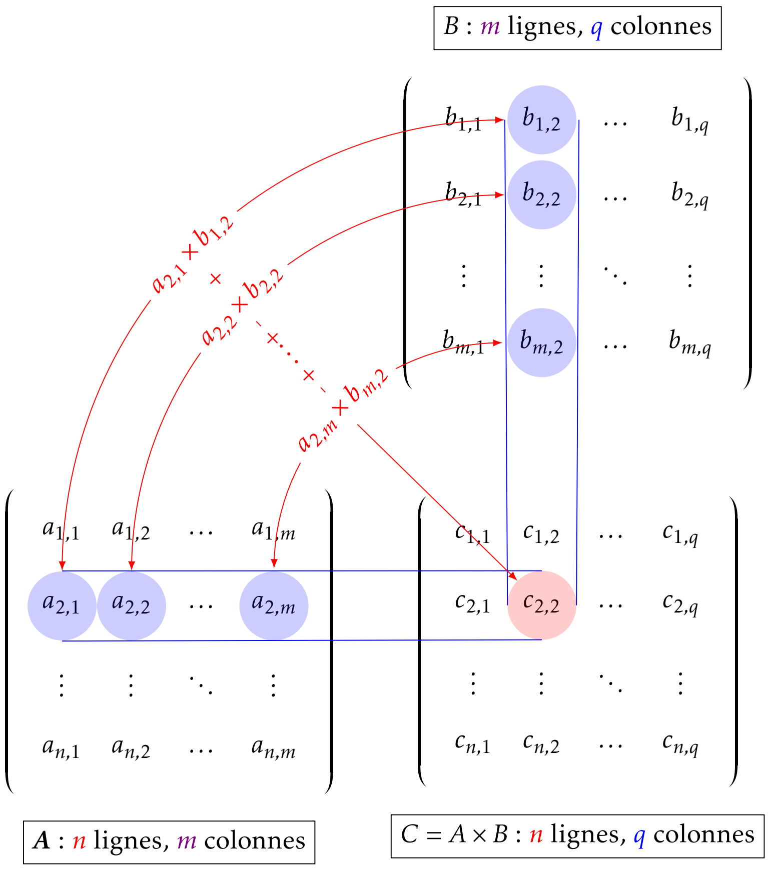

Figure 17 – Méthode de calcul d'un produit de matrices.

Exercice 31. *Produit matriciel* :

Soient $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

① Calculer, lorsque cela est possible, les produits suivants : $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{CA}$, $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{CB}$.

② Calculer, après avoir justifié leur existence, les matrices suivantes : $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{CB}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CB})$, $(\boldsymbol{AC})\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{BA}^2)$.

□

T.99

Exercice 32. *Matrice (DS UFA 2011)* : Soient $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$ deux matrices définies par les paramètres réels a, b, c et d. Les trois questions suivantes sont indépendantes.

① Calculer $\boldsymbol{AB}$ puis $\boldsymbol{BA}$. Donner toutes les valeur(s) de a, b, c et d pour lesquelles on a $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$?

② Calculer $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2$, puis $\boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2$. Qu'en concluez-vous ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

□

T.100

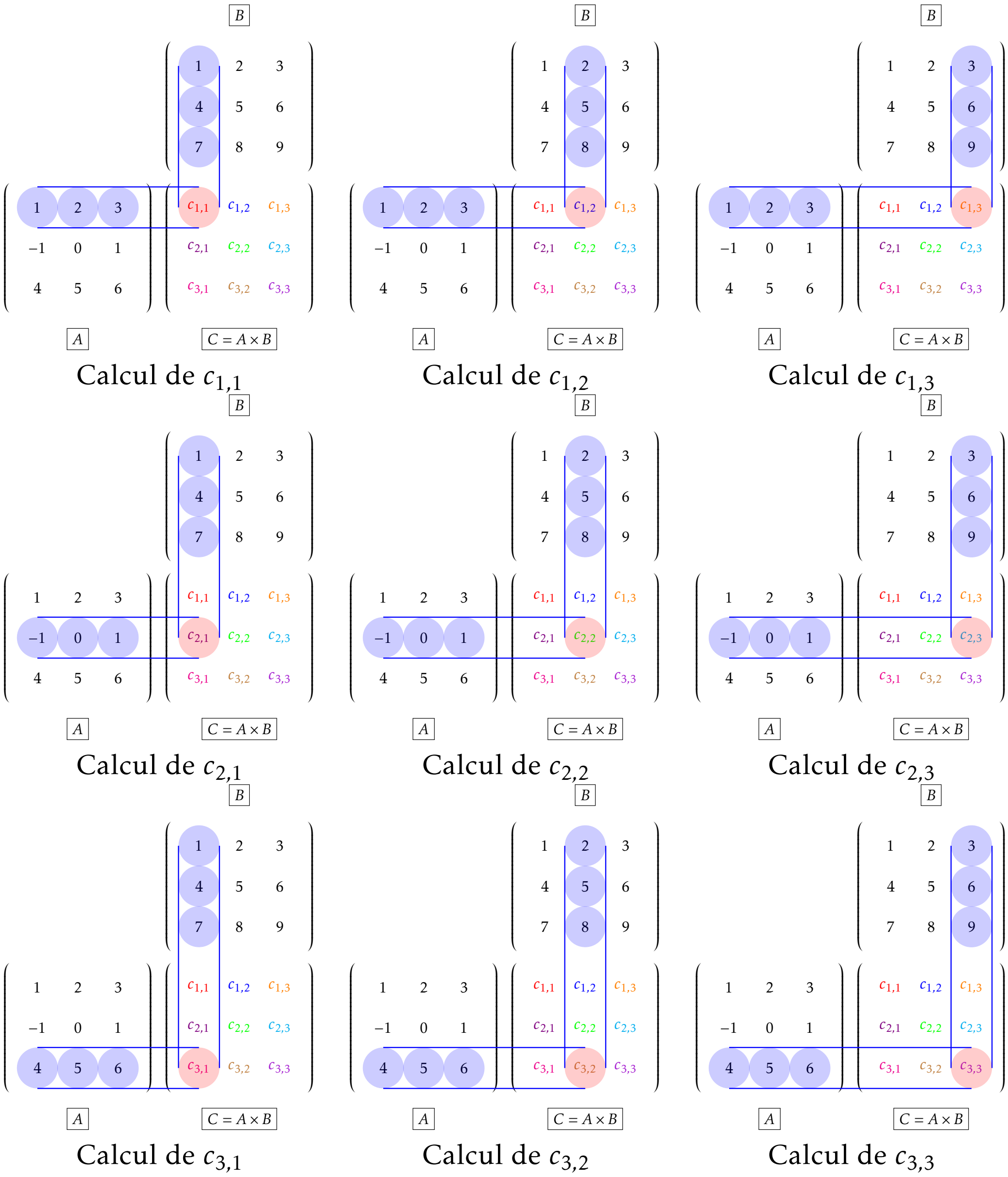

FIGURE 18 – Le produit matriciel à travers un exemple

3.1.3.G Puissances de matrices

Définition 90 (Puissance entière de matrice carrée de taille n)**.** Soit A une matrice carrée de taille n. On définit :

- $\boldsymbol{A}$ à la puissance 0 par : $\boxed{\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}_n}$, où $\boldsymbol{I}_n$ est la matrice identité ;
- $\boldsymbol{A}$ à la puissance 1 par : $\boxed{\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}}$;
- $\boldsymbol{A}$ à la puissance k avec k un entier naturel non nul, par $\boxed{\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} \times \cdots \times \boldsymbol{A}}_{k \text{ fois}}}$.

T.101

➔ Exercice 33. *Puissance d'une matrice* : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour n entier quelconque.

□

T.102

➔ Exercice 34. *Matrices diagonales* : Soient D_n et Δ_n les matrices $n \times n$ définies par : $D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$.

① Ces matrices sont-elles : carrée ? triangulaire supérieure ? triangulaire inférieure ? diagonale ? symétrique ?

② Calculer, après avoir justifié leur existence et pour deux entiers n et k quelconques, les matrices :

❶ D_2^2, D_2^3, D_2^k ❷ D_3^2, D_3^3, D_3^k ❸ D_n^2, D_n^3, D_n^k

③ Calculer, après avoir justifié leur existence, les matrices :

❶ $D_2\Delta_2, \Delta_2 D_2$ ❷ $D_3\Delta_3, \Delta_3 D_3$ ❸ $D_n\Delta_n, \Delta_n D_n$

Qu'en déduisez-vous ?

□

T.103

3.1.3.H Matrice inverse

Définition 91 (Matrice inverse)**.** Soit A une matrice carrée de taille n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice appelée **inverse** et notée $\boxed{A^{-1}}$ (carrée de taille n) telle que $\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$.

Théorème 92 (Unicité de l'inverse)**.** *L'inverse d'une matrice est unique.*

T.104

➔ Exercice 35. *Inverse d'une matrice* 2×2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 dont les coefficients a,b,c,d sont réels et tels que $ad - bc \neq 0$. Démontrer que la matrice inverse de A est $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

□

➔ Exercice 36. : $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'inverse de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$? □

➔ Exercice 37. *Inverse d'une matrice diagonale* : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont non nuls. Montrer que $A^{-1} = \mathbf{diag}(\dfrac{1}{a_{1,1}}, \dfrac{1}{a_{2,2}}, \ldots, \dfrac{1}{a_{n,n}})$.

□

T.105

Exercice 38. *Inverser une matrice sans (trop) de calcul* :

① Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

② Soit A une matrice telle que $A^3 - A = 4I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

③ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 + A = 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

□

T.106

3.1.4 Propriétés des opérations sur les matrices

3.1.4.A Propriétés de la multiplication matricielle

Théorème 93 (Associativité de la multiplication matricielle)**.** *Soient A, B, C trois matrices. Alors* $\boxed{A(BC) = (AB)C}$.

La multiplication matricielle n'est pas commutative
AB n'est quasiment jamais égal à BA. Plus précisément :

- Si $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, alors AB existe et appartient à $\mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{R})$, mais BA n'existe pas (sauf si $n = q$) ! ! !
- Si $n = q$, $AB \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathcal{M}_{q\times n}(\mathbb{R})$ mais les matrices sont de tailles différentes si $n \neq p$! ! !
- Enfin, même si $n = p = q$, le produit ne commute pas forcément !

T.107

3.1.4.B Propriétés de l'addition et de la multiplication externe

Soient A,B deux matrices de taille $n \times m$, C et D deux matrices de taille $m \times q$ et λ, μ deux nombres réels.

Théorème 94 (Propriétés de l'addition et de la multiplication externe)**.**

1. *Commutativité de l'addition et de la multiplication externe :*
   ① $A + B = B + A$
   ② $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$
2. *Associativité de l'addition et de la multiplication externe :*
   ① $A + (B + C) = (A + B) + C$.
   ② $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A$ *(où $\times$ désigne la multiplication de deux nombres réels)*
   ③ $\lambda \cdot (AB) = (\lambda \cdot A)B = A(\lambda \cdot B)$
3. *Distributivité de la multiplication sur l'addition :*
   ① $A(C + D) = AC + AD$
   ② $(A + B)C = AC + BC$
   ③ $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
   ④ $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

T.108

➔ Exercice 39. *Commutant :* Soient a et b des réels non nuls et $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver l'ensemble des matrices $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\boldsymbol{A}$, c'est-à-dire telles que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

□

➔ Exercice 40. *Propriétés des opérations sur les matrices :* Montrer que :

① l'addition de matrices est une opération associative et commutative,

② la mutliplication de matrices est une opération associative mais pas toujours commutative,

③ la multiplication est distributive sur l'addition,

④ pour toute matrice $\boldsymbol{A}$ de taille $n \times p$, $\boldsymbol{AI}_p = \boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

□

T.109

3.1.4.C Propriétés de la transposition

Théorème 95 (Propriétés de la transposée)**.** *Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices de taille $n \times m$ et $\boldsymbol{C}$ une matrice de taille $m \times p$. Alors :*

- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$
- $(\boldsymbol{AC})^T = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}^T$

➔ Exercice 41. *Démonstration autour de la transposition :*
Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices. Soit λ un nombre réel. Montrer que :

❶ $(\lambda \boldsymbol{A})^T = \lambda \boldsymbol{A}^T$ ❷ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$ ❸ $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

□

T.110

3.1.4.D Propriétés des matrices identités et des matrices nulles

Soient $\boldsymbol{A}$ une matrice de taille $n \times m$, et q un nombre entier.

Théorème 96 (Propriétés des matrices identités)**.**

- *$\boldsymbol{I}$ est l'**élément neutre de la multiplication** : $\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{AI}_m = \boldsymbol{A}$*
- *pour tout entier k, $(\boldsymbol{I}_n)^k = \boldsymbol{I}_n$*

Théorème 97 (Propriétés des matrices nulles)**.**

- *$\boldsymbol{0}$ est l'**élément neutre de l'addition** : $\boldsymbol{0}_{n\times m} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{0}_{n\times m} = \boldsymbol{A}$*
- *$\boldsymbol{0}_{q\times n}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}_{q\times m}$ et $\boldsymbol{A0}_{m\times q} = \boldsymbol{0}_{n\times q}$*
- *pour tout entier $k > 0$, $(\boldsymbol{0}_n)^k = \boldsymbol{0}_n$.*

T.111

3.1.4.E Propriétés de l'inversion matricielle

Théorème 98 (Propriété). *Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux matrices carrées inversibles de même taille. Alors* $\boxed{(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}}$.

⚠ Remarque : Attention $\boxed{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}}$ T.112

➔ EXERCICE 42. *Annulateur* : On considère les matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\boldsymbol{AB}$ et $\boldsymbol{AC}$. Que constate-t-on ? La matrice $\boldsymbol{A}$ peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\boldsymbol{AF} = \boldsymbol{0}_3$.

□

T.113

3.2 Déterminant d'une matrice

3.2.1 Définition du déterminant

Définition 99 (Notation). Soit $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients réels. Le **déterminant de $\boldsymbol{A}$** est un nombre réel **unique**, noté :

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

⚠ **Remarque** : Dire que $\boxed{\det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B})}$ ne signifie pas forcément que $\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}}$. T.114

3.2.2 Calcul de déterminant

3.2.2.A Déterminant d'une matrice d'ordre 1

Théorème 100 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1). *Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre* 1. *Alors :*

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$$

Exemple 101 (Déterminant). Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$. Alors $\det(\boldsymbol{A}) = 2$.

T.115

3.2.2.B Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Théorème 102 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2). *Le déterminant d'une matrice carrée $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 est le nombre :*

$$\boxed{\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

Exemple 103 (Une matrice carrée d'ordre 2). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$.

$$\textbf{Aide mnémotechnique} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

T.116

Exercice 43. *Déterminants* : Calculer les déterminants suivants :

① $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ ② $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ③ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ ④ $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

☐

T.117

3.2.2.C Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Théorème 104 (Règle de Sarrus). *Le déterminant d'une matrice carrée* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *d'ordre 3 est le nombre :*

$$\boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - (gec + ahf + dbi)$$

T.118

Exercice 44. *Déterminants* : Calculer les déterminants suivants, en utilisant la méthode la plus judicieuse :

① $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

☐

T.119

3.2.2.D Déterminant dans le cas général

3.2.2.E Cofacteur

Définition 105 (Cofacteur). Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée. Le **cofacteur associé au coefficient** $a_{i,j}$, noté $\mathrm{cof}_{i,j}$, est le déterminant de la matrice $A_{i,j}$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A, multiplié par $(-1)^{i+j}$:

$$\boxed{\mathrm{cof}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}$$

T.120

3.2.2.F Développement suivant une colonne ou une ligne

Théorème 106 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n avec développement suivant une colonne). *Soit* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice à coefficients réels. Soit j l'indice d'une colonne de $\mathbf{A}$. Le déterminant de $\mathbf{A}$ se calcule en **développant par rapport à la colonne** j avec :*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{cof}_{i,j}}$$

T.121

Théorème 107 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n avec développement suivant une ligne). *Soit* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice à coefficients réels. Soit i l'indice d'une ligne de $\mathbf{A}$. Le déterminant de $\mathbf{A}$ se calcule en **développant par rapport à la ligne** i avec :*

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{cof}_{i,j}}$$

T.122

Exemple 108 (Déterminant de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$). Pour l'exemple, on choisit de développer suivant la 1ère ligne. Alors :

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,1})} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,2})} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,3})}$$

$$= +1 \times (5 \times 9 - 8 \times 6) - 2 \times (4 \times 9 - 7 \times 6) + 3 \times (4 \times 8 - 7 \times 5) = 0$$

T.123

➔ Exercice 45. *Calculez le déterminant :* $d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & \pi & e & \frac{3}{17} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

□

Exercice 46. *Calculer les déterminants suivants :*

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

□

T.124

Exercice 47. *Règle de Sarrus :* Démontrer la règle de Sarrus en utilisant le développement suivant une ligne ou une colonne du théorème 106. □

T.125

3.2.2.G Déterminant des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 109 (Déterminant d'une matrice diagonale)**.** *Soit A une matrice diagonale de taille n. Alors :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Théorème 110 (Déterminant d'une matrice triangulaire)**.** *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) de taille n. Alors son déterminant est le produit des termes diagonaux :*

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

T.126

3.2.3 Propriétés des déterminants

Théorème 111 (Propriétés des déterminants)**.**

1. *Multiplication par un scalaire : Soient A une matrice carrée de taille n et λ un réel. Alors :* $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)}$.
2. *Déterminant d'un produit de matrices : Soient A et B deux matrices carrées de taille n. Alors :* $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$.
3. *Déterminant d'une matrice transposée : Soit A une matrice carrée de taille n. Alors :* $\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$.

Théorème 112 (Permutation de deux lignes ou de deux colonnes)**.** *Lorsqu'on permute deux lignes ou deux colonnes d'une matrice dont on calcule le déterminant, le déterminant est multiplié par* $\boxed{-1}$.

T.127

Théorème 113 (Linéarité par rapport aux colonnes)**.** *Soient α, β deux réels. Lorsque la colonne j d'une matrice s'exprime comme la combinaison linéaire de 2 vecteurs $(a_{i,j})$ et $(a'_{i,j})$, le calcul du déterminant peut être linéarisé par rapport à la colonne j avec :*

$$\begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \alpha a_{1,j}+\beta a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \alpha a_{n,j}+\beta a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = \alpha \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} + \beta \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a'_1 & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_n & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}$$

⚠ **Remarque** : Le théorème est également vrai pour les lignes de la matrice. T.128

Théorème 114 (Ajout d'une colonne)**.** *Dans le calcul du déterminant, ajouter une colonne C_l (éventuellement) multipliée par un coefficient β, à une (autre) colonne C_j ne change pas la valeur du déterminant :*

$$\begin{array}{c} \text{colonne } l \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,j}+\beta a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,j}+\beta a_{n,l} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ \text{colonne } j \end{array} = \begin{array}{c} \text{colonne } l \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ \text{colonne } j \end{array}$$

⚠ **Remarque** : Le théorème est également vrai pour les lignes de la matrice.

Lemme 115. *Le déterminant d'une matrice qui contient deux lignes ou deux colonnes identiques est nul.* T.129

3.2.3.A Exercices

➔ Exercice 48. *Déterminants* : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les déterminants des matrices A^2, A^3, AB, AB^T, $3A$ et $A-B$.

☐

➔ Exercice 49. *Déterminant d'une matrice triangulaire* : Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux. ☐

T.130

➔ Exercice 50. *Déterminant d'une matrice antidiagonale* :

Calculer le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

☐

➔ Exercice 51. *Calcul* : Soient a,b,c,d quatre réels. Calculer le déterminant des matrices suivantes en fonction de a, b, c et d :

① $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}$ ② $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{pmatrix}$

☐

T.131

3.2.4 Application : Calcul d'une matrice inverse par la méthode des cofacteurs

Théorème 116 (Condition d'existence de l'inverse)**.** *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une matrice carrée.* $\boldsymbol{A}$ *est inversible si et seulement si* $\boxed{\det(\boldsymbol{A}) \neq 0}$.

Théorème 117 (Propriété)**.** *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une matrice carrée inversible. Alors*
$\boxed{\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}}$.

T.132

Définition 118 (Matrice des cofacteurs ou comatrice)**.** Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice. La **matrice des cofacteurs** ou **comatrice** associée à $\boldsymbol{A}$ est la matrice notée $\mathrm{com}(\boldsymbol{A})$ définie par : $\mathrm{com}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \mathrm{cof}_{1,1} & \cdots & \mathrm{cof}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cof}_{n,1} & \cdots & \mathrm{cof}_{n,n} \end{pmatrix}$
où $\mathrm{cof}_{i,j}$ sont les cofacteurs associés à $\boldsymbol{A}$ (on rappelle que $\boxed{\mathrm{cof}_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(\boldsymbol{A}_{i,j})}$ où $\boldsymbol{A}_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la ligne j de la matrice $\boldsymbol{A}$).

Théorème 119 (Comatrice et inversion matricielle)**.** *Soit* $\boldsymbol{A}$ *une matrice carrée et* $\mathrm{com}(\boldsymbol{A})$ *sa comatrice. Alors* $\boxed{\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})} \cdot \left(\mathrm{com}(\boldsymbol{A})\right)^T}$.

T.133

Exemple 120 (Inverse de $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par les comatrices). La comatrice de $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{B} = (b_{i,j})$ avec :

- $b_{1,1} = \mathrm{cof}_{1,1} = (-1)^{1+1}\det(\boldsymbol{A}_{1,1}) = 4$ car $\boldsymbol{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$
- $b_{1,2} = \mathrm{cof}_{1,2} = (-1)^{1+2}\det(\boldsymbol{A}_{1,2}) = -3$ car $\boldsymbol{A}_{1,2} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$
- $b_{2,1} = \mathrm{cof}_{2,1} = (-1)^{2+1}\det(\boldsymbol{A}_{2,1}) = 2$ car $\boldsymbol{A}_{2,1} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$
- $b_{2,2} = \mathrm{cof}_{2,2} = (-1)^{2+2}\det(\boldsymbol{A}_{2,2}) = 1$ car $\boldsymbol{A}_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{com}(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; puis $\mathrm{com}(\boldsymbol{A})^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (car $\det(\boldsymbol{A}) = -2$).

T.134

➔ Exercice 52. *Méthode des comatrices :* Dire si l'inversion de la matrice est possible, et si oui inverser ces matrices en utilisant la méthode des comatrices.

1 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2 $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4 $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5 $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

6 $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

□

T.135

4 Systèmes linéaires

4.1 Généralités sur les systèmes linéaires

4.1.1 Matrices associées à un système linéaire

Définition 121 (Système linéaire)**.** Un système linéaire est un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m = & b_1 \quad (L_1) \\ \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m = & b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$, b_i sont des réels ou des complexes donnés et les $x_1,\ldots,x_m$ sont m inconnues.

Objectif de l'étude des systèmes linéaires

Déterminer les inconnues x_1 à x_m. Ces solutions forment un m-uplet. Les systèmes possèdent :

1. soit 0 solution ;
2. soit un unique m-uplet solution ; on parle alors de système de Cramer.
3. soit une infinité de m-uplet solutions.

T.137

Définition 122. Matrices associées à un système linéaire On peut modéliser un système linéaire sous forme d'une **équation matricielle** de type $\boxed{\boldsymbol{AX = B}}$, avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

où :

A est appelée **matrice de transformation**,
- **X vecteur d'inconnues**,
- **B vecteur de coefficients**.

T.138

Exemple 123 (Un système).

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 & (L_1) \\ -x + 2y = 5 & (L_2) \\ 4x - \ \ y = 7 & (L_3) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B} \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{matrix}$$

T.139

4.2 Système linéaire de Cramer

4.2.1 Définitions

Définition 124 (Système de Cramer)**.** Un système linéaire

$$AX = B \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

est un **système de Cramer** lorsque A est une matrice carrée inversible. Il possède donc autant d'équations que d'inconnues ($n = m$).

T.140

Exemple 125 (Résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$). Ce système peut être représenté par l'équation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc sous la forme $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comme A est carré et que $\det(A) = -2$, le système est un système de Cramer possédant un unique couple (x_1, x_2) solution.

T.141

4.2.2 Résolution avec la solution formelle

Théorème 126 (Solution formelle)**.** *Un système de Cramer possède une unique solution donnée par :* $\boxed{X = A^{-1}B}$.

Démonstration : $AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I} = A^{-1}B \Leftrightarrow \underbrace{IX}_{X} = A^{-1}B$

Exemple 127 (Suite de l'exemple 125)**.** Puisque le système a une unique solution, en utilisant la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 (cf. exercice 35), cette solution est : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4.5 \end{pmatrix}$.

T.142

Exercice 53. *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x + 8y = 7 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

□

T.143

4.2.3 Méthode de résolution de Cramer

Théorème 128 (Théorème de Cramer)**.** *Soit un système de Cramer $AX = B$ avec pour vecteur d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. La k^e inconnue x_k est donnée par :* $\boxed{x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}}$ *où A_k est la matrice obtenue en remplaçant la k^e colonne de A par B.*

Exemple 129 (Suite de l'exemple 125).

- $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ donc $\det(A_1) = 8$ soit $x_1 = -4$
- $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ donc $\det(A_2) = -9$ soit $x_2 = \frac{9}{2}$

T.144

Exercice 54. *Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer* :

1 $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0 \\ x+2y+3z=2 \\ x+3y+4z=3 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x+2y+\ \ z=0 \\ x+2y-\ \ z=2 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+2y+\ \ z=0 \\ x+2y-\ \ z=2 \\ x+\ \ y+2z=2 \end{cases}$

□

T.145

Exercice 55. *Un système* : On considère le système suivant, portant sur les 3 inconnues réelles x, y, z et paramétré par un réel t :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & t+1 \\ 2x & - & y & + & (4t+3)z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 2t^2z & = & 0 \end{array}\right.$$

① A quelle condition sur t le système est-il un système de Cramer ?

② Dans ce cas, résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.

□

T.146

4.2.4 Méthode de résolution par substitution

Méthodologie 130 (Méthode par substitution)**.** *Soit un système de Cramer* $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ *avec pour vecteur d'inconnues* $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$*. On choisit une des inconnues* x_k*, on l'exprime en fonction des autres inconnues puis on remplace* x_k *par son expression dans le système pour se ramener à un système comportant une inconnue de moins.*

Exemple 131 (Même exemple que 125). On cherche à résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$. En utilisant la 2^{de} équation, on déduit que $x_2 = \dfrac{6-3x_1}{4}$, donc en remplaçant x_2 par son expression dans la 1^{ère} équation, on obtient : $x_1 + \dfrac{6-3x_1}{2} = 5 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x_1 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_1 = -4$. Finalement, en remplaçant x_1 par sa valeur dans l'expression de x_2, on déduit : $x_2 = 9/2$.

T.147

Exercice 56. *Résolution par substitution* : Résoudre avec la méthode de substitution le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=7 & \text{(a)} \\ \qquad\ \ y+2z=2 & \text{(b)} \\ \qquad\qquad 6z=12 & \text{(c)} \end{cases}$$

□

T.148

4.2.5 Méthode de résolution du pivot de Gauss

Matrices associées à un système linéaire

Soit un système de type $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

En omettant les inconnues $x_1, \cdots, x_m$, un système linéaire peut être modélisé par la **représentation compacte** suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & b_n \end{array}\right] \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

T.149

Définition 132 (Systèmes linéaires équivalents)**.** Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Théorème 133 (Règles d'équivalence)**.** *Les opérations permises sur les lignes, car conduisant à des systèmes équivalents, sont les suivantes :*

1. *Permutation de la ligne L_i et de la ligne L_j, notée* $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$;
2. *Multiplication d'une ligne par un réel α non nul, notée* $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$;
3. *Ajout de la ligne L_j à la ligne L_i, éventuellement multipliées par les réels α et β non nuls, noté* $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j}$.

Aucune opération sur les colonnes n'est permise car elles modifient l'ordre des inconnues dans le système.

T.150

Méthodologie 134 (Méthode du pivot de Gauss)**.** *On utilise les règles d'équivalence sur les lignes conduisant à des systèmes linéaires équivalents pour faire apparaître un système de la forme $\boldsymbol{A'X} = \boldsymbol{B'}$ dans lequel :*

- *au mieux $\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{I}_n$ (auquel cas les solutions sont dans $\boldsymbol{B'}$)*
- *ou au pire $\boldsymbol{A'}$ est triangulaire supérieure (dans ce cas, reste à utiliser la méthode de substitution).*

T.151

Pivot de Gauss pour un système de Cramer

Partant du système d'inconnues $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$ en **notation compacte** :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right] \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

for k allant de 1 à n **do**
  if il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k} \neq 0$ **then**
    Permutation $L_k \leftrightarrow L_i$;
  else
    Le système n'a pas de solution ; break ;
  end
  $pivot \leftarrow a_{k,k}$;
  $L_k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}} L_k$ de sorte que $a_{k,k} \leftarrow 1$;
  for j allant de 1 à n, et différent de k **do**
    $L_j \leftarrow L_j - a_{j,k} L_k$ de sorte que $a_{j,k} \leftarrow 0$
  end
end

T.152

Exemple 135 (Même exemple que 125). On cherche à résoudre $(\mathcal{S}) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} (L_1) \\ (L_2) \end{array}$.

- 1^e^ pivot = 1^e^ coeff diagonal (ici 1) porté par la ligne 1 et la colonne 1
  — Permutation pas nécessaire
  — $a_{1,1} \leftarrow 1$: déjà fait !
  — $a_{j,1} \leftarrow 0$: on modifie toutes les lignes autres que celle du pivot de sorte à annuler les coef dans la colonne 1 en utilisant (L_1) : $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right]$ en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
- 2^e^ pivot = 2^e^ coef diagonal (ici -2) porté par la ligne 2 et la colonne 2
  — Permutation pas nécessaire
  — $a_{2,2} \leftarrow 1$: $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 9/2 \end{array}\right]$ en faisant $L_2 \leftarrow -L_2/2$
  — $a_{j,1} \leftarrow 0$: on modifie toutes les lignes autres que celle du pivot de sorte à annuler les coef dans la colonne 2 en utilisant (L_2) : $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right]$ en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$
- On conclut que $x_1 = -4$ et $x_2 = 9/2$.

⚠ **Remarque** : Seule la matrice $\boldsymbol{A}$ détermine les étapes dans la résolution par la méthode du pivot. T.153

4.2.6 Exercices

➔ Exercice 57. *Résoudre avec la méthode du pivot de Gauss, les systèmes d'équations suivants* :

1 $\begin{cases} 2x + y + 2z = 7 \\ 3x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

☐

➔ Exercice 58. *Exercice type* : Soit le système d'équations $\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ x - y = \alpha \end{cases}$

① A quelle condition sur λ s'agit-il d'un système de Cramer ?

② Résoudre le système,en fonction de λ et α.

☐

T.154

➔ Exercice 59. *Résolution d'un problème d'interpolation* : Connaissant trois points d'une courbe : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, trouver une fonction de la forme $ax^2 + bx + c$ qui passe par ces points.

☐

➔ EXERCICE 60. *Gauss* : Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle et les résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

1 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$ **3** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

□

T.155

4.3 Extension à l'inversion matricielle

4.3.1 Principes

Objectif : On cherche à inverser la matrice $\boldsymbol{A}$.

Inversion matricielle par la méthode de Cramer
On cherche une matrice $\boldsymbol{X} = (x_{i,j})$ telle que $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}_n$. Il s'agit donc de résoudre le système obtenu en développant le produit $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{I}_n$, avec pour inconnues les coefficients $x_{i,j}$. C'est à la fois :

- un système linéaire de Cramer à n^2 équations et n^2 inconnues,
- et n systèmes de Cramer indépendants à résoudre comportant chacun n lignes et n inconnues.

T.156

Exemple 136 (Inversion matricielle). Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_2 \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x_{1,1} & & +2x_{2,1} & & = 1 \\ & x_{1,2} & & +2x_{2,2} & = 0 \\ 3x_{1,1} & & +4x_{2,1} & & = 0 \\ & 3x_{1,2} & & +4x_{2,2} & = 1 \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\iff \boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{B}' \tag{3}$$

On obtient un système linéaire à 4 équations et 4 inconnues, qu'on peut résoudre à l'aide de l'une des 3 méthodes vues précédemment.

Mais aussi :

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_2 \iff \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{AX}_1 = \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{AX}_2 = \boldsymbol{B}_2 \end{array} \right. \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

On se ramène donc à deux systèmes linéaires de même matrice de transformation $\boldsymbol{A}$. Et comme la méthode du pivot est dictée par la matrice $\boldsymbol{A}$ on peut **les résoudre simultanément**.

T.157

4.3.2 Extension de la méthode du pivot de Gauss à l'inversion matricielle

Méthodologie 137 (Pivot de Gauss pour l'inversion matricielle)**.** *Pour calculer l'inverse de $\boldsymbol{A}$, en utilisant les règles d'équivalence sur les lignes, on passe du système* $[\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$ *au système* $[\boldsymbol{I}_n|\boldsymbol{A}^{-1}]$. *Il n'y a plus qu'à relire la matrice* $\boldsymbol{A}^{-1}$.

T.158

Exercice 61. *Dire, si les matrices qui suivent sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse avec la méthode du pivot de Gauss :*

1 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

4 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5 $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

□

T.159

Exercice 62. *Inversion de matrices 2x2 :* Dire si l'inversion de la matrice est possible, et si oui inverser-la :

1 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2 $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$

3 $\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4 $\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

5 $\boldsymbol{A}_5 = \boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2$

6 $\boldsymbol{A}_6 = \boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{A}_4$

7 $\boldsymbol{A}_7 = \boldsymbol{A}_3 \times \boldsymbol{A}_4$

8 $\boldsymbol{A}_8 = \boldsymbol{A}_2^T$

9 $\boldsymbol{A}_9 = 3\boldsymbol{A}_1$.

□

T.160

Exercice 63. *Inversion des matrices 2x2 :* Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

① Montrer que $\boldsymbol{A}^2 - (a+d)\boldsymbol{A} + (ad-bc)\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{0}$.

② En déduire que si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\big((a+d)\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}\big)$.

□

Exercice 64. *Inversibilité :* Pour tout nombre réel m, on considère la matrice $\boldsymbol{A}(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$.

Déterminer pour quelles valeurs de m la matrice $\boldsymbol{A}(m)$ est inversible, puis déterminer l'inverse avec la méthode du pivot de Gauss.

□

T.161

4.4 Systèmes linéaires quelconques

4.4.1 Nombre de solutions d'un système linéaire quelconque

Définition 138 (Lignes linéairement indépendantes)**.** Soit un système linéaire quelconque de m inconnues et n équations. Les lignes du système sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas n coefficients λ_k autres que 0 tels que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{0}_{1,n}}$.

Exemple 139 ($\begin{cases} x - y = 2 & (L_1) \\ 2x - 2y = 4 & (L_2) \end{cases}$). Avec $\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, on a $2\boldsymbol{L}_1 - \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{0}_{1,3}$ donc deux lignes linéaires dépendantes.

T.162

Définition 140 (Système linéaire sous-déterminé)**.** Un système linéaire est **sous-déterminé** lorsque le nombre de lignes linéairement indépendantes est inférieur au nombre d'inconnues.

Définition 141 (Système linéaire sous-déterminé, sur-déterminé)**.** Un système linéaire est **sur-déterminé** lorsque le nombre de lignes linéairement indépendantes est supérieur au nombre d'inconnues.

Exemple 142 (Des systèmes)**.** $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$ est sous-déterminé ; $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ est sur-déterminé

T.163

Théorème 143 (Nombre de solutions d'un système)**.** *Soit un système linéaire $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Alors :*

- *S'il possède autant d'inconnues (p) que d'équations et s'il est de Cramer (lignes linéairement indépendantes), alors il possède une solution unique $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ (cf. méthodes précédentes).*

Sinon :

- *Si le système est sous-déterminé, il possède une infinité de solutions ;*
- *Si le système est sur-déterminé, il ne possède aucune solution.*

T.164

4.4.2 Résolution des systèmes carrés

Méthodologie 144 (Pivot de Gauss pour les systèmes carrés ($n = m$))**.** *Partant du système matriciel carré, ① utiliser les règles d'équivalence pour obtenir un système linéaire équivalent $\boldsymbol{A'X} = \boldsymbol{B'}$ dans lequel $\boldsymbol{A'}$ est **triangulaire supérieure** :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & & a'_{n,n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A'}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B'}}$$

Puis ② analyser les cas de figure :

- *Si la dernière ligne de $\boldsymbol{A'}$ est non nulle : système de Cramer avec une **solution unique** qui se résout par substitution progressive.*
- *Si les k dernières lignes de $\boldsymbol{A'}$ sont nulles et correspondent chacune à des coefficients nuls dans $\boldsymbol{B'}$: système sous-déterminé avec une **infinité de solutions** obtenues en exprimant k inconnues en fonction des n − k inconnues restantes ;*

- *Si l'une des lignes de $\boldsymbol{A'}$ est nulle et correspond à un coefficient non nul dans $\boldsymbol{B'}$: système sur-déterminé n'ayant **pas de solution**.*

T.165

4.4.3 Résolution des systèmes non carrés

Méthodologie 145 (Pivot de Gauss pour les systèmes non carrés avec $n < m$)**.** *Partant du système matriciel, ① utiliser les règles d'équivalence sur les lignes pour obtenir un système linéaire équivalent $\boldsymbol{A'X} = \boldsymbol{B'}$ dans lequel $\boldsymbol{A'}$ est **le début d'une matrice triangulaire supérieure** :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1,m} \\ & \ddots & & \vdots & \\ \mathbf{0} & & a'_{n,k} & \cdots & a'_{n,m} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A'}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B'}}$$

Puis ② analyser les cas de figure :

- *Si les k dernières lignes de $\boldsymbol{A'}$ sont nulles et que les k dernières lignes de $\boldsymbol{B'}$ sont nulles aussi : Système sous-déterminé ayant une infinité de solutions obtenues en exprimant k inconnues en fonction des $m - k$ restantes ;*
- *Si l'une des lignes (la k^e) de $\boldsymbol{A'}$ est nulle tandis que la k^e ligne de $\boldsymbol{B'}$ n'est pas nulle : Système sur-déterminé n'ayant pas de solution.*

T.166

Méthodologie 146 (Pivot de Gauss pour les systèmes non carrés avec $n > m$)**.** *Partant du système matriciel, ① utiliser les règles d'équivalence pour obtenir un système linéaire équivalent $\boldsymbol{A'X} = \boldsymbol{B'}$ dans lequel les m premières lignes de $\boldsymbol{A'}$ constituent une **matrice triangulaire supérieure dont les n-m lignes dernières sont nulles** :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a'_{k,m} \\ & \mathbf{0} & \\ & & \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A'}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_k \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{B'}}$$

② Analyser ensuite les solutions :

- *Si les m 1^e^ lignes de $\boldsymbol{A'}$ sont non nulles, si les $n - m$ dernières lignes de $\boldsymbol{A'}$ sont nulles et si les m derniers coefficients de $\boldsymbol{B'}$ sont nuls : système de Cramer avec une **solution unique** obtenue en ne gardant que les m 1^e^ lignes.*
- *Si k lignes de $\boldsymbol{A'}$ sont nulles et sont chacune associées à un coefficient dans $\boldsymbol{B'}$ nul : infinité de solutions obtenues en exprimant k inconnues en fonction de $m - k$ paramètres ;*
- *Si une ligne de $\boldsymbol{A'}$ (la k^e) est nulle et que le k^e coefficient de $\boldsymbol{B'}$ est non nul : aucune solution.*

T.167

4.4.4 Rang

Définition 147 (Rang)**.** Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice de taille $n \times m$. Le rang de $\boldsymbol{A}$ est la taille de la plus grande matrice carrée extraite de $\boldsymbol{A}$ de déterminant non nul. C'est un nombre et on le note $\boxed{\mathrm{rang}(\boldsymbol{A})}$.

Propriétés

- $\text{rang}(A) \leq \min(n,m)$
- Le rang d'une matrice représente le nombre de colonnes (ou de lignes) indépendantes (non linéairement dépendantes).

Définition 148 (Rang plein)**.** Soit A une matrice de taille $n \times m$. On dit que$A$ est de **rang plein** si $\boxed{\text{rang}(A) = \min(n,m)}$.

T.168

Théorème 149 (Solutions d'un système linéaire et rang)**.** *Soit A une matrice de taille $n \times m$ et B un vecteur colonne de taille n impliqué dans un système linéaire de la forme $AX = B$ (où X est le vecteur d'inconnues). En notant $(A|B)$ la matrice obtenue en concaténant A et B suivant les colonnes, alors :*

- *si $\text{rang}(A|B) = m$, le système possède une unique solution ;*
- *si $\text{rang}(A|B) < m$, le système possède une infinité de solutions paramétrées par $m-\text{rang}(A)$ variables $x_1, \ldots, x_{m-\text{rang}(A)}$;*
- *si $\text{rang}(A|B) > m$, le système n'a aucune solution.*

T.169

4.5 Exercices

➔ Exercice 65. *Résolution de systèmes linéaires :* Pour chacun des systèmes linéaires suivants, donner la notation matricielle compacte correspondante, puis trouver l'ensemble de solutions en utilisant la méthode la plus appropriée :

1 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ 4x + 3y + z \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y + z \end{cases}$

4 $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

□

T.170

➔ Exercice 66. *Résolution d'un système linéaire paramétré :* Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe quelconque. Résoudre et discuter suivant la valeur de λ le système d'équations : $\begin{cases} (\lambda - 1)x + (1 - \lambda) = 0 \\ 2x + (1 + \lambda)y + (1 + \lambda)z = 2 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$

□

➔ Exercice 67. *Matrice de rotation :* Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel quelconque et soit $A(x)$ la matrice définie par $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

① Montrer que $A(x)$ est inversible, puis calculer son inverse et montrer que $A^{-1}(x) = A(-x)$.

② Montrer que $A(x)^2 = A(2x)$.

③ En déduire $A(x)^n$ pour tout entier relatif n.

□

T.171