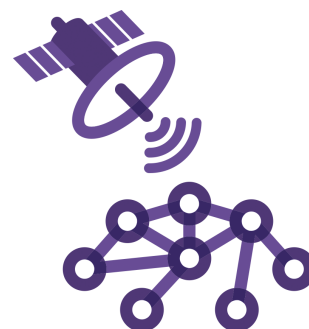




Mathématiques des systèmes numériques Ressource R213

Cyrille SICLET, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr

Kévin KASPER, kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr

Bruno TISSERAND, bruno.tisserand@univ-grenoble-alpes.fr

Cléo BARAS, cleo.baras@univ-grenoble-alpes.fr

Version 26.3

Table des matières

1	Introduction aux signaux discrets	2
1.1	Rappels sur les suites numériques	2
1.2	Suites récurrentes	6
1.3	Signaux discrets	8
2	De la géométrie 2D à l'algèbre linéaire nD	12
2.1	Éléments de géométrie 2D	12
2.2	Éléments de géométrie 3D	20
2.3	Généralisation à la nD	23
2.4	Combinaison linéaire : en route vers les matrices	23
3	Matrices	25
3.1	Algèbre des matrices	25
3.2	Déterminant d'une matrice	46
4	Systèmes linéaires	63
4.1	Généralités sur les systèmes linéaires	63
4.2	Système linéaire de Cramer	64
4.3	Extension à l'inversion matricielle	71
4.4	Systèmes linéaires quelconques	77
4.5	Exercices	78

1 Introduction aux signaux discrets

Définition 1 (Les signaux discrets).

Les signaux discrets sont des fonctions de la variable temporelle entière k . Ils véhiculent une information délivrée par l'évolution d'une grandeur physique mesurée à des instants t_k , et peuvent être de natures variées :

- en **électronique** : signal de tension ou d'intensité ;
- en **télécommunication** : signal électromagnétique en sortie d'un modulateur ;
- en **téléphonie** : signal de parole, signal vidéo pour une visioconférence.

Contexte général du cours

En mathématiques, on utilise souvent les lettres n ou k pour désigner des variables entières, et la lettre u pour désigner une suite dont le terme général u_n est fonction d'un paramètre entier n . Dans ce cours on utilisera cette notation usuelle pour décrire des propriétés mathématiques générales. Quand on fera référence à un signal discret, on utilisera plutôt la notation $s[k]$ pour désigner un signal s dépendant d'un paramètre entier k représentant le temps discret.

T.7

Signal continu (analogique)

Variable temporelle t réelle : signal $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Signal discret (numérique)

Variable temporelle k entière : signal $s[k]$, $k \in \mathbb{Z}$

Passage du continu au discret : échantillonnage

échantillonnage d'un signal continu $s(t)$ à la période T_e : $s[k] = s(t_0 + kT_e)$ avec t_0 instant arbitraire (souvent, $t_0 = 0$)

T.8

1.1 Rappels sur les suites numériques

1.1.1 Définitions

Définition 2 (Suite numérique). Une **suite numérique** u est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, et notée : $u : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases}$.

On appelle n le **rang** et u_n est le **terme général** de la suite.

T.9

Exemple 3 (Une suite). $u : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ n \mapsto \frac{1}{4}n + \frac{1}{2} \end{cases}$ est une suite de terme général $u_n = \frac{1}{4}n + \frac{1}{2}$. Sa représentation est donnée à la figure 1.

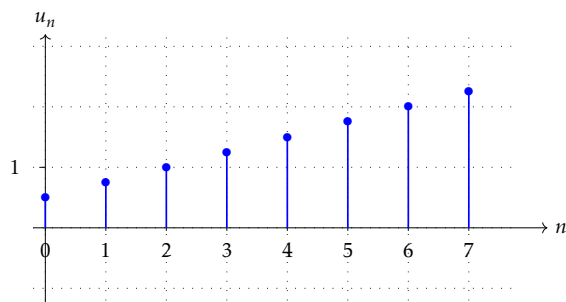


FIGURE 1 – Représentation d'une suite.

Remarque : Une suite u peut n'être définie qu'à **partir d'un certain rang** (apcr.) n_0 : cela signifie que u_n n'est donné que pour $n \geq n_0$.

T.10

1.1.2 Caractéristiques

1.1.2.A Sens de variation

Définition 4 (Sens de variation). Soient une suite u et $n_0 \in \mathbb{N}$. u est :

1. **croissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$
2. **strictement croissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n$
3. **décroissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$
4. **strictement décroissante** apcr. n_0 si et seulement si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} < u_n$
5. **monotone** apcr. n_0 si et seulement si u est croissante ou décroissante apcr. n_0

➔ EXERCICE 1. *Sens de variation :*

En calculant le signe de $u_{n+1} - u_n$ déterminer si le sens de variation des suites de termes généraux suivants : (on indiquera le terme à partir duquel la suite est croissante ou décroissante) :

1 $u_n = n^2 - 2n - 1$

2 $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

3 $u_n = \sqrt{n}$

□

T.11

1.1.2.B Bornes

Définition 5 (Suite majorée, minorée, bornée). Soient une suite u et $n_0 \in \mathbb{N}$. La suite u est :

1. **majorée** apcr. n_0 si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq M$
2. **minorée** apcr. n_0 si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq m$
3. **bornée** apcr. n_0 si et seulement si u est majorée et minorée

➔ EXERCICE 2. *Suite majorée, minorée, bornée :*

Montrer que pour $n \geq 0$:

1 $n^2 - 2n - 1 \geq -2$

2 $-1 \leq \frac{n-1}{n+1} < 1$

3 $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq 1$

□

T.12

1.1.2.C Suites alternées

Définition 6 (Suite alternée). Une suite u est alternée apcr. n_0 si pour tout $n \geq n_0$, u_n et u_{n+1} sont de signes opposés, autrement dit : $\forall n \geq n_0, u_n u_{n+1} < 0$

Exemple 7 (Une suite alternée). La suite u de terme général $u_n = (-1)^n$ est alternée. Sa représentation est donnée figure 2.

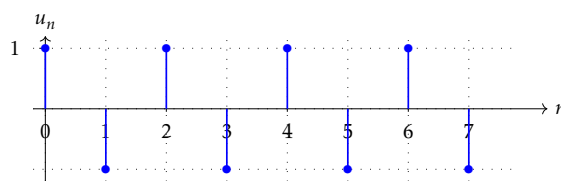


FIGURE 2 – Une suite alternée.

T.13

1.1.3 Comportement asymptotique d'une suite

1.1.3.A Convergence

Définition 8 (Suite convergente). Soit $L \in \mathbb{R}$. Une suite u est **convergente de limite** L en $+\infty$ si et seulement si $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in]n_0; +\infty[, |u_n - L| < \epsilon$. On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim u = L$.

Exemple 9 (Une suite convergente). La suite u de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ est convergente de limite $L = 1$ comme l'illustre son graphe donné figure 3.

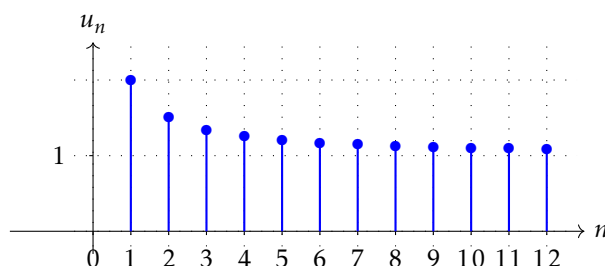


FIGURE 3 – Une suite convergente.

T.14

1.1.3.B Divergence

Définition 10 (Divergence). Une suite u est **divergente** si elle n'est pas convergente. Elle peut :

- être **divergente de limite** $+\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in]n_0, +\infty[, u_n > A$.
On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim u = +\infty$
- être **divergente de limite** $-\infty$ si et seulement si $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in]n_0, +\infty[, u_n < A$.
On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim u = -\infty$
- être **divergente sans limite**

T.15

Exemple 11 (Des suites divergentes). 1. $u_n = \frac{n}{2}$ est divergente de limite $L = +\infty$ (cf. figure 4)

2. $v_n = -\frac{n}{2}$ est divergente de limite $L = -\infty$ (cf. figure 4)

3. $w_n = (-1)^n$ est divergente sans limite (cf. figure 2)

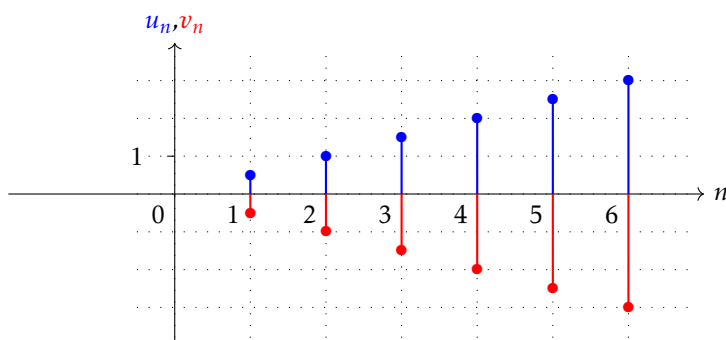


FIGURE 4 – Des suites divergentes.

T.16

Pour $c \in \mathbb{R}$ une constante réelle, $k \in \mathbb{N}^*$ un entier positif non nul, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ une constante réelle positive, v_n suite telle que $\lim v = +\infty$:

u_n	c	v_n^k	$\frac{1}{v_n^k}$	$\sqrt[k]{v_n}$	$\sqrt[k]{v_n}$	v_n^α	$v_n^{-\alpha}$
Limite	$L = c$	$+\infty$	0^+	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+

u_n	$\ln(v_n)$	$\exp(v_n)$	$\cos(v_n)$	$\sin(v_n)$	$n!$
Limite	$+\infty$	$+\infty$	p.d.l. ¹	p.d.l.	$+\infty$

Note : si $v_n = v_0 + 2n\pi$, on a $\cos(v_n) = \cos(v_0)$ et $\sin(v_n) = \sin(v_0)$. De plus, si $v_n = n\pi$ alors $\sin(v_n) = 0$ et si $v_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\cos(v_n) = 0$. Dans tous ces cas particuliers, $\cos(v_n)$ et $\sin(v_n)$ sont en fait des suites constantes et donc convergentes. Dans les autres cas il n'y a pas de limite.

T.17

Les limites de suites obtenues par addition, multiplication et division sont données table 1.

	$\lim_{+\infty} u$	$\lim_{+\infty} v$	$\lim_{+\infty} \lambda u$	$\lim_{+\infty} u + v$	$\lim_{+\infty} u.v$	$\lim_{+\infty} \frac{u}{v}$
Finie-Finie	L_u	L_v	λL_u	$L_u + L_v$	$L_u L_v$	$\frac{L_u}{L_v}$
	L_u	0^+	λL_u	L_u	0	$\text{sign}(L_u)\infty$
	L_u	0^-	λL_u	L_u	0	$-\text{sign}(L_u)\infty$
	0	0	0	0	0	FI
Finie-Infinie	$s\infty$	L_v	$\text{sign}(s\lambda)\infty$	$s\infty$	$\text{sign}(sL_v)\infty$ si $L_v \neq 0$ FI si $L_v = 0$	$\text{sign}\left(\frac{s}{L_v}\right)\infty$
	L_u	$s\infty$	λL_u	$s\infty$	$\text{sign}(sL_u)\infty$ si $L_u \neq 0$ FI si $L_u = 0$	0
Infinie-Infinie	$+\infty$	$+\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
	$-\infty$	$-\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
	$+\infty$	$-\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI
	$-\infty$	$+\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI

TABLE 1 – Opérations sur les limites asymptotiques avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et s un signe (égal à +1 ou -1); l'abréviation FI indique une forme indéterminée.

T.18

Propriété 12. Soient u, v et w trois suites définies apcr. n_0 .

1. Si (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers une limite l inférieure à tous ses majorants
2. Si (u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers une limite l supérieure à tous les minorants

Propriété 13. Si $\forall n > n_0, u_n \leq w_n \leq v_n$, et si $\lim u = \lim v = l$, alors $\lim w = l$.

Propriété 14. Si $\forall n > n_0, v_n \geq u_n$,

1. si $\lim u = +\infty$, alors $\lim v = +\infty$
2. si $\lim v = -\infty$, alors $\lim u = -\infty$

T.19

➔ **EXERCICE 3.** Convergence d'une suite numérique :

Déterminer si les suites u suivantes sont convergentes et si oui, quelles sont leurs limites ?

1 $u_n = \frac{3n-1}{7n+2}$

2 $u_n = \frac{n^2+1}{7n+2}$

3 $u_n = \frac{n(-1)^n + 1}{n+1}$

□

1. p.d.l. : pas de limite

➔ EXERCICE 4. Convergence de suites numériques :

Étudier la convergence des suites u dont le terme général u_n est :

1 $\frac{2n-4}{3n+5}$
5 $\frac{\exp(2n+1)}{\exp(3n-1)}$

2 $n^3 - 2n^2$
6 $\frac{n!}{2^n}$

3 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7 $\frac{n!}{n^n}$

4 $\frac{\cos(n)}{n}$
8 $\frac{1}{n+(-1)^n}$

Correction :

3 Multiplication par l'expression "conjuguée" : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Donc u_n tend vers $\frac{1}{(+\infty) + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$

6 Par définition de la factorielle et de la puissance, $u_n = \frac{n!}{2^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \times 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \cdot 2}$ (où les 2 du dénominateur apparaissent n fois. En développant u_n sous la forme d'un produit de n fractions, il vient : $u_n = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Les fractions $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n-2}{2}$, $\times$, $\frac{3}{2}$ sont plus grandes que 1. Donc d'après le théorème du gendarme, $u_n \geq \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \times 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$. Autrement dit $u_n > \frac{n}{4}$. Or $\frac{n}{4}$ diverge vers $+\infty$, donc par conséquence, u_n diverge vers $+\infty$.

7 Même principe qu'à la question précédente, $u_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}$. Sachant que u_n est positif, et que beaucoup de fractions sont plus petites que 1, il vient : $0 < u_n \leq 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \times 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{n}$ donc $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n}$ tend vers 0, le théorème du gendarme permet de conclure que u_n tend vers 0.

□

T.20

1.2 Suites récurrentes

1.2.1 Définitions

Définition 15 (Suite récurrente). Une **suite récurrente** u est une suite définie implicitement par une relation de récurrence permettant de calculer le terme u_n à partir des termes précédents et de $n : u_n = \phi(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, n)$, où ϕ est une fonction.

Exemple 16 (La suite de Fibonacci). Elle est définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et par deux conditions initiales imposant u_0 et u_1 .

T.21

Méthodologie 17 (Démonstration par récurrence). Pour démontrer qu'une propriété (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$:

1. On démontre la propriété au rang n_0 , i.e. on démontre que (P_{n_0}) est vrai.
2. On suppose que (P_n) est vrai pour n quelconque et on démontre que (P_{n+1}) est vrai (souvent en utilisant la relation de récurrence liant (P_n) à (P_{n+1})).

➔ EXERCICE 5. Somme des entiers de 1 à n : montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. □

➔ EXERCICE 6. Somme des puissances de q : montrer par récurrence que pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. □

T.22

1.2.2 Suites récurrentes classiques

1.2.2.A Suite géométrique de raison q

Définition 18 (Suite géométrique de raison q). Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite u est **géométrique de raison q** lorsqu'elle est définie par la relation de récurrence : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = q u_n$.

Théorème 19 (Suite géométrique de raison q). Soit $q \in \mathbb{C}$. u est une suite géométrique de raison q si et seulement si $\forall 0 \leq k \leq n, u_n = u_k q^{n-k}$.

Démonstration. Par récurrence

□

T.23

1.2.2.B Suite arithmétique de raison q

Définition 20 (Suite arithmétique de raison q). Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite u est **arithmétique de raison q** lorsqu'elle est définie par la relation de récurrence : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + q$.

Théorème 21 (Suite arithmétique de raison q). Soit $q \in \mathbb{C}$. u est une suite arithmétique de raison q si et seulement si $\forall 0 \leq k \leq n, u_n = u_k + (n - k)q$.

Démonstration. Par récurrence □

T.24

➔ EXERCICE 7. Soit u_n la suite définie par la relation : $u_{n+1} = u_n - 3$, avec $u_0 = 1$:

1. Quelle est la nature de cette suite ?
2. Calculer u_{12} .
3. u_n est-elle divergente ou convergente ? Calculer la limite si elle existe.

□

➔ EXERCICE 8. Mêmes questions pour :

1 $u_{n+1} = 2u_n$

2 $u_{n+1} = 0.5u_n$

3 $u_{n+1} = u_n + 1$

□

➔ EXERCICE 9. Récurrence : Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. **Inégalité de Bernoulli** : pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $\prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=1}^n (n + k)$

□

T.25

1.3 Signaux discrets

1.3.1 Signaux discrets usuels

Notation

Un signal discret est une suite $\{x[k]\}$ à termes réels ou complexes définie par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C} \\ k &\mapsto x[k] \end{aligned}$$

Remarque : par abus de langage, on désignera souvent un signal par $x[k]$ au lieu de $\{x[k]\}$.

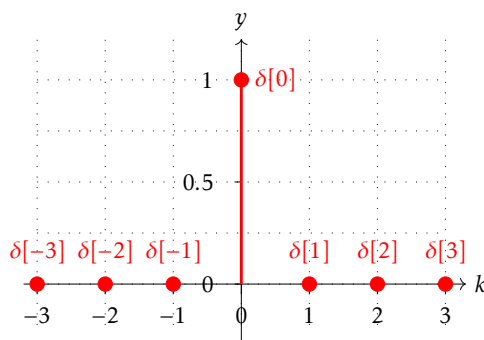
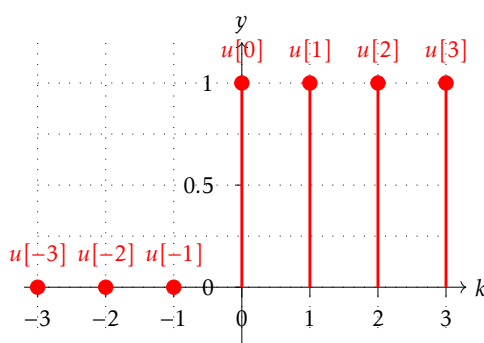
T.26

Définition 22 (Impulsion de Kronecker). On appelle **impulsion de Kronecker** la suite $\delta = \{\delta[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par : $\delta : \begin{cases} \delta[0] = 1 \\ \delta[k] = 0 \end{cases}$ si $k \neq 0$. Ce signal est représenté graphiquement figure 5.

T.27

Définition 23 (Échelon unité). On appelle **suite unité** ou **échelon unité**, la suite $u = \{u[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par : $u : \begin{cases} u[k] = 1 \\ u[k] = 0 \end{cases}$ pour $k \geq 0$ pour $k < 0$. Ce signal est représenté graphiquement figure 6.

T.28

FIGURE 5 – Impulsion de Kronecker $\delta = \{\delta[k]\}_{k \in \mathbb{N}}$.FIGURE 6 – Echelon $u = \{u[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

1.3.2 Propriétés temporelles

Définition 24 (Signal discret causal). Lorsque $x[k] = 0$ pour $k < 0$, on dit que x est causal.

Propriété 25 (Rendre un signal causal). Tout signal x , multiplié par l'échelon unité u , devient causal.

Définition 26 (Signal discret de durée finie). On dit que x est de durée finie lorsqu'il existe deux entiers k_1 et k_2 tels que $x[k] = 0$ pour $k < k_1$ et $k > k_2$.

Définitions 27 (Avance, retard). Étant donné un signal x et k_0 un entier naturel, on définit le signal y comme :

- le **signal retardé** de k_0 échantillons par : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y[k] = x[k - k_0]$; la représentation de y est celle de x décalée de k_0 échantillons vers la droite.
- le **signal avancé** de k_0 échantillons par : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y[k] = x[k + k_0]$; la représentation de y est celle de x décalée de k_0 échantillons vers la gauche.

T.29

➔ EXERCICE 10. Signaux discrets :

- Représenter graphiquement les signaux suivants pour $-3 \leq k \leq 10$:

1 $s[k] = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1]$

2 $s[k] = u[k] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$

3 $s[k] = u[k] + \frac{1}{2}u[k-1]$

4 $s[k] = u[k+1] - u[k-1]$

5 $s[k] = u[k] - \frac{1}{2}u[k-1]$

6 $s[k] = ku[k]$

7 $s[k] = u[k] + \frac{k}{2}u[k-1]$

8 $s[k] = (k+1)u[k+1] - (k-1)u[k-1]$

- Parmi les signaux précédents, lesquels sont causaux ? De durée finie ?

□

T.30

1.3.3 Systèmes discrets

Définition 28 (Système discret). Un système discret F est une transformation d'une suite $x[k]$ (entrée du système) en une suite $y[k] = F\{x[k]\}$ (sortie).

Définition 29 (Systèmes discrets linéaires). On dit qu'un système discret F est linéaire lorsque $F\{\alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k]\} = \alpha_1 F\{x_1[k]\} + \alpha_2 F\{x_2[k]\}$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ et $x_1[k]$ et $x_2[k]$ deux signaux discrets.

Définition 30 (Système discrets invariants). On dit qu'un système discret F est invariant lorsque $F\{x[k-n]\} = y[k-n]$ pour tous k, n entiers.

Exemples 31 (Systèmes linéaires, invariants... ou pas). • $y[k] = x^3[k]$: non linéaire, invariant ;

- $y[k] = kx[k]$: linéaire, non invariant ;
- $y[k] = 3x[k] + 2x[k-1]$: linéaire et invariant.

T.31

Propriété 32 (Équation aux différences). Un système discret est linéaire et invariant (SLI) si et seulement si sa sortie $y[k]$ peut être calculée à partir de son entrée $x[k]$ par une **équation aux différences** du type :

$$\sum_{n=0}^N a_n y[k-n] = \sum_{m=0}^M b_m x[k-m].$$

Opérateurs élémentaires.

Un SLI discret peut être réalisé à l'aide des trois opérateurs de base :

- retard $y[k] = x[k-1]$;
- amplification a : $y[k] = ax[k]$;
- addition : $y[k] = x_1[k] + x_2[k]$.

Exemples 33 (Relations entrée-sortie). • $y[k] = x[k] + 2x[k-1]$

- $y[k] - ay[k-1] = x[k-1]$ (Système récursif du premier ordre)

T.32

Définition 34 (Réponse impulsionnelle). On appelle réponse impulsionnelle d'un SLI discret la réponse (sortie) du système à l'impulsion de Kronecker $\delta[k]$ (entrée du système) : $h[k] = F\{\delta[k]\}$

Définition 35 (Filtre numérique). Un SLI discret est aussi appelé filtre numérique.

T.33

Définition 36 (Système (filtre) causal). Un SLI est dit causal si sa réponse impulsionnelle $h[k]$ est causale.

Définition 37 (Système (filtre) à réponse impulsionnelle finie ou infinie). Un SLI est dit à réponse impulsionnelle finie (RIF) si $h[k]$ est à durée limitée. Dans le cas contraire, on dit qu'il est à réponse impulsionnelle infinie (RII).

➔ EXERCICE 11. Réponse impulsionnelle :

Donner la réponse impulsionnelle des systèmes régis par les relations entrée sorties suivantes et indiquer si le système est causal, RIF ou RII :

1 $y[k] = x[k] + \frac{1}{2}x[k-1]$

2 $y[k] = 2x[k+1] + \frac{1}{2}x[k-1]$

3 $y[k] = x[k] + x[k-1] + x[k-2]$

□

T.34

Théorème 38 (Produit de convolution). La sortie d'un SLI de réponse impulsionnelle finie causale h et d'entrée x , est le signal y défini par : $y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]x[k-n]$ où l'opération $*$ est appelé **produit de convolution** et $h[k] = 0$ pour $k \geq L \in \mathbb{N}$.

➔ EXERCICE 12. On applique un signal $x[k]$ à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h[k]$. Donner la réponse $y[k]$ obtenu en sortie du filtre lorsque :

1. $x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] + 3\delta[k-1]$;
2. $x[k] = \delta[k] + \delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] - \delta[k-1]$;
3. $x[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] - 2\delta[k-1]$.

□

T.35

Propriété 39 (Produit de convolution). Soient s_1, s_2, s_3 trois signaux, λ un réel et k_0 un entier. Alors :

1. **Multipliation par une constante** : $(\lambda s_1) * s_2 = \lambda(s_1 * s_2)$;
2. **Commutativité** : $s_1 * s_2 = s_2 * s_1$;
3. **Associativité** : $(s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3)$;
4. **Distributivité par rapport à l'addition** : $s_1 * (s_2 + s_3) = (s_1 * s_2) + (s_1 * s_3)$;
5. **Convolution avec une impulsion de Kronecker** : $s * \delta = s$ et $s[k] * \delta[k - k_0] = s[k - k_0]$.

➔ EXERCICE 13. On applique un signal $x[k]$ à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h[k]$. Appliquer les propriétés précédentes pour calculer la réponse $y[k]$ obtenu en sortie du filtre lorsque :

1. $x[k] = \delta[k] - 3\delta[k-1]$ et $h[k] = 2\delta[k] + 3\delta[k-2]$;
2. $x[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-2]$ et $h[k] = \delta[k] - 2\delta[k-1] + \delta[k-3]$.

□

T.36

2 De la géométrie 2D à l'algèbre linéaire nD

2.1 Éléments de géométrie 2D

2.1.1 Point dans l'espace 2D

Dans le plan (l'espace 2D), un **point** $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ est identifié par un couple **ordonné** de valeurs réelles m_1 et m_2 .

Muni du **repère cartésien orthonormé** de centre $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ sur l'axe $[Ox)$ et $\vec{j}$ sur l'axe $[Oy)$ (cf. figure 7), le couple de valeurs $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ donne les **coordonnées** de M :

- m_1 est son **abscisse** : c'est la distance qui sépare le point M de l'axe des ordonnées
- m_2 est son **ordonnée** : c'est la distance qui sépare le point M de l'axe des abscisses

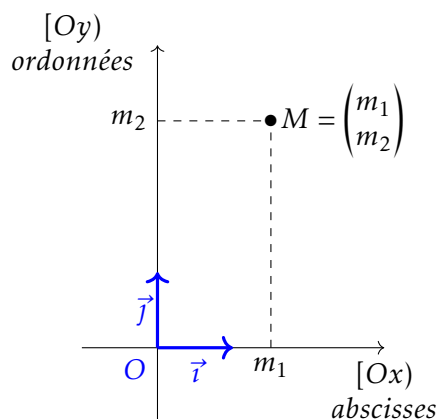


FIGURE 7 – Repérage d'un point dans le plan 2D.

T.38

2.1.2 Vecteurs 2D

2.1.2.A Vecteurs, des déplacements

Définition 40 (Du point au vecteur). Partant d'un point $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ dans le repère cartésien, le **vecteur** $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ est l'**entité** qui décrit le déplacement allant de O (point de départ) à M (point final). (cf. figure 8.) Il consiste à se déplacer de m_1 dans le sens de $\vec{i}$ puis de m_2 dans le sens de $\vec{j}$. On le note : $\overrightarrow{OM} = m_1\vec{i} + m_2\vec{j}$.

Cas particuliers : le vecteur nul, $\vec{i}$ et $\vec{j}$

Le vecteur nul est $\vec{0} = \overrightarrow{OO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

T.39

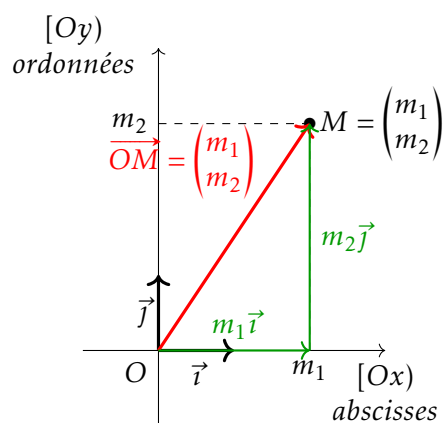


FIGURE 8 – Vecteur en 2D.

2.1.2.B Vecteurs, déplacements indépendants de leur point de départ

Définition 41 (Un vecteur à partir de ses deux extrémités). Pour deux points $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le couple de valeurs $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit donc : $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j}$. (cf. figure 9).

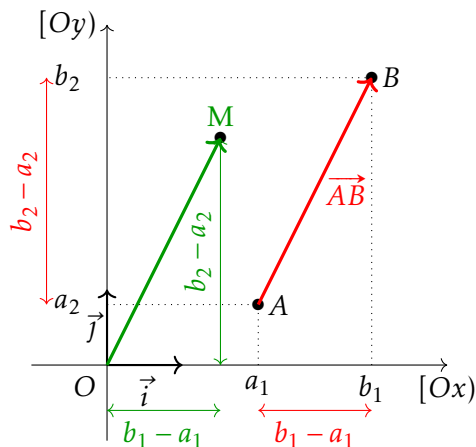


FIGURE 9 – Vecteur en 2D.

▲ Remarque : Puisqu'un vecteur est une **mesure de déplacement**, il est égal au vecteur $\overrightarrow{OM}$ où M est le point $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

➔ EXERCICE 14. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec :

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

□

Définition 42 (Description d'un vecteur). Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (cf. figure 8) peut se décrire à l'aide :

1. d'une **direction** : celle de la droite (OM)
2. d'un **sens** : celui allant de O vers M
3. d'une **longueur** : celle du segment [OM]

Puisqu'il exprime un déplacement, il n'est pas nécessaire d'en exprimer les points d'extrémités et on le notera plus généralement $\vec{v}$.

T.41

2.1.3 Égalité de deux vecteurs

Théorème 43 (Égalité de deux vecteurs). Deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sont égaux

$\iff$ leurs coordonnées sont égales :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 & (\text{égalité des abscisses}) \\ u_2 = v_2 & (\text{égalité des ordonnées}) \end{cases}$$

$\iff$ leur direction, leur sens et leur longueur sont égaux.

Remarque : Deux vecteurs sont de même direction s'ils sont portés par (ou s'ils dirigent) des droites parallèles.

T.42

2.1.4 Vecteurs colinéaires

Définition 44 (Vecteurs colinéaires). Des vecteurs sont **colinéaires** s'ils sont de même direction (mais pas nécessairement de même sens ni de même longueur). (cf. figure 10).

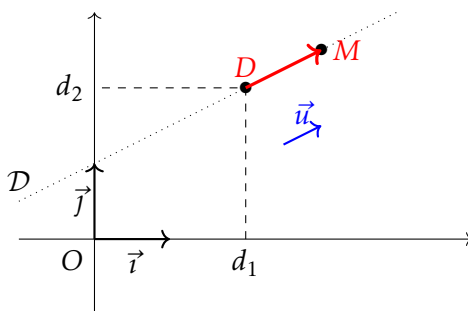


FIGURE 10 – Vecteurs colinéaires

Définition 45 (Notion de produit externe). Soit un vecteur $\vec{v}$ de longueur L_v . Un vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ s'écrit $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ où λ est un réel. La longueur de $\vec{u}$, notée L_u , est : $L_u = |\lambda|L_v$. L'opération "·" s'appelle un **produit externe** (ou multiplication externe).

➔ **EXERCICE 15.** Parmi les vecteurs suivants, dire lesquels sont colinéaires :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

□

T.43

2.1.5 Opérations vectorielles en 2D

2.1.5.A Multiplication externe en 2D

Définition 46 (Produit externe.). Dans le plan 2D, le résultat du **produit externe** du réel λ et du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$ qui :

- est colinéaire à $\vec{v}$;
- dont la longueur est celle de $\vec{v}$ multipliée par $|\lambda|$;
- et dont le sens est celui de $\vec{v}$ si $\lambda > 0$ et est opposé à $\vec{v}$ si $\lambda < 0$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont : $\vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$; le nombre λ s'appelle un **scalaire**. (cf. figure 11).

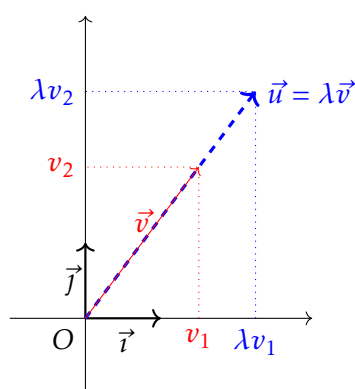


FIGURE 11 – Multiplication externe d'un vecteur par un scalaire dans le plan 2D.

Remarques :

- Par souci de rapidité et de lisibilité, le produit $\lambda \cdot \vec{v}$ sera souvent écrit $\lambda \vec{v}$
- Le produit externe étire la longueur d'un vecteur si $|\lambda| > 1$ et la contracte si $0 < |\lambda| < 1$.

T.44

Propriété 47 (Propriétés de "."). Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs et λ un réel.

- Si $\lambda \neq 0$, $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{\lambda} \cdot \vec{u}$
- Si $\lambda = 0$, alors $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (même si $\vec{v}$ n'est pas $\vec{0}$).

Propriété 48 (Équation paramétrique de droite). Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ passant par le point D est l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{DM}$ est colinéaire à $\vec{u}$: $\mathcal{D} = \left\{ M \mid \overrightarrow{DM} = \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

T.45

➔ **EXERCICE 16. Équation de droite :** donner l'équation paramétrique de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ avec

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

T.46

2.1.5.B Addition en 2D

Définition 49 (Addition +). Dans le plan 2D, le résultat de la somme des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$ dont les coordonnées sont : $\vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$. (cf. figure 12).

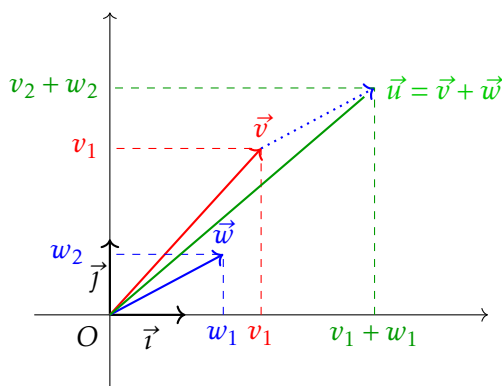


FIGURE 12 – Addition de deux vecteurs dans le plan 2D.

T.47

2.1.5.C Combinaisons linéaires

Définition 50 (Combinaisons linéaires). Étant donnés m vecteurs (ayant chacun 2 coordonnées), notés $\vec{v}_j$ avec j variant de 1 à m et m réels, notés λ_j avec j variant de 1 à m , le vecteur

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j$ est appelé **combinaison linéaire (CL)** des vecteurs $\vec{v}_j$ et des réels λ_j .

➔ EXERCICE 17. Des CL : $\vec{v} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$ est une combinaison linéaire de $m = 3$ vecteurs avec les scalaires $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$; quelles sont les coordonnées de $\vec{v}$ lorsque $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$? □

T.48

2.1.6 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

Définition 51 (Espace des vecteurs $\mathbb{R}^2$). L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ d'abscisse v_1 et d'ordonnée v_2 dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ forme l'**espace (ensemble) de vecteurs $\mathbb{R}^2$** :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} / v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Définition 52 (Espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$). L'espace de vecteurs $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition entre vecteurs et du produit externe entre un réel et un vecteur définis précédemment, définit l'**espace vectoriel** noté $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

T.49

Théorème 53 (Stabilité de $\mathbb{R}^2$). Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$, toute **combinaison linéaire** de vecteurs de l'espace est un vecteur de l'espace : on dit que l'espace est stable pour l'addition et la multiplication.

Remarque : $\mathbb{R}^2$ est un espace à 2 dimensions (2 coordonnées par vecteurs, 2 directions $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour décrire un vecteur).

T.50

2.1.7 Droites dans $\mathbb{R}^2$

Définition 54 (Équations de droite dans $\mathbb{R}^2$). Dans $\mathbb{R}^2$, la droite passant par un point D et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble de points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan dont les coordonnées sont *contraintes* par **une** relation. Cette relation est soit :

- une **équation cartésienne** de la forme : $ax + by + c = 0$ avec a, b , et c trois coefficients réels et $\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Cette écriture généralise les deux expressions de la forme $y = ax + b$ et $x = c$.
- une **équation paramétrique** de la forme $\overrightarrow{DM} = \lambda \vec{u}$ avec λ un réel associé de manière unique à x et y .

➔ **EXERCICE 18. Équation de droite** : donner l'équation de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ avec

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

T.51

2.1.8 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

Rappel : Projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$

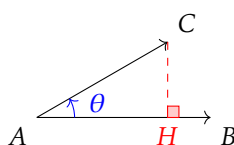


FIGURE 13 – Produit scalaire de deux vecteurs par projection orthogonale.

Le projeté orthogonal de C sur (AB) est H (cf. figure 13). Il définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$, noté $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle$, par la relation : $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \overline{AH} \cdot \overline{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos(\theta)$ avec :

- $\overline{AH}$ (resp. $\overline{AB}$) la distance algébrique (signée) entre A et H (resp. B)
- AC (resp. AB) la distance géométrique (non signée) entre A et C (resp. B)
- θ , l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = AC \cdot AB \cdot \cos(\theta)$ est un nombre réel, mesurant à la fois
① l'**alignement** de deux vecteurs et ② l'**angle** qui les séparent (cf. figure 14).

T.52

Il s'interprète dans les cas suivants de la sorte :

1. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec C et B du "même côté" de A alors $\theta = 0$ et $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = AC \cdot AB$ est une quantité positive (**alignement**).
2. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec C et B chacun d'un côté de A alors $\theta = \pi$ et $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = -AC \cdot AB$ (**alignement opposé**).
3. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **orthogonaux** alors $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$.

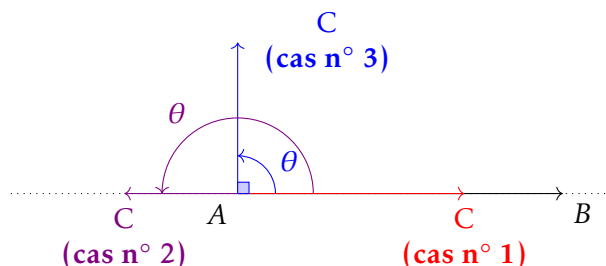


FIGURE 14 – Cas limites du produit scalaire

T.53

Définition 55 (Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$). Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ définis par leurs coordonnées ① abscisses u_1 et v_1 et ② ordonnées u_2 et v_2 peut se calculer avec : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^2 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Il est alors appelé **produit scalaire canonique**.

T.54

Définition 56 (Vecteurs orthogonaux). Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

➔ EXERCICE 19. Parmi les vecteurs suivants, dire lesquels sont orthogonaux :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Définition 57 (Vecteur normal). Si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs d'une droite, on dit qu'il est normal à cette droite.

➔ EXERCICE 20. Équation de droite : donner l'équation de la droite passant par le point A et de vecteur normal $\vec{u}$ avec

1 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3 $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

T.55

2.1.9 Norme dans $\mathbb{R}^2$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = AC \cdot AB \cdot \cos(\theta)$ permet également de mesurer la longueur d'un vecteur :

Démonstration. Lorsque $C = B$ avec donc un angle $\theta = 0$, on obtient : $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = AB \cdot AB = AB^2$, donc $AB = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle}$. $\square$

Définition 58 (Norme). La **norme** d'un vecteur $\vec{v}$, notée $\|\vec{v}\|$, mesurant sa longueur L_v (autrement dit la **distance** non signée entre ses deux extrémités), se définit à partir du produit scalaire par :

$$L_v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Remarque : De tout vecteur $\vec{v}$ non nul peut être déduit un **vecteur unitaire** $\vec{u}$ (c'est à dire de longueur 1) en prenant : $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$.

T.56

Théorème 59 (Norme associée au produit scalaire canonique). Pour un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ défini par ses coordonnées dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, la norme de $\vec{v}$ (basée sur le produit scalaire canonique) se calcule avec :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Définition 60 (Espace vectoriel euclidien). L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit **scalaire** canonique (et de sa **norme**) est un **espace vectoriel euclidien**.

T.57

➔ **EXERCICE 21. Équations de droite :**
Dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$,

- ① Tracer puis donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation cartésienne $2x + 3y + 5 = 0$.
- ② Soient le point $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. Déterminer l'équation cartésienne des droites suivantes :
 - ❶ $\mathcal{D}_2$: droite parallèle à $\mathcal{D}_1$ et passant par A
 - ❷ $\mathcal{D}_3$: droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$
 - ❸ $\mathcal{D}_4$: droite passant par A et orthogonale à la direction $\vec{u}$.

 $\square$

Correction :

1. Droite de la forme $\underbrace{a}_2 x + \underbrace{b}_3 y + \underbrace{c}_5 = 0$ donc de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (👁 formule de cours).
2. $\mathcal{D}_2$, parce que parallèle à $\mathcal{D}_1$, a le même vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ que $\mathcal{D}_1$. Puisqu'elle passe par A , $\mathcal{D}_2$ est l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ avec λ un réel. Or $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ (👁 calcul d'un vecteur à partir de ses coordonnées), donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 3\lambda \\ y-3 = -2\lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ y = -2\lambda + 3 \end{cases} \quad (\text{Equation paramétrique de la droite de paramètre } \lambda \text{ réel}) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda - 2 \\ \lambda = \frac{y-3}{-2} = \frac{3-y}{2} \end{cases} \quad (\text{Paramètre } \lambda \text{ en fonction de } x \text{ et } y)
\end{aligned}$$

En remplaçant λ par son expression dans la première équation, on obtient l'équation cartésienne de la droite : $x = 3 \cdot \frac{3-y}{2} - 2 \Leftrightarrow 2x + 4 = 9 - 3y \Leftrightarrow \boxed{2x + 3y - 5 = 0}$

3. $\mathcal{D}_3$ est l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$ avec λ un paramètre réel.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda - 2 \Rightarrow \lambda = x + 2 \\ y = -4\lambda + 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc en utilisant la 2^{de} équation, $y = -4(x + 2) + 3 \Leftrightarrow \boxed{4x + y + 5 = 0}$

4. $\mathcal{D}_4$ est l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = 0$. Or $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ donc $\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \rangle = (x+2) \cdot 1 + (y-3) \cdot (-4)$, ce qui aboutit à l'équation de la droite : $\boxed{x - 4y + 14 = 0}$.

T.58

➔ EXERCICE 22. *Propriété du triangle* : Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On construit ensuite les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

- ① Tracer le triangle ABC et positionner les points I et J .
- ② Donner les coordonnées de I et de J .
- ③ Donner les longueurs AI et AJ .
- ④ Déterminer l'équation cartésienne de la droite (IJ) .
- ⑤ Démontrer que la droite (IJ) passe par le milieu du segment $[BC]$.

□

T.59

2.2 Éléments de géométrie 3D

2.2.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$

Définition 61 (L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$). L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ avec v_1, v_2, v_3 trois nombres réels forme l'espace vectoriel noté $\mathbb{R}^3$. $\vec{v}$ s'interprète comme un déplacement de O vers un point M dont les coordonnées dans le repère cartésien orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont : v_1 pour abscisse, v_2

pour ordonnée et v_3 pour altitude, avec : $\overrightarrow{OM} = \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. $\vec{v}$ se décrit toujours comme une direction, un sens et une longueur. (cf. figure 15).

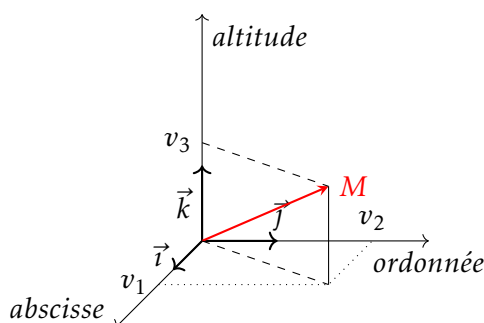


FIGURE 15 – L'espace 3D.

▲ Remarque : $\mathbb{R}^3$ définit l'espace 3D, donc un **espace de dimension 3** : 3 coordonnées/3 directions par vecteur pour décrire un déplacement.

T.60

Cas particulier

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Théorème 62 (Égalité de deux vecteurs). Deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ sont égaux

$$\iff \text{leurs coordonnées sont égales : } \begin{cases} u_1 = v_1 & (\text{égalité des abscisses}) \\ u_2 = v_2 & (\text{égalité des ordonnées}) \\ u_3 = v_3 & (\text{égalité des altitudes}) \end{cases}$$

$\iff$ leur direction, leur sens et leur longueur sont égaux.

T.61

2.2.2 Opérations vectorielles dans $\mathbb{R}^3$

Définition 63 (Addition "+"). Pour deux vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur somme est

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}.$$

Définition 64 (Produit externe "."). Pour un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ et λ un nombre réel, $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$

est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}$ (de même direction mais de longueur et de sens modifié par λ).

T.62

Définition 65 (Combinaisons linéaires). Étant donnés ① m vecteurs (ayant chacun 3 coordonnées), notés $\vec{v}_j$ avec j variant de 1 à m , et ② m réels, notés λ_i avec j variant de 1 à m , le vecteur $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j$ est appelé **combinaison linéaire** (CL) des vecteurs $\vec{v}_j$ et des réels λ_j .

➔ EXERCICE 23. Une CL : Quel est le vecteur résultat de la combinaison linéaire $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$ avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$? □

T.63

2.2.3 Produit scalaire et norme dans $\mathbb{R}^3$

Définition 66 (Produit scalaire canonique). Soient deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ définis par leurs coordonnées dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient L_u et L_v leurs longueurs respectives et θ l'angle qui les sépare. On définit :

- le produit scalaire canonique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^3 u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 ; \text{ ce nombre mesure l'alignement de } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.$$

- la norme associée par : $\|\vec{v}\| = L_v = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$; ce nombre mesure la longueur de $\vec{v}$.

T.64

2.2.4 Exercices

➔ EXERCICE 24. Calculs de produit scalaire et de norme : On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Calculer, à l'aide du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u} + \vec{w}\|$. □

➔ EXERCICE 25. : Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, montrer que le triangle ayant pour sommets $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est rectangle isocèle.

Correction :

- Le triangle est isocèle si deux de ces côtés sont de longueur égale. Or :

$$\|\vec{AB}\|^2 = x_{AB}^2 + y_{AB}^2 + z_{AB}^2 = 16,$$

$$\begin{aligned} - \quad \|\vec{AC}\|^2 &= x_{AC}^2 + y_{AC}^2 + z_{AC}^2 = 8 \\ - \quad \text{et } \|\vec{BC}\|^2 &= x_{BC}^2 + y_{BC}^2 + z_{BC}^2 = 8. \end{aligned}$$

Donc le triangle est isocèle de sommet C . S'il est rectangle, il le sera également de sommet C .

- Puisque $\langle \vec{CA}, \vec{CB} \rangle = x_{CA}x_{CB} + y_{CA}y_{CB} + z_{CA}z_{CB} = 0$, le triangle est rectangle en C .

□

T.65

2.3 Généralisation à la nD

2.3.1 Principe de la généralisation

On peut facilement généraliser les vecteurs de la 2D et de la 3D à la nD : un vecteur $\vec{v}$ est un **n-uplet**

ordonné de n coordonnées $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où les v_i sont des nombres réels.

Se généralisent aussi l'addition, la multiplication externe et la dimension. Ces opérations servent à former l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Se généralisent enfin le produit scalaire (mesure d'alignement) et la norme (mesure de distance) qui font de $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel euclidien.

T.66

2.3.2 Notion de nD

Les principes de la généralisation à la nD sont donnés table 2.

T.67

2.3.3 Quelques interprétations de nD

Des exemples simples

Un vecteur nD est donc la donnée de n informations numériques ordonnées, repérées en composantes.

- $n = 4$: espace **spatio-temporel** avec abscisse, ordonnée, altitude et temps.
- $n = 3$: espace des couleurs avec leur niveau de rouge, vert, bleu.
- $n = 2$: les 2 coefficients (a_0, a_1) d'un polynôme de la forme $a_0 + a_1 X$.

Domaines d'application

- (Télé)communications (modulation/démodulation) : se repérer sur les porteuses
- Big Data : croiser des données en groupe d'intérêt
- Statistiques : par ex. profil moyen d'un étudiant validant son BUT

T.68

2.4 Combinaison linéaire : en route vers les matrices

Les CL $\sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j$ impliquent une **famille** de m vecteurs (ordonnés par l'indice j), chacun défini par n coordonnées :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{v}_m = \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ \vdots \\ v_{n,m} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{abscisse} \\ \text{ordonnée} \\ \vdots \end{array}$$

Cette famille peut se manipuler par le biais d'un tableau appelé **matrice** dont les m colonnes sont les n coordonnées des m vecteurs :

		En 2D	En nD ($n \geq 1$)
Espace	espace vectoriel	$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$	$(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$
	Vecteurs	$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
	Scalaire	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda \in \mathbb{R}$
Opérations	Addition	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$
	Multiplication	$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$	$\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$
	CL de m vecteurs	$\sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j$	
	Égalité	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ \dots \\ u_n = v_n \end{cases}$
Alignement	Produit scalaire	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^2 u_i v_i$	$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$
	Norme	$\ \vec{u}\ = L_u = \sqrt{\sum_{i=1}^2 u_i^2}$	$\ \vec{u}\ = L_u = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$

TABLE 2 – Généralisation à la nD

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_m \\ \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,m} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

3 Matrices

3.1 Algèbre des matrices

3.1.1 Définitions

Définition 67 (Matrice à n lignes et m colonnes). Une matrice A de n lignes et m colonnes est définie par $n \times m$ coefficients, réels ou complexes, identifiés par deux indices (dits de ligne et de colonne) rangé dans un "tableau" : le coefficient $a_{i,j}$ désigne le coefficient de A à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La matrice A peut alors être représentée par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

colonnes j

n
ligne i

⚠ Remarques :

- De façon plus compacte, la matrice A est notée : $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$.
- Les pointillés traduisent une suite logique dans les coefficients et leurs indices.
- En algèbre linéaire, chaque colonne de la matrice représente les n coordonnées d'un vecteur.

Exemple 68 (Une matrice). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice ayant $n = 2$ lignes et $m = 4$ colonnes donc avec 8 coefficients : $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 2$, $a_{1,3} = 3$, $a_{1,4} = 4$, $a_{2,1} = 5$, $a_{2,2} = 6$, $a_{2,3} = 7$ et $a_{2,4} = 8$.

Dans un contexte d'algèbre linéaire, A désigne la famille de 4 vecteurs du plan 2D, donnés par leurs coordonnées : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Bien que les coefficients des matrices puissent être complexes, on se limitera dans le cadre de ce cours aux coefficients réels.

⚠ Remarque : L'ensemble des matrices de n lignes et m colonnes à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$.

Définition 69 (Matrice nulle). Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $O_{n \times m}$ lorsqu'elle a n lignes et m colonnes :

$$O_{n \times m} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

n

3.1.2 Quelques matrices particulières

3.1.2.A Matrices carrées

Définition 70 (Matrice carrée). Une **matrice carrée** est une matrice ayant autant de lignes que de colonnes (autrement dit $n = m$). On dit qu'elle est de **taille** n .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

diagonale

Elle possède une *diagonale* formée par les coefficients $a_{i,i}$ avec i variant de 1 à n (c'est à dire ceux ayant le même indice de ligne que de colonne).

Remarque : L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels est $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, noté également (pour simplifier) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3.1.2.B Matrices diagonales

Définition 71 (Matrice diagonale). Une **matrice diagonale** A est une matrice carrée de taille n dont tous les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls, sauf ceux de la diagonale (les $a_{i,i}$ avec i variant de 1 à n). Elle prend la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

III $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est diagonale $\iff \forall i \neq j, a_{i,j} = 0$

3.1.2.C Matrices identités

Définition 72 (Matrice identité). La **matrice identité de taille** n est une matrice carrée diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. On la note :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice identité $\iff a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

3.1.2.D Matrices triangulaires

Définition 73 (Matrices triangulaires supérieures). On appelle **matrice triangulaire supérieure** une matrice carrée A dont tous les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i > j$ (donc en dessous de la diagonale) sont nuls, soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{III}}$ $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure $\iff a_{i,j} = 0$ si $i > j$

T.77

Définition 74 (Matrices triangulaires inférieures). On appelle **matrice triangulaire inférieure** une matrice carrée A dont tous les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i < j$ (donc au dessus de la diagonale) sont nuls, soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{III}}$ $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire inférieure $\iff a_{i,j} = 0$ si $i < j$

▲ Remarque : Une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

T.78

3.1.2.E Vecteurs

Définitions 75 (Vecteur ligne et vecteur colonne). On appelle :

- **vecteur ligne** : une matrice possédant une seule ligne ($n = 1$) et plusieurs (m) colonnes, soit :

$$A = (a_{1,1} \quad \dots \quad a_{1,m})$$

- **vecteur colonne** : une matrice possédant plusieurs (n) lignes et une seule colonne ($m = 1$),

$$\text{soit : } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$$

T.79

3.1.2.F Matrices symétriques

Définition 76 (Matrice carrée symétrique). Une matrice carrée A est **symétrique** si ses coefficients vérifient $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout i et j :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & \dots & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

III $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique lorsque $\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = a_{j,i}$

T.80

3.1.2.G Matrices antiymétriques

Définition 77 (Matrice carrée antisymétrique). Une matrice carrée A est **antisymétrique** si ses coefficients vérifient $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout i et j :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} & \vdots \\ -a_{1,n} & \dots & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

III $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est antisymétrique lorsque $\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = -a_{j,i}$

T.81

Exemple 78 (Des exemples des matrices).

Matrice	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Dimension	2×2	3×2	3×3
Carrée	✓	✗	✓
Diagonale	✗	✗	✓
Triang. supérieure	✓	✗	✓
Triang. inférieure	✗	✗	✓
Symétrique	✗	✗	✓

T.82

3.1.3 Opération sur les matrices

3.1.3.A Égalité de deux matrices

Théorème 79 (Égalité de matrices). Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times m$. Alors $A = B$ si et seulement si, pour tous indices i et j , $a_{i,j} = b_{i,j}$.

Exemple 80 (Égalité de matrices).

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = 2 \text{ et } c = 3 \text{ et } d = 4$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = O_2 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

T.83

3.1.3.B Transposition de matrices

Définition 81 (Transposée d'une matrice). Soit une matrice

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \text{ de taille } n \times m. \text{ La transposée de } A, \text{ notée } A^T, \text{ est la matrice de}$$

taille $m \times n$ définie par : $A^T = (a_{j,i}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}.$

▲ Remarque : La transposition transforme les colonnes d'une matrice A en lignes de A^T ; elle transforme donc un vecteur colonne en vecteur ligne (et réciproquement).

T.84

➔ EXERCICE 26. : Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Correction : $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -5 & -6 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

□

T.85

3.1.3.C Addition

Définition 82 (Addition de deux matrices). Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times m$. La somme de A et B est la matrice de taille $n \times m$:

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix}.$$

▲ Remarque : l'addition matricielle généralise l'addition vectorielle en travaillant colonne par colonne.

Exemple 83. La somme de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est : $A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

T.86

3.1.3.D Multiplication par un scalaire

Définition 84 (Multiplication (externe) d'une matrice par un scalaire). Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et λ un réel ou un complexe. Le produit externe de A par λ est la matrice B de taille $n \times m$ valant

$$B = \lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,m} \end{pmatrix}.$$

▲ Remarques :

- Ce produit est une généralisation du produit externe vectoriel
- L'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication externe ainsi définies forment un espace vectoriel.

Exemple 85. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 2$, on obtient $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

➔ EXERCICE 27. Factoriser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^4 \\ 2^5 & 2^8 \end{pmatrix} \text{ et } B = A + 4 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

➔ EXERCICE 28. Transposition : Soit A une matrice carrée de taille n . Montrer que $A + A^T$ est une matrice symétrique et que $A - A^T$ est une matrice antisymétrique. On pourra illustrer la démonstration

avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

□

3.1.3.E Produit d'une matrice et d'un vecteur

Définition 86 (Multiplication d'une matrice et d'un vecteur). Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et $U = (u_i)$ un vecteur colonne de m lignes. Le produit de A par le vecteur U , noté $(A \times U)$ ou AU , est le **vecteur colonne** $V = (v_i)$ de n lignes dont les coefficients pour tout indice de ligne i

sont : $v_i = \sum_{p=1}^m a_{i,p} u_p$. (cf. illustration donnée figure 16).

Remarques :

- Le produit n'existe que si les dimensions de A et de U concordent : il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de U
- Le produit entre une matrice et un vecteur a un **sens d'écriture** : UA n'existe pas (toujours)

Exemple 87 (Produit entre une matrice et un vecteur). Le produit entre la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (de taille 2×3) et le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (de taille 3×1) est le vecteur V de taille 2×1 dont les coefficients sont :

$$v_1 = \sum_{p=1}^3 a_{1,p} u_p = a_{1,1} u_1 + a_{1,2} u_2 + a_{1,3} u_3 = 1.1 + 2.(-1) + 3.0 = -1$$

$$v_2 = \sum_{p=1}^3 a_{2,p} u_p = a_{2,1} u_1 + a_{2,2} u_2 + a_{2,3} u_3 = 4.1 + 5.(-1) + 6.0 = -1$$

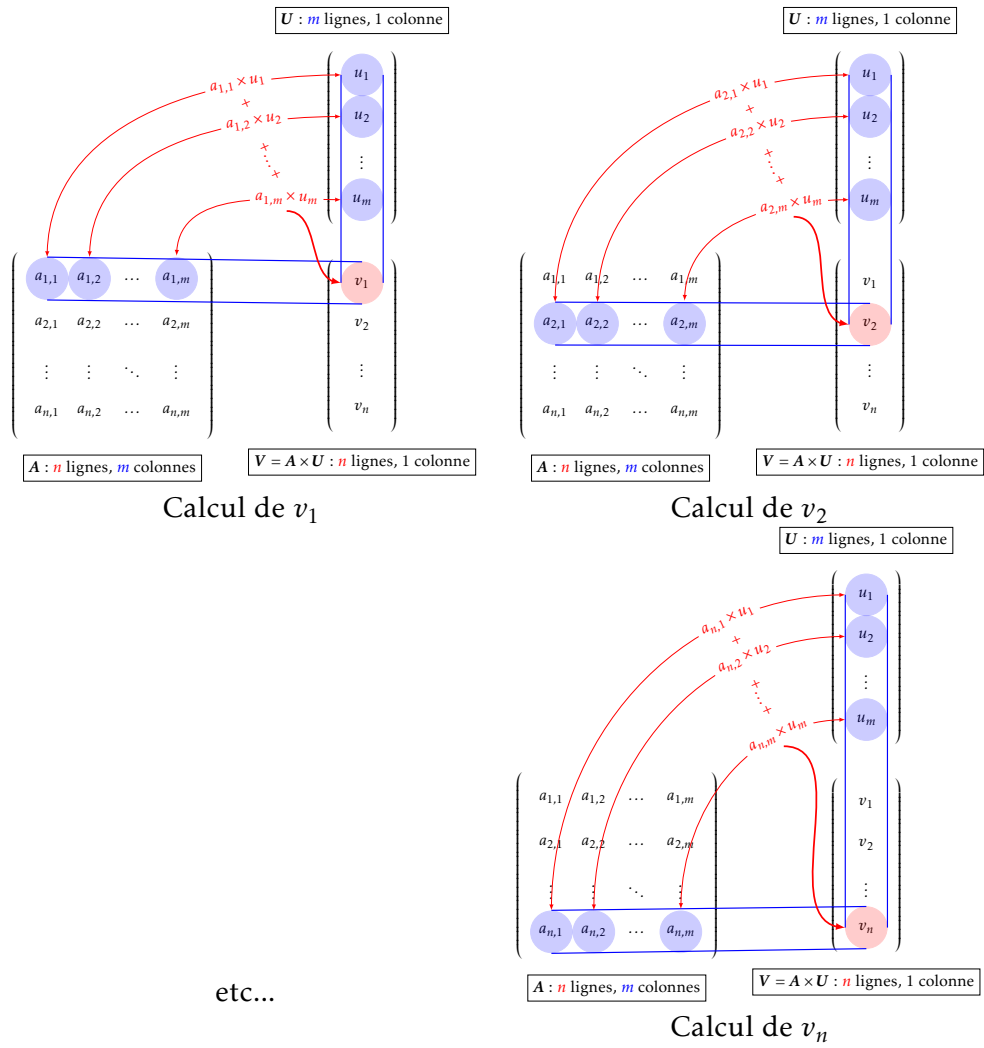


FIGURE 16 – Illustration du calcul du produit d'une matrice avec un vecteur

Donc $V = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Écriture matricielle d'une combinaison linéaire

Soient m de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ ayant chacun n coordonnées (notées $v_{i,j}$ pour le vecteur $\vec{v}_i$) et m réels

λ_j . La combinaison linéaire $\vec{v} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j$ est un vecteur dont les n coordonnées sont données par le

vecteur colonne $\mathbf{V} = \mathbf{AU}$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_m \\ \hline v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,m} \end{array} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle d'un produit scalaire

Soient 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par leurs coordonnées $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors le produit scalaire canonique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule avec : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = U^T V$ où T désigne l'opération de transposition.

▲ Remarque : Le résultat de $U^T V$ est factuellement une **matrice** ne contenant qu'un terme ; par souci de simplicité, il est vu comme un nombre réel (ici le résultat du produit scalaire).

T.93

Écriture matricielle de la norme

Soit un vecteur $\vec{v}$ défini par ses coordonnées $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors la norme de $\vec{v}$ (associée au produit scalaire canonique) se calcule avec : $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{V^T V}$ où T désigne l'opération de transposition.

T.94

3.1.3.F Produit de deux matrices

Définition 88 (Multiplication de deux matrices). Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de taille $m \times q$. Alors le produit de A et B , noté $A \times B$ ou AB , est la matrice $C = (c_{i,k})$ de n lignes et q colonnes telle que pour tout indice de ligne i et tout indice de colonne k : $c_{i,k} = \sum_{j=1}^m a_{i,j} b_{j,k}$. (cf illustration de la figure 17).

T.95

T.96

Exemple 89 (Produit de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$). Les coefficients du produit se calculent comme suit (cf. figure 18 pour une illustration graphique).

- $c_{1,1} = 1 \times 1 + 2 \times 4 + 3 \times 7 = 30$
- $c_{1,2} = 1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 = 36$
- $c_{1,3} = 1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 9 = 42$
- $c_{2,1} = (-1) \times 1 + 0 \times 4 + 1 \times 7 = 6$
- $c_{2,2} = (-1) \times 2 + 0 \times 5 + 1 \times 8 = 6$
- $c_{2,3} = (-1) \times 3 + 0 \times 6 + 1 \times 9 = 6$
- $c_{3,1} = 4 \times 1 + 5 \times 4 + 6 \times 7 = 66$
- $c_{3,2} = 4 \times 2 + 5 \times 5 + 6 \times 8 = 81$
- $c_{3,3} = 4 \times 3 + 5 \times 6 + 6 \times 9 = 96$

T.97

➔ EXERCICE 29. Produit matriciel :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer les produits AB , BA , AC , CA , BC et CB , lorsqu'ils ont un sens. □

Correction :

- $AB = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :
 - Coeff ligne 1, colonne 1 : $(-1) \times (-1) + 3 \times 3 = 10$
 - Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-3) \times (-1) + 0 \times 3 = 3$
- $AC = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -6 \\ -9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :

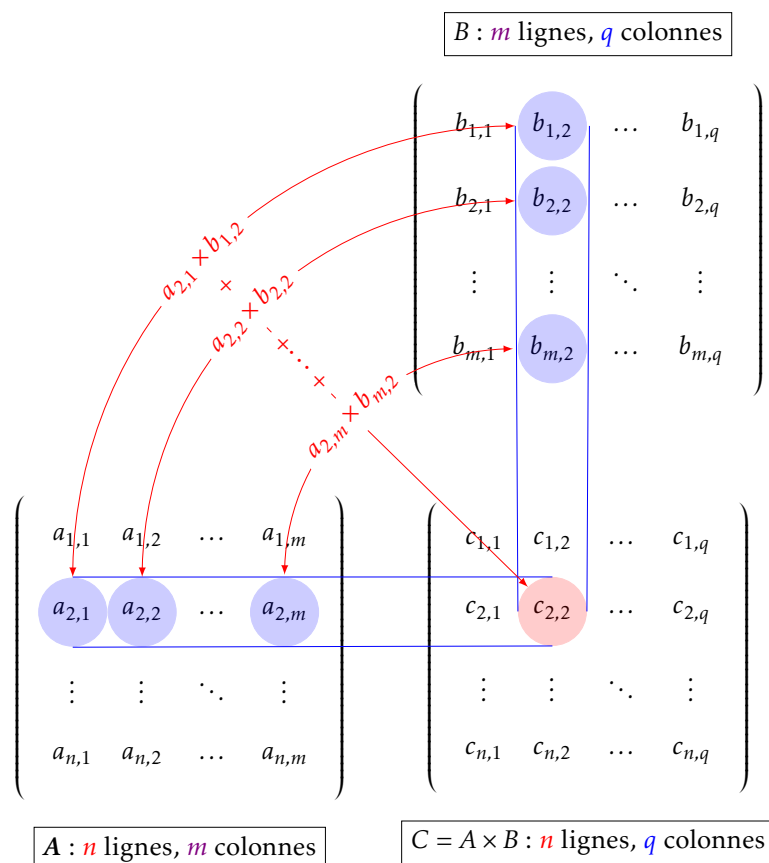


FIGURE 17 – Méthode de calcul d'un produit de matrices.

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $(-1) \times 3 + 3 \times 0 = -3$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $(-1) \times (-1) + 3 \times 0 = 1$
- Coeff ligne 1, colonne 3 : $(-1) \times 0 + 3 \times (-2) = -6$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-3) \times 3 + 0 \times 0 = -9$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $(-3) \times (-1) + 0 \times 0 = 3$
- Coeff ligne 2, colonne 3 : $(-3) \times 0 + 0 \times (-2) = 0$
- **BA** impossible car le nombre de colonnes de **B** (valant 1) est différent du nombre de lignes de **A** (valant 2)
- **BC** impossible car le nombre de colonnes de **B** (valant 1) est différent du nombre de lignes de **C** (valant 3)
- **CA** impossible car le nombre de colonnes de **C** (valant 3) est différent du nombre de lignes de **A** (valant 2)
- **CB** impossible car le nombre de colonnes de **C** (valant 3) est différent du nombre de lignes de **B** (valant 1)

➔ EXERCICE 30. Commutativité :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer, après avoir justifié leur existence les matrices

AB et BA . Qu'en déduisez-vous ?

Correction :

1. **A** et **B** sont deux matrices carrées de même taille, donc les produits **AB** et **BA** existent.

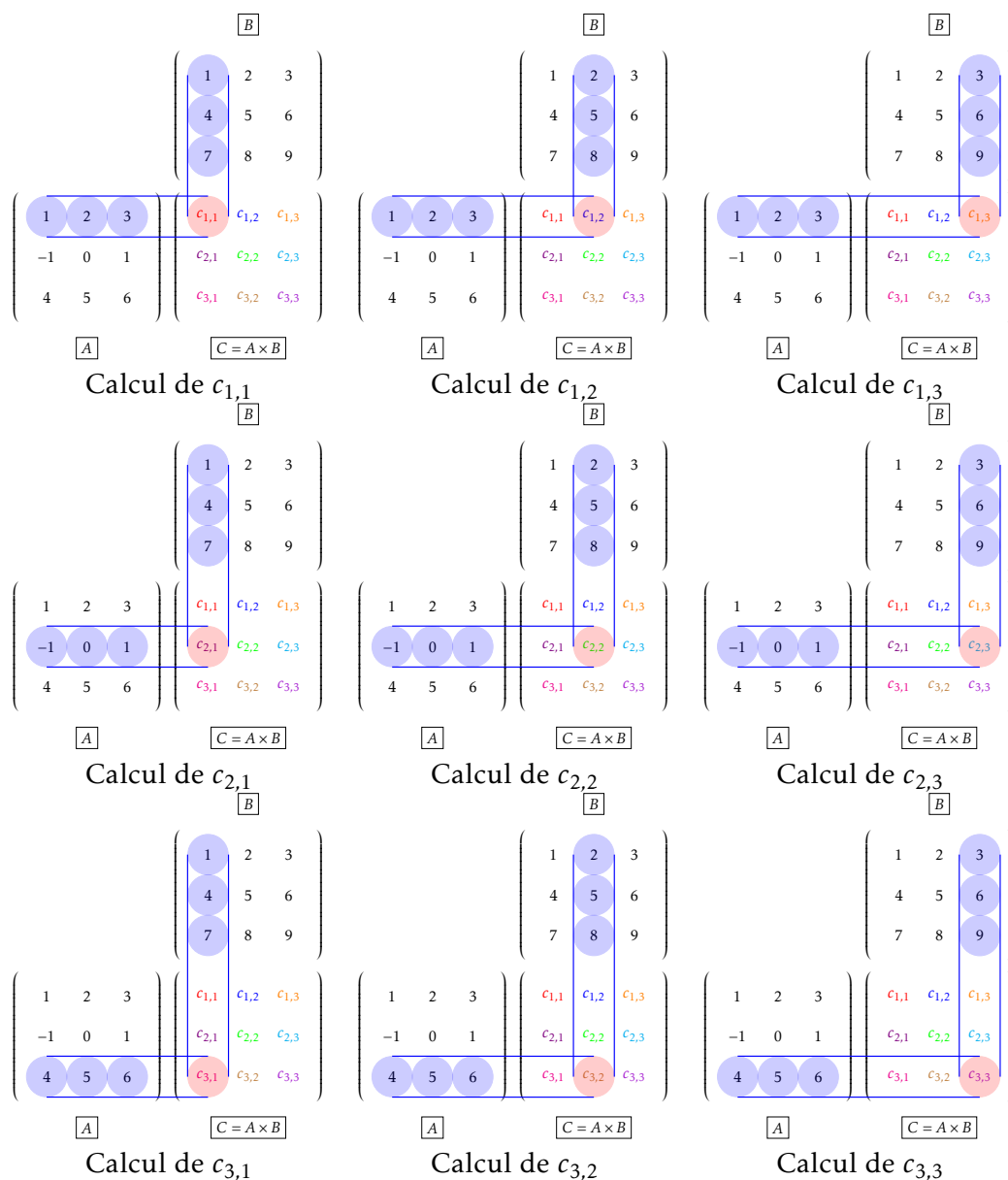


FIGURE 18 – Le produit matriciel à travers un exemple

2. $AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ -4 & -15 & 11 \\ 0 & -5 & 13 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $2 \times 1 + 2 \times (-1) + 0 \times 0 = 0$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $2 \times 2 + 2 \times (-3) + 0 \times (-2) = -2$
- Coeff ligne 1, colonne 3 : $2 \times 2 + 2 \times 1 + 0 \times 5 = 6$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times 1 + 3 \times (-1) + 2 \times 0 = -4$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 2 + 3 \times (-3) + 2 \times (-2) = -15$
- Coeff ligne 2, colonne 3 : $(-1) \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 5 = 11$
- Coeff ligne 3, colonne 1 : $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 2 \times 0 = 0$
- Coeff ligne 3, colonne 2 : $1 \times 2 + 1 \times (-3) + 2 \times (-2) = -5$
- Coeff ligne 3, colonne 3 : $1 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 5 = 13$

3. $BA = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 2 & -10 & -4 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $1 \times 2 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = 2$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 1 = 10$
- Coeff ligne 1, colonne 3 : $1 \times 0 + 2 \times 2 + 2 \times 2 = 8$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times 2 + (-3) \times (-1) + 1 \times 1 = 2$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 2 + (-3) \times 3 + 1 \times 1 = -10$
- Coeff ligne 2, colonne 3 : $(-1) \times 0 + (-3) \times 2 + 1 \times 2 = -4$
- Coeff ligne 3, colonne 1 : $0 \times 2 + (-2) \times (-1) + 5 \times 1 = 7$
- Coeff ligne 3, colonne 2 : $0 \times 2 + (-2) \times 3 + 5 \times 1 = -1$
- Coeff ligne 3, colonne 3 : $0 \times 0 + (-2) \times 2 + 5 \times 2 = 6$

4. Donc $AB \neq BA$.

5. On en déduit que le produit de deux matrices carrées quelconques n'est pas commutatif.

□

➔ EXERCICE 31. *Produit matriciel :*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- ① Calculer, lorsque cela est possible, les produits suivants : AB , BA , AC , CA , BC , CB .
- ② Calculer, après avoir justifié leur existence, les matrices suivantes : $A + 2CB$, $A(CB)$, $(AC)B$, $C(BA^2)$.

Correction :

① Calcul des produits :

- AB impossible car le nombre de colonnes de A (valant 3) est différent du nombre de lignes de B (valant 3)

- $AC = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & -10 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $1 \times (-2) + 0 \times 3 + 3 \times 1 = 1$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $1 \times 3 + 0 \times 1 + 3 \times 2 = 9$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times (-2) + (-3) \times 3 + (-2) \times 1 = -9$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 3 + (-3) \times 1 + (-2) \times 2 = -10$
- Coeff ligne 3, colonne 1 : $0 \times (-2) + 1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$
- Coeff ligne 3, colonne 2 : $0 \times 3 + 1 \times 1 + 2 \times 2 = 5$

- $BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $0 \times 1 + (-2) \times (-1) + 1 \times 0 = 2$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $0 \times 0 + (-2) \times (-3) + 1 \times 1 = 7$
- Coeff ligne 1, colonne 3 : $0 \times 3 + (-2) \times (-2) + 1 \times 2 = 6$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times 1 + 0 \times (-1) + 1 \times 0 = -1$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 0 + 0 \times (-3) + 1 \times 1 = 1$
- Coeff ligne 2, colonne 3 : $(-1) \times 3 + 0 \times (-2) + 1 \times 2 = -1$

- $BC = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $0 \times (-2) + (-2) \times 3 + 1 \times 1 = -5$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $0 \times 3 + (-2) \times 1 + 1 \times 2 = 0$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times (-2) + 0 \times 3 + 1 \times 1 = 3$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 3 + 0 \times 1 + 1 \times 2 = -1$

- CA impossible car le nombre de colonnes de C (valant 2) est différent du nombre de lignes de A (valant 3)

- $CB = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & -6 & 4 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ avec pour détail du calcul des coefficients :

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $(-2) \times 0 + 3 \times (-1) = -3$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $(-2) \times (-2) + 3 \times 0 = 4$
- Coeff ligne 1, colonne 3 : $(-2) \times 1 + 3 \times 1 = 1$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $3 \times 0 + 1 \times (-1) = -1$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $3 \times (-2) + 1 \times 0 = -6$
- Coeff ligne 2, colonne 3 : $3 \times 1 + 1 \times 1 = 4$
- Coeff ligne 3, colonne 1 : $1 \times 0 + 2 \times (-1) = -2$
- Coeff ligne 3, colonne 2 : $1 \times (-2) + 2 \times 0 = -2$
- Coeff ligne 3, colonne 3 : $1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$

② Calcul des expressions :

- $A + 2CB = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 5 \\ -3 & -15 & 6 \\ -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$: ce résultat est obtenu en réutilisant le calcul de CB

- $A(CB) = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 10 \\ 10 & 18 & -19 \\ -5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$: ce résultat est obtenu en réutilisant le calcul de $D = CB$ puis en faisant le calcul AD

- $(AC)B = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 10 \\ 10 & 18 & -19 \\ -5 & -10 & 10 \end{pmatrix}$: ce résultat est obtenu sans calcul car la multiplication est associative donc $(AC)B = ACB = A(CB)$ calculé à la question précédente

- $C(BA^2) = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -29 \\ -17 & -49 & 5 \\ -9 & -23 & -10 \end{pmatrix}$: ce résultat est obtenu en utilisant l'associativité de la multiplication

$C(BA^2) = (CB)A^2$. Comme $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ il reste à réutiliser le produit CB et à calculer

le dernier produit matriciel $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & -6 & 4 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 7 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

□

T.99

➔ EXERCICE 32. Matrice (DS UFA 2011) : Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$ deux matrices définies par les paramètres réels a, b, c et d . Les trois questions suivantes sont indépendantes.

- ① Calculer AB puis BA . Donner toutes les valeur(s) de a, b, c et d pour lesquelles on a $AB = BA$?
- ② Calculer $(A+B)^2$, puis $A^2 + 2AB + B^2$. Qu'en concluez-vous? Pouvait-on s'attendre à ce résultat?

Correction :

- Par calcul du produit matriciel, on a $AB = \begin{pmatrix} ac+bd & bc \\ ad & ac \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} ac & bc \\ ad & ac+bd \end{pmatrix}$. Donc :

$$AB = BA \iff \begin{cases} ac+bd = ac \\ bc = bc \\ ad = ad \\ ac = ac+bd \end{cases} \quad (\text{égalité des 4 coefficients des 2 matrices})$$

$$\iff ac+bd = ac$$

(suppression des équations inutiles (car toujours vraies ou redondantes))

$$\iff bd = 0 \quad (\text{simplification})$$

$$\iff b = 0 \text{ ou } d = 0 \text{ (et } a, c \text{ quelconque)}$$

- En détaillant les étapes des calculs, on a successivement :

$$\text{— } A+B = \begin{pmatrix} a+c & b \\ d & a+c \end{pmatrix}$$

$$\text{— puis } (A+B)^2 = (A+B) \times (A+B) = \begin{pmatrix} (a+c)^2 + bd & 2b(a+c) \\ 2d(a+c) & (a+c)^2 + bd \end{pmatrix} \text{ (en réorganisant les produits des coefficients } a, b, c \text{ et } d \text{ par commutativité de la multiplication chez les nombres réels)}$$

$$\text{— } A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{— } B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 2cd & c^2 \end{pmatrix}$$

— puis $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 2ac + 2bd + c^2 & 2ab + 2bc \\ 2ad + 2cd & a^2 + 2ac + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+c)^2 + 2bd & 2b(a+c) \\ 2d(a+c) & (a+c)^2 \end{pmatrix}$ (en factorisant les coefficients notamment avec l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ valable chez les nombres réels).

Les deux matrices $(A+B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$ diffèrent notamment par leur coeff d'indice 2,2. Donc elles ne sont pas égales. Ce résultat est lié au fait que la multiplication n'est pas commutative pour les matrices : on ne peut qu'écrire $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

□

3.1.3.G Puissances de matrices

Définition 90 (Puissance entière de matrice carrée de taille n). Soit A une matrice carrée de taille n . On définit :

- A à la puissance 0 par : $A^0 = I_n$, où I_n est la matrice identité ;
- A à la puissance 1 par : $A^1 = A$;
- A à la puissance k avec k un entier naturel non nul, par

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}.$$

T.101

➔ EXERCICE 33. *Puissance d'une matrice* : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3, A^4 puis A^n pour

n entier quelconque.

Correction : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \mathbf{0}_4$ et à partir de $n \geq 4 : A^n = \mathbf{0}_4$. □

T.102

➔ EXERCICE 34. *Matrices diagonales* : Soient D_n et Δ_n les matrices $n \times n$ définies par : $D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$.

- ① Ces matrices sont-elles : carrée ? triangulaire supérieure ? triangulaire inférieure ? diagonale ? symétrique ?
- ② Calculer, après avoir justifié leur existence et pour deux entiers n et k quelconques, les matrices :

① D_2^2, D_2^3, D_2^k

② D_3^2, D_3^3, D_3^k

③ D_n^2, D_n^3, D_n^k

- ③ Calculer, après avoir justifié leur existence, les matrices :

① $D_2 \Delta_2, \Delta_2 D_2$

② $D_3 \Delta_3, \Delta_3 D_3$

③ $D_n \Delta_n, \Delta_n D_n$

Qu'en déduisez-vous ?

Correction :

1. Cette matrice est carrée, triangulaire supérieure, triangulaire inférieure, diagonale, symétrique mais pas antisymétrique (sauf si $d_1 = \cdots = d_n = 0$).

2. $D_n^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n^k \end{pmatrix}$ (la démonstration pouvant être faite par récurrence).

3. $D_n \Delta_n = \Delta_n D_n = \begin{pmatrix} d_1 \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \delta_n \end{pmatrix}$

4. On en déduit que le produit de deux matrices diagonales est commutatif.

□

T.103

3.1.3.H Matrice inverse

Définition 91 (Matrice inverse). Soit A une matrice carrée de taille n . On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice appelée **inverse** et notée A^{-1} (carrée de taille n) telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Théorème 92 (Unicité de l'inverse). *L'inverse d'une matrice est unique.*

T.104

➔ EXERCICE 35. Inverse d'une matrice 2×2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 dont les coefficients a, b, c, d sont réels et tels que $ad - bc \neq 0$.

Démontrer que la matrice inverse de A est $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Correction : Indication : calculer AA^{-1} et montrer que le résultat vaut I_2 .

□

➔ EXERCICE 36. : $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'inverse de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$?

□

Correction : En notant A la première matrice et B la seconde, on calcule $AB = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3}$ car (en détaillant le calcul des coefficients) :

- Coeff ligne 1, colonne 1 : $(-3) \times 0 + 5 \times (-1) + 6 \times 1 = 1$
- Coeff ligne 1, colonne 2 : $(-3) \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times (-2) = 0$
- Coeff ligne 1, colonne 3 : $(-3) \times 2 + 5 \times 0 + 6 \times 1 = 0$
- Coeff ligne 2, colonne 1 : $(-1) \times 0 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = 0$
- Coeff ligne 2, colonne 2 : $(-1) \times 1 + 2 \times 3 + 2 \times (-2) = 1$
- Coeff ligne 2, colonne 3 : $(-1) \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 1 = 0$
- Coeff ligne 3, colonne 1 : $1 \times 0 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 = 0$
- Coeff ligne 3, colonne 2 : $1 \times 1 + (-1) \times 3 + (-1) \times (-2) = 0$
- Coeff ligne 3, colonne 3 : $1 \times 2 + (-1) \times 0 + (-1) \times 1 = 1$

Donc comme $AB = I_3$, B est l'inverse de A (et réciproquement, A est l'inverse de B).

➔ EXERCICE 37. Inverse d'une matrice diagonale : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont non nuls. Montrer que $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{1,1}}, \frac{1}{a_{2,2}}, \dots, \frac{1}{a_{n,n}}\right)$.

□

T.105

➔ EXERCICE 38. Inverser une matrice sans (trop) de calcul :

- ① Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
- ② Soit A une matrice telle que $A^3 - A = 4I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .
- ③ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 + A = 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .

Correction : ① En retravaillant l'équation matricielle,

$$\begin{aligned} A^2 = 2I_2 - A &\iff \frac{1}{2}(A^2 + A) = I_2 \\ &\iff A \cdot \left[\frac{1}{2}(A + I_2) \right] = I_2 \end{aligned} \quad (\text{en factorisant par } A)$$

Donc il existe bien une matrice B telle que $AB = I_2$ avec ici $B = \frac{1}{2}(A + I_2)$.

Cela veut dire que A est inversible et que son inverse est $B = \frac{1}{2}(A + I_2)$.

□

T.106

3.1.4 Propriétés des opérations sur les matrices

3.1.4.A Propriétés de la multiplication matricielle

Théorème 93 (Associativité de la multiplication matricielle). Soient A, B, C trois matrices. Alors $A(BC) = (AB)C$.

La multiplication matricielle n'est pas commutative

AB n'est quasiment jamais égal à BA . Plus précisément :

- Si $A \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p \times q}(\mathbb{R})$, alors AB existe et appartient à $\mathcal{M}_{n \times q}(\mathbb{R})$, mais BA n'existe pas (sauf si $n = q$)!!!
- Si $n = q$, $AB \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathcal{M}_{q \times n}(\mathbb{R})$ mais les matrices sont de tailles différentes si $n \neq p$!!!
- Enfin, même si $n = p = q$, le produit ne commute pas forcément!

T.107

3.1.4.B Propriétés de l'addition et de la multiplication externe

Soient A, B deux matrices de taille $n \times m$, C et D deux matrices de taille $m \times q$ et λ, μ deux nombres réels.

Théorème 94 (Propriétés de l'addition et de la multiplication externe).

1. Commutativité de l'addition et de la multiplication externe :

- ① $A + B = B + A$
- ② $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$

2. Associativité de l'addition et de la multiplication externe :

- ① $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- ② $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A$ (où $\times$ désigne la multiplication de deux nombres réels)
- ③ $\lambda \cdot (AB) = (\lambda \cdot A)B = A(\lambda \cdot B)$

3. Distributivité de la multiplication sur l'addition :

- ① $A(C + D) = AC + AD$
- ② $(A + B)C = AC + BC$
- ③ $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
- ④ $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

➔ EXERCICE 39. *Commutant* : Soient a et b des réels non nuls et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Correction : On pose $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Alors :

$$AB = BA \iff \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ a\gamma & a\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & b\alpha + a\beta \\ a\gamma & b\gamma + a\delta \end{pmatrix} \quad (\text{On calcule les produits matriciels})$$

$$\iff \begin{cases} a\alpha + b\gamma = a\alpha & (L_1) \\ a\beta + b\delta = b\alpha + a\beta & (L_2) \\ a\gamma = a\gamma & (L_3) \\ a\delta = b\gamma + a\delta & (L_4) \end{cases} \quad (\text{On égale les matrices})$$

$$\iff \begin{cases} b\gamma = 0 & (L_1) \\ b\gamma = b\alpha & (L_2) \end{cases} \quad (\text{On simplifie et on élimine les lignes inutiles})$$

$$\iff \alpha = \gamma = 0 \quad (\text{car } b \text{ n'est pas nul})$$

□

➔ EXERCICE 40. *Propriétés des opérations sur les matrices* : Montrer que :

- ① l'addition de matrices est une opération associative et commutative,
- ② la multiplication de matrices est une opération associative mais pas toujours commutative,
- ③ la multiplication est distributive sur l'addition,
- ④ pour toute matrice A de taille $n \times p$, $AI_p = I_n A = A$.

□

T.109

3.1.4.C Propriétés de la transposition

Théorème 95 (Propriétés de la transposée). Soient A et B deux matrices de taille $n \times m$ et C une matrice de taille $m \times p$. Alors :

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(AC)^T = C^T A^T$

➔ EXERCICE 41. *Démonstration autour de la transposition* :

Soient A et B deux matrices. Soit λ un nombre réel. Montrer que :

$$\textcircled{1} (\lambda A)^T = \lambda A^T$$

$$\textcircled{2} (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$\textcircled{3} (AB)^T = B^T A^T$$

□

T.110

3.1.4.D Propriétés des matrices identités et des matrices nulles

Soient A une matrice de taille $n \times m$, et q un nombre entier.

Théorème 96 (Propriétés des matrices identités).

- I est l'élément neutre de la multiplication : $I_n A = A$ et $A I_m = A$

- pour tout entier k , $(I_n)^k = I_n$

Théorème 97 (Propriétés des matrices nulles).

- $\mathbf{0}$ est l'élément neutre de l'addition : $\mathbf{0}_{n \times m} + A = A + \mathbf{0}_{n \times m} = A$
- $\mathbf{0}_{q \times n}A = \mathbf{0}_{q \times m}$ et $A\mathbf{0}_{m \times q} = \mathbf{0}_{n \times q}$
- pour tout entier $k > 0$, $(\mathbf{0}_n)^k = \mathbf{0}_n$.

3.1.4.E Propriétés de l'inversion matricielle

Théorème 98 (Propriété). Soient A et B deux matrices carrées inversibles de même taille. Alors

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

T.112

▲ Remarque : Attention $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$

➔ **EXERCICE 42. Annulateur :** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et AC . Que constate-t-on? La matrice A peut-elle être inversible? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = O_3$.

Correction : On pose $F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors :

$$AF = O_3 \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{On calcule le produit matriciel})$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d+g = 0 \\ e+h = 0 \\ f+i = 0 \end{cases} \quad (\text{On égale les matrices et on simplifie})$$

$$\iff F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} \text{ avec } d, e, f \text{ quelconques}$$

□

T.113

3.2 Déterminant d'une matrice

3.2.1 Définition du déterminant

Définition 99 (Notation). Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille n à coefficients réels. Le **déterminant de A** est un nombre réel **unique**, noté :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

T.114

▲ Remarque : Dire que $\det(A) = \det(B)$ ne signifie pas forcément que $A = B$.

3.2.2 Calcul de déterminant d'une matrice d'ordre inférieur à 3

3.2.2.A Déterminant d'une matrice d'ordre 1

Théorème 100 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1). Soit $A = (a)$ une matrice carrée d'ordre 1. Alors :

$$\det(A) = |a| = a$$

Exemple 101 (Déterminant). Soit $A = (2)$. Alors $\det(A) = 2$.

T.115

3.2.2.B Déterminant d'une matrice d'ordre 2

Théorème 102 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2). Le déterminant d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 est le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Exemple 103 (Une matrice carrée d'ordre 2). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$.

Aide mnémotechnique ? $\begin{vmatrix} \overset{a}{\color{red}} & \overset{b}{\color{blue}} \\ \underset{c}{\color{blue}} & \underset{d}{\color{red}} \end{vmatrix} = \color{red}{ad} - \color{blue}{cb}$

T.116

➔ EXERCICE 43. *Déterminants* : Calculer les déterminants suivants :

$$\textcircled{1} \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \textcircled{2} \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \textcircled{3} \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \textcircled{4} \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Correction :

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times \sqrt{2} = 2 - 3\sqrt{2}$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 0 \times \sqrt{2} = -1$
- $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 3 \times 0 = 1$

□

T.117

3.2.2.C Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Théorème 104 (Règle de Sarrus). Le déterminant d'une matrice carrée $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ d'ordre 3 est le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

$$\begin{array}{c}
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \\
 \text{d} \quad \text{e} \quad \text{f} \\
 \text{g} \quad \text{h} \quad \text{i} \\
 \text{a} \quad \text{b} \quad \text{c} \\
 \text{d} \quad \text{e} \quad \text{f}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\
 \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\
 \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\
 \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow \\
 \nearrow \quad \nearrow \quad \nearrow
 \end{array}
 = aei + dhc + gbf - (gec + ahf + dbi)$$

T.118

➔ EXERCICE 44. *Déterminants* : Calculer les déterminants suivants, en utilisant la méthode la plus judicieuse :

$$\textcircled{1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \textcircled{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \textcircled{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \textcircled{4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Correction :

Correction avec la méthode de Sarrhus :

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) + 0 \times 0 \times 1 + 0 \times 1 \times (-1) - 0 \times 2 \times 1 - 1 \times 0 \times (-1) - 0 \times 1 \times (-1) = -2$
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) + (-1) \times 0 \times 1 + 2 \times 0 \times (-1) - 2 \times 2 \times 1 - 1 \times 0 \times (-1) - (-1) \times 0 \times (-1) = -6$
- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) + 1 \times 0 \times 1 + 0 \times 1 \times (-1) - 0 \times 2 \times 1 - 1 \times 0 \times (-1) - 1 \times 1 \times (-1) = -1$
- $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times (-1) + 3 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times (-1) - 2 \times 2 \times 1 - 1 \times 1 \times (-1) - 3 \times 1 \times (-1) = -1$

Correction avec la méthode du développement suivant une ligne ou une colonne :

- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ donc développement suivant la ligne d'indice 3 car contenant 2 valeurs à 0.
 $\Delta_1 = (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (+1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ avec un calcul intermédiaire à faire :
 $\quad \quad \quad - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 0 \times 1 = 2$

En réinjectant la valeur du calcul intermédiaire dans le calcul de Δ_1 , on obtient : $\Delta_1 = (+1) \times (-1) \times 2 = -2$

- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ donc développement suivant la colonne d'indice 2 car contenant 2 valeurs à 0.
 $\Delta_2 = (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (+1) \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$ avec un calcul intermédiaire à faire :
 $\quad \quad \quad - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 1 = -3$

Donc en réinjectant la valeur obtenue dans le calcul de Δ_2 , on obtient : $\Delta_2 = (+1) \times 2 \times (-3) = -6$

- $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ donc développement suivant la ligne d'indice 3 car contenant 2 valeurs à 0.
 $\Delta_3 = (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (+1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ avec un calcul intermédiaire à faire :
 $\quad \quad \quad - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1$

Donc en réinjectant la valeur obtenue dans le calcul de Δ_3 , on obtient : $\Delta_3 = (+1) \times (-1) \times 1 = -1$

• $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ donc puisqu'aucune ligne ou colonne particulière (contenant des 0) ne se dégage, on choisit arbitrairement de développer suivant la ligne d'indice 1.

$\Delta_4 = (+1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (+1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ avec les calculs intermédiaires à faire :

$$- \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1$$

$$- \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 2 \times (-1) = -1$$

$$- \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times 2 = -1$$

Donc en réinjectant les valeurs des calculs intermédiaires dans le calcul de Δ_4 , on obtient : $\Delta_4 = (+1) \times 1 \times (-1) + (-1) \times 1 \times (-1) + (+1) \times 1 \times (-1) = -1$

□

T.119

3.2.3 Déterminant dans le cas général

3.2.3.A Cofacteur

Définition 105 (Cofacteur). Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée. Le **cofacteur associé au coefficient** $a_{i,j}$, noté $\text{cof}_{i,j}$, est le déterminant de la matrice $A_{i,j}$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A , multiplié par $(-1)^{i+j}$:

$$\text{cof}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$$

T.120

3.2.3.B Développement suivant une colonne ou une ligne

Théorème 106 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n avec développement suivant une colonne).

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels. Soit j l'indice d'une colonne de

A . Le déterminant de A se calcule en **développant par rapport à la colonne j** avec :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \operatorname{cof}_{i,j}$$

T.121

Théorème 107 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n avec développement suivant une ligne).

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels. Soit i l'indice d'une ligne de A . Le déter-

minant de A se calcule en **développant par rapport à la ligne i** avec :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \operatorname{cof}_{i,j}$$

T.122

Exemple 108 (Déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$). Pour l'exemple, on choisit de développer suivant la 1ère ligne. Alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,1})} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,2})} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,3})}$$

$$= +1 \times (5 \times 9 - 8 \times 6) - 2 \times (4 \times 9 - 7 \times 6) + 3 \times (4 \times 8 - 7 \times 5) = 0$$

T.123

➔ **EXERCICE 45.** Calculez le déterminant : $d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & \pi & e & \frac{3}{17} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

□

➔ EXERCICE 46. Calculer les déterminants suivants :

$$1 \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3 \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2 \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4 \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Correction : $\Delta_1 = 6, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = -4, \Delta_4 = -41$.

1 $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ donc développement suivant la ligne d'indice 2 car contenant 3 valeurs à 0.

$$\Delta_1 = (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots$$

$$+ (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

avec pour calcul intermédiaire à faire $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en le développant suivant la ligne d'indice 3 (qui contient 1 zéro).

$$\text{Or : } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-4} + (+1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_1 + (-1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_1 = 3 \text{ car :}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \times 1 - 1 \times 2 = -4$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 2 = 1$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times (-2) = 1$$

Donc en réinjectant les valeurs obtenues dans le calcul de Δ_1 , on obtient : $\Delta_1 = 6$.

.....
2 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ donc développement suivant la ligne d'indice 2 car contenant 3 valeurs à 0.

$$\Delta_2 = (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots$$

$$+ (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Reste donc à calculer $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en le développant suivant la ligne d'indice 2 (contenant 2 zéros).

$$\text{Comme } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \times 1 - 1 \times 2) = 1$$

on obtient, en réinjectant toutes les valeurs intermédiaires dans le calcul de Δ_2 : $\Delta_2 = -1$.

.....

3 $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ donc développement suivant la colonne d'indice 1 car contenant 3 valeurs à 0.

$$\Delta_3 = (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \dots$$

$$+ (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Reste donc à calculer $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en développant (choix arbitraire) suivant la colonne d'indice 1 :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \times 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

avec les calculs intermédiaires à faire :

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1$
- $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \times 1 - 1 \times 2 = -4$
- $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \times 2 - 1 \times 2 = -6$

donc $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -13$ puis, en réinjectant cette valeur dans le calcul de Δ_3 , on obtient : $\Delta_3 = -13$.

.....

4 $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ donc développement suivant la ligne d'indice 1 car contenant 0 valeurs à 0.

$$\Delta_4 = (+1) \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (+1) \times (-2) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1) \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

avec les calculs intermédiaires à faire :

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} + (-1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} + (+1) \times (-1) \times \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-2} = 3$ en développant suivant la ligne d'indice 1 (choix arbitraire) et car :

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1$$

$$- \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 - 1 \times 2 = -3$$

$$- \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 - 1 \times 1 = -2$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-1} + (-1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_{-7} + (+1) \times (-1) \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} = 8 \text{ en développant suivant la}$$

ligne d'indice 1 (choix arbitraire) et car :

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 1 \times 2 = -1$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times 2 = -7$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times 1 = -3$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} + (-1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_{-7} + (+1) \times (-1) \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_5 = 3 \text{ en développant suivant}$$

la ligne d'indice 1 (choix arbitraire) et car :

$$- \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 - 1 \times 2 = -3$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times 2 = -7$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times (-1) = 5$$

$$\bullet \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-2} + (-1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_{-3} + (+1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}_5 = 7 \text{ en développant suivant la}$$

ligne d'indice 1 (choix arbitraire) et car :

$$- \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 1 - 1 \times 1 = -2$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times 1 = -3$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 4 \times (-1) = 5$$

Donc en réinjectant les valeurs des calculs intermédiaires dans le calcul de Δ_4 , on obtient : $\Delta_4 = -41$

□

T.124

➔ EXERCICE 47. Règle de Sarrus : Démontrer la règle de Sarrus en utilisant le développement suivant une ligne ou une colonne du théorème 106.

□

T.125

3.2.3.C Déterminant des matrices diagonales et triangulaires

Théorème 109 (Déterminant d'une matrice diagonale). Soit A une matrice diagonale de taille n .

Alors :

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

Théorème 110 (Déterminant d'une matrice triangulaire). Soit $\mathbf{A} = (a_{i,j})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) de taille n . Alors son déterminant est le produit des termes diagonaux :

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

T.126

3.2.4 Propriétés des déterminants

Théorème 111 (Propriétés des déterminants).

1. *Multiplication par un scalaire* : Soient $\mathbf{A}$ une matrice carrée de taille n et λ un réel. Alors :
 $\boxed{\det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det(\mathbf{A})}$.
2. *Déterminant d'un produit de matrices* : Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices carrées de taille n . Alors :
 $\boxed{\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})}$.
3. *Déterminant d'une matrice transposée* : Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée de taille n . Alors :
 $\boxed{\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})}$.

Théorème 112 (Permutation de deux lignes ou de deux colonnes). Lorsqu'on permute deux lignes ou deux colonnes d'une matrice dont on calcule le déterminant, le déterminant est multiplié par $\boxed{-1}$.

T.127

Théorème 113 (Linéarité par rapport aux colonnes). Soient α, β deux réels. Lorsque la colonne j d'une matrice s'exprime comme la combinaison linéaire de 2 vecteurs $(a_{i,j})$ et $(a'_{i,j})$, le calcul du déterminant peut être linéarisé par rapport à la colonne j avec :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \alpha a_{1,j} + \beta a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \alpha a_{n,j} + \beta a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque : Le théorème est également vrai pour les lignes de la matrice.

T.128

Théorème 114 (Ajout d'une colonne). Dans le calcul du déterminant, ajouter une colonne C_l (éventuellement) multipliée par un coefficient β , à une (autre) colonne C_j ne change pas la valeur du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,j} + \beta a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,j} + \beta a_{n,l} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque : Le théorème est également vrai pour les lignes de la matrice.

Lemme 115. Le déterminant d'une matrice qui contient deux lignes ou deux colonnes identiques est nul.

T.129

3.2.4.A Exercices

➔ EXERCICE 48. Déterminants : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les

déterminants des matrices $A^2, A^3, AB, AB^T, 3A$ et $A - B$.

Correction :

- $\det(A) = 9$ (développement suivant la colonne d'indice 1)
- $\det(B) = -3$ (développement suivant la colonne d'indice 2)
- $\det(A^2) = [\det(A)]^2 = 9^2 = 81$
- $\det(A^3) = [\det(B)]^3 = 9^3 = 729$
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B) = 9 \times (-3) = -27$
- $\det(AB^T) = \det(A) \times \det(B^T) = \det(A) \times \det(B) = -27$
- $\det(3A) = 3^{\text{nbre lignes de } A} \times \det(A) = 3^4 \times 9 = 729$
- Attention : $\det(A - B) \neq \det(A) - \det(B)$. Il faut calculer $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis son déterminant : $\det(A - B) = 0$

□

➔ EXERCICE 49. *Déterminant d'une matrice triangulaire* : Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux. $\square$

➔ EXERCICE 50. *Déterminant d'une matrice antidiagonale* :

Calculer le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

Correction : En développant par rapport à la première colonne, on trouve que $\Delta_n = (-1)^{n+1} a_n \Delta_{n-1}$ avec

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{déterminant d'une matrice de taille } n-1).$$

En itérant la même opération n fois (au total), on trouve ainsi que :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \prod_{i=1}^n (-1)^{n+2-i} a_i &= \prod_{i=1}^n (-1)^n (-1)^i a_i \\ &= \left((-1)^n\right)^n (-1)^{\sum_{i=1}^n i} \prod_{i=1}^n a_i &= (-1)^{n^2 + \frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

D'où $\Delta_n = \begin{cases} \prod_{i=1}^n a_i & \text{si } n = 4p \text{ ou } n = 4p + 1 \\ -\prod_{i=1}^n a_i & \text{si } n = 4p + 2 \text{ ou } n = 4p + 3 \end{cases}$

$\square$

➔ EXERCICE 51. *Calcul* : Soient a, b, c, d quatre réels. Calculer le déterminant des matrices suivantes en fonction de a, b, c et d :

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix} \quad \textcircled{2} B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{pmatrix}$$

Correction :

1. On utilise le fait que faire une combinaison linéaire des colonnes ne change pas la valeur du

déterminant; donc :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \\ b-a & 0 & 0 & a-b \\ 0 & a-b & b-a & 0 \end{vmatrix} & \left(\begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \right) \\
 &= (a-b) \begin{vmatrix} 1 & a & b-a \\ b & 1 & 0 \\ 1 & b & a-b \end{vmatrix} - (b-a) \begin{vmatrix} 1 & a & b-a \\ a & 1 & 0 \\ 1 & b & a-b \end{vmatrix} \\
 &\quad \text{(en développant suivant la dernière colonne)} \\
 &= (a-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ b & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} - (b-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & b & -1 \end{vmatrix} \\
 &\quad \text{(en factorisant par } (b-a) \text{ les 2 déterminants } 3 \times 3) \\
 &= (a-b)^2 \left[- \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{vmatrix} \right] - (b-a)^2 \left[\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} \right] \\
 &\quad \text{(en factorisant suivant la dernière colonne des deux déterminants)}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (a-b)^2 [-b^2 + 1 + 1 - ab] - (a-b)^2 [ab - 1 - 1 + a^2] \\
 &= (a-b)^2 [2 - ab - b^2 - ab + 2 - a^2] \\
 &= (a-b)^2 [4 - 2ab - a^2 - b^2] \\
 &= (a-b)^2 [4 - (a+b)^2] \\
 &= (a-b)^2 [2 - a - b][2 + a + b]
 \end{aligned}$$

2. Sous réserve que a soit non nul,

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & ab \\ c-a & c & b & cb \\ 0 & a & d & ad \\ c-a & c & d & cd \end{vmatrix} & (L_1 \leftarrow L_2 - aL_1) \\
 &= -(c-a) \begin{vmatrix} a & b & ab \\ a & d & ad \\ c & d & cd \end{vmatrix} - (c-a) \begin{vmatrix} a & b & ab \\ c & b & cb \\ a & d & ad \end{vmatrix} \\
 &\quad \text{(en développant suivant la première colonne)}
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= -(c-a) [acd^2 + a^2bd + abcd - abcd - a^2d^2 - abcd] \\
 &= -(c-a) [a^2bd + abcd + ab^2c - a^2b^2 - acbd - abcd] \\
 &= (a-c) [acd^2 + acb^2 + 2a^2bd - a^2d^2 - a^2b^2 - 2abcd] \\
 &= (a-c) [ac(d^2 + b^2) - 2ac(bd) - a^2(b^2 + d^2) + 2a^2(bd)] \\
 &= (a-c) [ac(b-d)^2 - a^2(b-d)^2] & \text{(en jouant sur les identités remarquables)} \\
 &= a(a-c)(b-d)^2 [c-a] = -a(c-a)^2 (b-d)^2
 \end{aligned}$$

□

3.2.5 Application : Calcul d'une matrice inverse par la méthode des cofacteurs

Théorème 116 (Condition d'existence de l'inverse). Soit A une matrice carrée. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Théorème 117 (Propriété). Soit A une matrice carrée inversible. Alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

T.132

Définition 118 (Matrice des cofacteurs ou comatrice). Soit A une matrice. La **matrice des cofacteurs** ou **comatrice** associée à A est la matrice notée $\text{com}(A)$ définie par :

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1} & \cdots & \text{cof}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cof}_{n,1} & \cdots & \text{cof}_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $\text{cof}_{i,j}$ sont les cofacteurs associés à A (on rappelle que $\text{cof}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$) où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A .

Théorème 119 (Comatrice et inversion matricielle). Soit A une matrice carrée et $\text{com}(A)$ sa comatrice.

Alors
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{com}(A))^T.$$

T.133

Exemple 120 (Inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par les comatrices). La comatrice de A est $B = (b_{i,j})$ avec :

- $b_{1,1} = \text{cof}_{1,1} = (-1)^{1+1} \det(A_{1,1}) = 4$ car $A_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (4)$

- $b_{1,2} = \text{cof}_{1,2} = (-1)^{1+2} \det(A_{1,2}) = -3$ car $A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (3)$

- $b_{2,1} = \text{cof}_{2,1} = (-1)^{2+1} \det(A_{2,1}) = 2$ car $A_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (2)$

- $b_{2,2} = \text{cof}_{2,2} = (-1)^{2+2} \det(A_{2,2}) = 1$ car $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (1)$

Donc $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; puis $\text{com}(A)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (car $\det(A) = -2$).

T.134

➔ **EXERCICE 52. Méthode des comatrices** : Dire si l'inversion de la matrice est possible, et si oui inverser ces matrices en utilisant la méthode des comatrices.

1 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2 $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4 $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5 $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

6 $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

Correction : **1** $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

- Calcul du déterminant avec développement suivant la ligne d'indice 3 : $\det(A_1) = (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1) \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_2 = -2$. Comme $\det(A_1) \neq 0$, la matrice est inversible.

- Calcul de la comatrice : $\text{com}(A_1) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1} & \text{cof}_{1,2} & \text{cof}_{1,3} \\ \text{cof}_{2,1} & \text{cof}_{2,2} & \text{cof}_{2,3} \\ \text{cof}_{3,1} & \text{cof}_{3,2} & \text{cof}_{3,3} \end{pmatrix}$ avec :

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,1} = 1$: $\text{cof}_{1,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [2 \times (-1) - 0 \times (-1)] = -2$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,2} = 1$: $\text{cof}_{1,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [0 \times (-1) - 0 \times (-1)] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,3} = 1$: $\text{cof}_{1,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \times [0 \times 0 - 0 \times 2] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{2,1} = 0$: $\text{cof}_{2,1} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times (-1) - 0 \times 1] = 1$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{2,2} = 2$: $\text{cof}_{2,2} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times (-1) - 0 \times 1] = -1$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{2,3} = -1$: $\text{cof}_{2,3} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times 0 - 0 \times 1] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{3,1} = 0$: $\text{cof}_{3,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times (-1) - 2 \times 1] = -3$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{3,2} = 0$: $\text{cof}_{3,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times (-1) - 0 \times 1] = 1$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{3,3} = -1$: $\text{cof}_{3,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times 2 - 0 \times 1] = 2$

D'où : $\text{com}(A_1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcul de l'inverse $A_1^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis après simplification : $A_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

.....
2 $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

- Calcul du déterminant avec développement suivant la colonne d'indice 2 : $\det(A_2) = (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times 2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{-3} + (+1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6$. Comme $\det(A_2) \neq 0$, la matrice est inversible.

- Calcul de la comatrice : $\text{com}(A_2) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1} & \text{cof}_{1,2} & \text{cof}_{1,3} \\ \text{cof}_{2,1} & \text{cof}_{2,2} & \text{cof}_{2,3} \\ \text{cof}_{3,1} & \text{cof}_{3,2} & \text{cof}_{3,3} \end{pmatrix}$ avec :

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,1} = 1$: $\text{cof}_{1,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [2 \times (-1) - 0 \times (-1)] = -2$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,2} = 0$: $\text{cof}_{1,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [(-1) \times (-1) - 2 \times (-1)] = -3$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,3} = 1$: $\text{cof}_{1,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \times [(-1) \times 0 - 2 \times 2] = -4$

- Cofacteur associé au coefficient $a_{2,1} = -1$: $\text{cof}_{2,1} = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [0 \times (-1) - 0 \times 1] = 0$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{2,2} = 2$: $\text{cof}_{2,2} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times (-1) - 2 \times 1] = -3$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{2,3} = -1$: $\text{cof}_{2,3} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times 0 - 2 \times 0] = 0$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{3,1} = 2$: $\text{cof}_{3,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [0 \times (-1) - 2 \times 1] = -2$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{3,2} = 0$: $\text{cof}_{3,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times (-1) - (-1) \times 1] = 0$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{3,3} = -1$: $\text{cof}_{3,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times 2 - (-1) \times 0] = 2$

D'où : $\text{com}(A_2) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcul de l'inverse $A_2^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ puis après simplification : $A_2^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

3 $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$:

- Calcul du déterminant avec la méthode de Sarrus : $\det(A_3) = 1 \times 2 \times (-1) + 3 \times 1 \times 1 + 2 \times 1 \times (-1) - 2 \times 2 \times 1 - 1 \times 1 \times (-1) - 3 \times 1 \times (-1) = -1$. Comme $\det(A_3) \neq 0$, la matrice est inversible.
- Calcul de la comatrice : $\text{com}(A_3) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1} & \text{cof}_{1,2} & \text{cof}_{1,3} \\ \text{cof}_{2,1} & \text{cof}_{2,2} & \text{cof}_{2,3} \\ \text{cof}_{3,1} & \text{cof}_{3,2} & \text{cof}_{3,3} \end{pmatrix}$ avec :
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{1,1} = 1$: $\text{cof}_{1,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [2 \times (-1) - 1 \times (-1)] = -1$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{1,2} = 1$: $\text{cof}_{1,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [3 \times (-1) - 2 \times (-1)] = 1$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{1,3} = 1$: $\text{cof}_{1,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (+1) \times [3 \times 1 - 2 \times 2] = -1$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{2,1} = 3$: $\text{cof}_{2,1} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times (-1) - 1 \times 1] = 2$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{2,2} = 2$: $\text{cof}_{2,2} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times (-1) - 2 \times 1] = -3$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{2,3} = -1$: $\text{cof}_{2,3} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times 1 - 2 \times 1] = 1$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{3,1} = 2$: $\text{cof}_{3,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times (-1) - 2 \times 1] = -3$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{3,2} = 1$: $\text{cof}_{3,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times (-1) - 3 \times 1] = 4$
 - Cofacteur associé au coefficient $a_{3,3} = -1$: $\text{cof}_{3,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times 2 - 3 \times 1] = -1$

D'où : $\text{com}(A_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

- Calcul de l'inverse $A_3^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis après simplification : $A_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

.....

4 $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} :$

- Calcul du déterminant avec développement suivant la ligne d'indice 1 : $\det(A_4) = (-1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}_{12} + (+1) \times$

$$0 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 12. \text{ Comme } \det(A_4) \neq 0, \text{ la matrice est inversible.}$$

- Calcul de la comatrice : $\text{com}(A_4) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1} & \text{cof}_{1,2} & \text{cof}_{1,3} \\ \text{cof}_{2,1} & \text{cof}_{2,2} & \text{cof}_{2,3} \\ \text{cof}_{3,1} & \text{cof}_{3,2} & \text{cof}_{3,3} \end{pmatrix}$ avec :

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,1} = 1$: $\text{cof}_{1,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (+1) \times [4 \times 3 - 0 \times 0] = 12$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,2} = 0$: $\text{cof}_{1,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times [0 \times 3 - 0 \times 0] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,3} = 0$: $\text{cof}_{1,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \times [0 \times 0 - 0 \times 4] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{2,1} = 0$: $\text{cof}_{2,1} = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \times [0 \times 3 - 0 \times 0] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{2,2} = 4$: $\text{cof}_{2,2} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times 3 - 0 \times 0] = 3$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{2,3} = 0$: $\text{cof}_{2,3} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times 0 - 0 \times 0] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{3,1} = 0$: $\text{cof}_{3,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \times [0 \times 0 - 4 \times 0] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{3,2} = 0$: $\text{cof}_{3,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times 0 - 0 \times 0] = 0$

— Cofacteur associé au coefficient $a_{3,3} = 3$: $\text{cof}_{3,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times 4 - 0 \times 0] = 4$

D'où : $\text{com}(A_4) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

- Calcul de l'inverse $A_4^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ puis après simplification : $A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

.....

5 $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} :$

- Calcul du déterminant avec développement suivant la ligne d'indice 1 : $\det(A_5) = (-1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}_{-12} + (+1) \times$

$$0 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}_{-20} = -32. \text{ Comme } \det(A_5) \neq 0, \text{ la matrice est inversible.}$$

- Calcul de la comatrice : $\text{com}(A_5) = \begin{pmatrix} \text{cof}_{1,1} & \text{cof}_{1,2} & \text{cof}_{1,3} \\ \text{cof}_{2,1} & \text{cof}_{2,2} & \text{cof}_{2,3} \\ \text{cof}_{3,1} & \text{cof}_{3,2} & \text{cof}_{3,3} \end{pmatrix}$ avec :

— Cofacteur associé au coefficient $a_{1,1} = 1$: $\text{cof}_{1,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \times [4 \times 0 - 6 \times 2] = -12$

- Cofacteur associé au coefficient $a_{1,2} = 0$: $\text{cof}_{1,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times [0 \times 0 - 5 \times 2] = 10$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{1,3} = 1$: $\text{cof}_{1,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (+1) \times [0 \times 6 - 5 \times 4] = -20$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{2,1} = 0$: $\text{cof}_{2,1} = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times [0 \times 0 - 6 \times 1] = 6$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{2,2} = 4$: $\text{cof}_{2,2} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times 0 - 5 \times 1] = -5$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{2,3} = 2$: $\text{cof}_{2,3} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times 6 - 5 \times 0] = -6$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{3,1} = 5$: $\text{cof}_{3,1} = (+1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (+1) \times [0 \times 2 - 4 \times 1] = -4$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{3,2} = 6$: $\text{cof}_{3,2} = (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times [1 \times 2 - 0 \times 1] = -2$
- Cofacteur associé au coefficient $a_{3,3} = 0$: $\text{cof}_{3,3} = (+1) \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = (+1) \times [1 \times 4 - 0 \times 0] = 4$

D'où : $\text{com}(A_5) = \begin{pmatrix} -12 & 10 & -20 \\ 6 & -5 & -6 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

- Calcul de l'inverse $A_5^{-1} = \frac{1}{-32} \begin{pmatrix} -12 & 6 & -4 \\ 10 & -5 & -2 \\ -20 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ puis après simplification : $A_5^{-1} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 12 & -6 & 4 \\ -10 & 5 & 2 \\ 20 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

6 $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}$:

- Calcul du déterminant avec la méthode de Sarrus : $\det(A_6) = 1 \times 4 \times 11 + 3 \times 6 \times 3 + 5 \times 2 \times 7 - 5 \times 4 \times 3 - 1 \times 6 \times 7 - 3 \times 2 \times 11 = 0$. Comme $\det(A_6) = 0$, la matrice n'est pas inversible.

□

4 Systèmes linéaires

4.1 Généralités sur les systèmes linéaires

4.1.1 Matrices associées à un système linéaire

Définition 121 (Système linéaire). Un système linéaire est un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 & (L_1) \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n & (L_n) \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$, b_i sont des réels ou des complexes donnés et les $x_1, \dots, x_m$ sont m inconnues.

Objectif de l'étude des systèmes linéaires

Déterminer les inconnues x_1 à x_m . Ces solutions forment un m -uplet. Les systèmes possèdent :

1. soit 0 solution ;
2. soit un unique m -uplet solution ; on parle alors de système de Cramer.
3. soit une infinité de m -uplet solutions.

T.137

Définition 122. Matrices associées à un système linéaire On peut modéliser un système linéaire sous forme d'une **équation matricielle** de type $\boxed{AX = B}$, avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B \quad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

où :

A est appelée **matrice de transformation**,

- X **vecteur d'inconnues**,
- B **vecteur de coefficients**.

T.138

Exemple 123 (Un système).

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 & (L_1) \\ -x + 2y = 5 & (L_2) \\ 4x - y = 7 & (L_3) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_B \quad \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{matrix}$$

T.139

4.2 Système linéaire de Cramer

4.2.1 Définitions

Définition 124 (Système de Cramer). Un système linéaire

$$AX = B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$

est un **système de Cramer** lorsque A est une matrice carrée inversible. Il possède donc autant d'équations que d'inconnues ($n = m$).

T.140

Exemple 125 (Résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$). Ce système peut être représenté par l'équation matricielle

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc sous la forme $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Comme A est carré et que $\det(A) = -2$, le système est un système de Cramer possédant un unique couple (x_1, x_2) solution.

T.141

4.2.2 Résolution avec la solution formelle

Théorème 126 (Solution formelle). Un système de Cramer possède une unique solution donnée par :

$$X = A^{-1}B.$$

Démonstration : $AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_I = \underbrace{A^{-1}B}_X \Leftrightarrow IX = A^{-1}B$

Exemple 127 (Suite de l'exemple 125). Puisque le système a une unique solution, en utilisant la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 (cf. exercice 35), cette solution est : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$.

T.142

➔ **EXERCICE 53.** Résoudre les systèmes suivants :

1 $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 5x + 8y = 7 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

□

T.143

4.2.3 Méthode de résolution de Cramer

Théorème 128 (Théorème de Cramer). Soit un système de Cramer $AX = B$ avec pour vecteur d'in-

connues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. La k^e inconnue x_k est donnée par : $x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$ où A_k est la matrice obtenue en remplaçant la k^e colonne de A par B .

Exemple 129 (Suite de l'exemple 125).

- $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ donc $\det(A_1) = 8$ soit $x_1 = -4$
- $x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ donc $\det(A_2) = -9$ soit $x_2 = \frac{9}{2}$

➔ EXERCICE 54. Déterminer si les systèmes suivants sont des systèmes de Cramer. Si oui, les résoudre en utilisant la méthode de Cramer :

$$\begin{aligned} \text{1} \quad & \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases} \\ \text{3} \quad & \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{2} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Correction :

$$\text{1} \quad \text{Système} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Notation matricielle : } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_B$$

• Calcul du déterminant : $\det(A) = -1$. Comme $\det(A) \neq 0$, le système admet une unique solution.

• Calcul de l'inconnue en 1^e position - nommée ici x : $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$ avec $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1$. Donc

$$x = \frac{1}{-1} = -1$$

• Calcul de l'inconnue en 2^e position - nommée ici y : $y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$ avec $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Donc

$$y = \frac{0}{-1} = 0$$

• Calcul de l'inconnue en 3^e position - nommée ici z : $z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$ avec $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -1$. Donc

$$z = \frac{-1}{-1} = 1$$

.....

$$\text{2} \quad \text{Système} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Notation matricielle : } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_B$$

• Calcul du déterminant : $\det(A) = 0$. Donc le système n'est pas un système de Cramer et n'a pas une unique solution.

.....

$$\text{3} \quad \text{Système} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Notation matricielle : } \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_B$$

• Calcul du déterminant : $\det(A) = -2$. Comme $\det(A) \neq 0$, le système admet une unique solution.

- Calcul de l'inconnue en 1^e position - nommée ici x : $x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$ avec $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14$.

$$\text{Donc } x = \frac{-14}{-2} = 7$$

- Calcul de l'inconnue en 2^e position - nommée ici y : $y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$ avec $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$.

$$\text{Donc } y = \frac{6}{-2} = -3$$

- Calcul de l'inconnue en 3^e position - nommée ici z : $z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$ avec $\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$. Donc

$$z = \frac{2}{-2} = -1$$

□

T.145

➔ EXERCICE 55. *Un système* : On considère le système suivant, portant sur les 3 inconnues réelles x, y, z et paramétré par un réel t :

$$\begin{cases} x + y + z = t+1 \\ 2x - y + (4t+3)z = 0 \\ -x + 2y + 2t^2z = 0 \end{cases}$$

- ① A quelle condition sur t le système est-il un système de Cramer?
- ② Dans ce cas, résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.

Correction :

- ① Notation matricielle du système : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & (4t+3) \\ -1 & 2 & 2t^2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} t+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec X le vecteur colonne d'inconnues $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- ② Recherche des solutions par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t+1 \\ 2 & -1 & 4t+3 & 0 \\ -1 & 2 & 2t^2 & 0 \end{array} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t+1 \\ 0 & -3 & 4t+1 & -2(t+1) \\ 0 & 3 & 2t^2+1 & t+1 \end{array} \right] &\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & t+1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}(4t+1) & \frac{2}{3}(t+1) \\ 0 & 3 & 2t^2+1 & t+1 \end{array} \right] &\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 / (-3) \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3}(t+1) & \frac{1}{3}(t+1) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}(4t+1) & \frac{2}{3}(t+1) \\ 0 & 0 & 2(t+1)^2 & -(t+1) \end{array} \right] &\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array} \end{aligned}$$

Plusieurs cas sont à distinguer :

1. Cas où $t \neq -1$: alors :

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{3}(t+1) & \frac{1}{3}(t+1) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}(4t+1) & \frac{2}{3}(t+1) \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2(t+1)} \end{array} \right] &\text{car } (t+1) \text{ ne s'annule pas} \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}t+1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4t^2+4t+3}{6(t+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2(t+1)} \end{array} \right] &\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{4}{3}(t+1)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}(4t+1)L_3 \end{array} \end{aligned}$$

ce qui aboutit à une unique solution.

2. Cas où $t = -1$: alors (en remplaçant t par sa valeur) :

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ en remplaçant } t \text{ par } -1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = -z$$

ce qui conduit à une infinité de solution formant la famille de triplet : $\{(0, y, -y)/y \in \mathbb{R}\}$.

□

T.146

4.2.4 Méthode de résolution par substitution

Méthodologie 130 (Méthode par substitution). Soit un système de Cramer $AX = B$ avec pour vecteur d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On choisit une des inconnues x_k , on l'exprime en fonction des autres inconnues puis on remplace x_k par son expression dans le système pour se ramener à un système comportant une inconnue de moins.

Exemple 131 (Même exemple que 125). On cherche à résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$. En utilisant la 2^{de} équation, on déduit que $x_2 = \frac{6-3x_1}{4}$, donc en remplaçant x_2 par son expression dans la 1^{ère} équation, on obtient : $x_1 + \frac{6-3x_1}{2} = 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_1 = -4$. Finalement, en remplaçant x_1 par sa valeur dans l'expression de x_2 , on déduit : $x_2 = 9/2$.

T.147

➔ EXERCICE 56. Résolution par substitution : Résoudre avec la méthode de substitution le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 7 & (a) \\ y + 2z = 2 & (b) \\ 6z = 12 & (c) \end{cases}$$

Correction : L'équation (c) donne $z = 2$; en remplaçant la valeur obtenue dans l'équation (b), on en déduit que $y + 12 = 2$ donc que $y = -10$; puis en remplaçant les deux valeurs obtenues pour y et z dans l'équation (a), on déduit que $2x - 30 + 8 = 7$ soit $x = 29/2$.

□

T.148

4.2.5 Méthode de résolution du pivot de Gauss

Matrices associées à un système linéaire

Soit un système de type $AX = B$, avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B \quad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

En omettant les inconnues $x_1, \dots, x_m$, un système linéaire peut être modélisé par la **représentation compacte** suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & b_n \end{array} \right] \quad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

T.149

Définition 132 (Systèmes linéaires équivalents). Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Théorème 133 (Règles d'équivalence). Les opérations permises sur les lignes, car conduisant à des systèmes équivalents, sont les suivantes :

1. Permutation de la ligne L_i et de la ligne L_j , notée $L_i \leftrightarrow L_j$;
2. Multiplication d'une ligne par un réel α non nul, notée $L_i \leftarrow \alpha L_i$;
3. Ajout de la ligne L_j à la ligne L_i , éventuellement multipliées par les réels α et β non nuls, noté $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$.

Aucune opération sur les colonnes n'est permise car elles modifient l'ordre des inconnues dans le système.

T.150

Méthodologie 134 (Méthode du pivot de Gauss). On utilise les règles d'équivalence sur les lignes conduisant à des systèmes linéaires équivalents pour faire apparaître un système de la forme $A'X = B'$ dans lequel :

- au mieux $A' = I_n$ (auquel cas les solutions sont dans B')
- ou au pire A' est triangulaire supérieure (dans ce cas, reste à utiliser la méthode de substitution).

T.151

Pivot de Gauss pour un système de Cramer

Partant du système d'inconnues $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ en **notation compacte** :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array} \right] \quad \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

```

for k allant de 1 à n do
  if il existe une ligne  $i \geq k$  telle que  $a_{i,k} \neq 0$  then
    Permutation  $L_k \leftrightarrow L_i$ ;
  else
    Le système n'a pas de solution; break ;
  end
   $pivot \leftarrow a_{k,k}$ ;
   $L_k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}} L_k$  de sorte que  $a_{k,k} \leftarrow 1$ ;
  for j allant de 1 à n, et différent de k do
     $L_j \leftarrow L_j - a_{j,k} L_k$  de sorte que  $a_{j,k} \leftarrow 0$ 
  end
end

```

T.152

Exemple 135 (Même exemple que 125). On cherche à résoudre $(S) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \end{matrix}$.

- 1^{er} pivot = 1^{er} coeff diagonal (ici 1) porté par la ligne 1 et la colonne 1
 - Permutation pas nécessaire
 - $a_{1,1} \leftarrow 1$: déjà fait!
 - $a_{j,1} \leftarrow 0$: on modifie toutes les lignes autres que celle du pivot de sorte à annuler les coef dans la colonne 1 en utilisant (L_1) : $(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{bmatrix}$ en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
- 2^e pivot = 2^e coef diagonal (ici -2) porté par la ligne 2 et la colonne 2
 - Permutation pas nécessaire
 - $a_{2,2} \leftarrow 1$: $(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 9/2 \end{bmatrix}$ en faisant $L_2 \leftarrow -L_2/2$
 - $a_{j,1} \leftarrow 0$: on modifie toutes les lignes autres que celle du pivot de sorte à annuler les coef dans la colonne 2 en utilisant (L_2) : $(S) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 9/2 \end{bmatrix}$ en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$
- On conclut que $x_1 = -4$ et $x_2 = 9/2$.

▲ Remarque : Seule la matrice A détermine les étapes dans la résolution par la méthode du pivot.

T.153

4.2.6 Exercices

➔ EXERCICE 57. Résoudre avec la méthode du pivot de Gauss, les systèmes d'équations suivants :

$$1 \quad \begin{cases} 2x + y + 2z = 7 \\ 3x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Correction :

1

Avec la notation matricielle compacte, le système équivaut à :

$$\begin{aligned}
 (S) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} \\
 \text{pivot 1} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix} & L_1 \leftarrow L_1/2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{-7}{2} & 0 & \frac{-17}{2} \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \\
 \text{pivot 2} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2/(\frac{7}{2}) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & -5 & \frac{-3}{7} \end{bmatrix} & \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \\
 \text{pivot 3} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{16}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{35} \end{bmatrix} & L_3 \leftarrow -L_3/5 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{35} \end{bmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 - L_3
 \end{aligned}$$

2 Avec la notation matricielle compacte, le système équivaut à :

$$\begin{aligned}
 (S) &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] \\
 \text{pivot 1} &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\
 \text{pivot 2} &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\
 \text{pivot 3} &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow -L_3/1 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

□

➔ EXERCICE 58. *Exercice type* : Soit le système d'équations $\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ x - y = \alpha \end{cases}$

① A quelle condition sur λ s'agit-il d'un système de Cramer ?

② Résoudre le système, en fonction de λ et α .

□

T.154

➔ EXERCICE 59. *Résolution d'un problème d'interpolation* : Connaissant trois points d'une courbe : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, trouver une fonction de la forme $ax^2 + bx + c$ qui passe par ces points.

Correction : On cherche l'ensemble des points M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $y = ax^2 + bx + c$, avec :

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

En remplaçant y_1, y_2, y_3, x_1, x_2 et x_3 par les données numériques de l'énoncé, il faut

$$\text{donc résoudre le système de 3 équations : } \begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 16a + 4b + c = 4 \end{cases} \text{ dont les inconnues sont } a, b \text{ et } c. \text{ En utilisant}$$

la notation compacte du système et la méthode du pivot de Gauss, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (S) &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 16 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right] \\
 \text{pivot 1} &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -12 & -15 & -28 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{pivot déjà 1} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 16L_1 \end{array} \\
 \text{pivot 2} &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -12 & -15 & -28 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2/2 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -22 \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 12L_2 \end{array} \\
 \text{pivot 3} &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-22}{3} \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3/3 \end{array} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-13}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-22}{3} \end{array} \right] & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2}L_3 \end{array}
 \end{aligned}$$

On trouve finalement $a = -\frac{13}{6}$, $b = \frac{23}{2}$ et $c = -\frac{22}{3}$. Et l'équation recherchée est $y = -\frac{13}{6}x^2 + \frac{23}{2}x - \frac{22}{3}$.

□

➔ EXERCICE 60. Gauss : Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle et les résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\boxed{1} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{2} \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{3} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Correction :

1

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{1}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pivot déjà à 1} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{2}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \text{pivot déjà à 1} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\ \\ (S) &\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{3}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad L_3 \leftarrow -L_3 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \end{aligned}$$

2

$$(S) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{1}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pivot déjà à 1} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{2}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \text{Plus de pivots non nuls disponibles} \end{array}$$

Donc le système n'a pas une unique solution. Ici l'équation 2 ($-2z = 2$) et l'équation ($2z = 1$) sont contradictoires (car il faudrait que $-2 = 1$ ce qui n'est pas possible). Le système n'a pas de solutions du tout!

3

$$\begin{aligned} (S) &\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{1}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pivot déjà à 1} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{2}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \text{pivot déjà à 1} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \\ \\ (S) &\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{3}^{\text{e}} \text{ pivot} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad L_3 \leftarrow -L_3 \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \end{aligned}$$

□

4.3 Extension à l'inversion matricielle

4.3.1 Principes

Objectif : On cherche à inverser la matrice A .

Inversion matricielle par la méthode de Cramer

On cherche une matrice $X = (x_{i,j})$ telle que $AX = I_n$. Il s'agit donc de résoudre le système obtenu en développant le produit $AX = I_n$, avec pour inconnues les coefficients $x_{i,j}$. C'est à la fois :

- un système linéaire de Cramer à n^2 équations et n^2 inconnues,
- et n systèmes de Cramer indépendants à résoudre comportant chacun n lignes et n inconnues.

T.156

Exemple 136 (Inversion matricielle). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}$. Alors :

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,1} & +2x_{2,1} & = 1 \\ & x_{1,2} & +2x_{2,2} & = 0 \\ 3x_{1,1} & & +4x_{2,1} & = 0 \\ & 3x_{1,2} & +4x_{2,2} & = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow A'X' = B' \quad (3)$$

On obtient un système linéaire à 4 équations et 4 inconnues, qu'on peut résoudre à l'aide de l'une des 3 méthodes vues précédemment.

Mais aussi :

$$AB = I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AX_1 = B_1 \\ AX_2 = B_2 \end{cases} \quad (5)$$

(6)

On se ramène donc à deux systèmes linéaires de même matrice de transformation A . Et comme la méthode du pivot est dictée par la matrice A on peut **les résoudre simultanément**.

T.157

4.3.2 Extension de la méthode du pivot de Gauss à l'inversion matricielle

Méthodologie 137 (Pivot de Gauss pour l'inversion matricielle). Pour calculer l'inverse de A , en utilisant les règles d'équivalence sur les lignes, on passe du système $[A|I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right]$ au système $[I_n|A^{-1}]$. Il n'y a plus qu'à relire la matrice A^{-1} .

T.158

➔ EXERCICE 61. Dire, si les matrices qui suivent sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse avec la méthode du pivot de Gauss :

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4 \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5 \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction :

1

$$(A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

pivot déjà 1

pivot 1 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

pivot 2 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$

$L_1 \leftarrow L_1 - L'_2$
 $L'_2 \leftarrow L_2/2$
 $L_3 \leftarrow L_3 + 2L'_2$

pivot 3 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right]$

$L_2 \leftarrow L_2 - L'_3$
 $L'_3 \leftarrow L_3/2$

2

$$(B) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

1er pivot déjà fait

pivot 2 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$
2ème pivot déjà 1

pivot 3 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
 $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$
3ème pivot déjà 1

pivot 4 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_4$
 $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4$
4ème pivot déjà 1

3

$$(C) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{pivot 1}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L'_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L'_1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{pivot 2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L'_2 \\ L'_2 \leftarrow L_2/5 \end{array}$$

4

$$(D) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{pivot 1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{1er pivot déjà 1} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{pivot 2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{2ème pivot déjà 1} \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{pivot 3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{3ème pivot déjà 1} \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

5

$$(E) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\text{pivot 1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \text{1er pivot nul donc échange } L_1 \text{ avec } L_2$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{1er pivot déjà 1} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{pivot 2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{2ème pivot déjà 1} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{pivot 3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L'_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L'_3 \\ L'_3 \leftarrow -L_3/2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L'_3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{pivot 4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L'_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L'_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L'_4 \\ L'_4 \leftarrow -L_4/(\frac{3}{2}) \end{array}$$

□

T.159

➔ EXERCICE 62. Inversion de matrices 2×2 : Dire si l'inversion de la matrice est possible, et si oui inverser-la :

$$1 \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4 \quad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$5 \quad A_5 = A_1 \times A_2$$

$$6 \quad A_6 = A_2 \times A_4$$

$$7 \quad A_7 = A_3 \times A_4$$

$$8 \quad A_8 = A_2^T$$

$$9 \quad A_9 = 3A_1.$$

Correction :

$$1 \quad \det(A_1) = -2, A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$2 \quad \det(A_2) = -51, A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{3}{17} & -\frac{1}{51} \end{pmatrix}$$

$$3 \quad \det(A_3) = 0, A_3 \text{ non inversible}$$

$$4 \quad \det(A_4) = 11, A_4^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5 \quad (A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{17} & -\frac{2}{17} \\ -\frac{13}{34} & \frac{19}{102} \end{pmatrix}$$

$$6 \quad (A_2 A_4)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{107} & \frac{34}{561} \\ \frac{10}{187} & -\frac{3}{187} \end{pmatrix}$$

$$7 \quad A_3 A_4 \text{ non inversible (déterminant nul)}$$

$$8 \quad (A_2^T)^{-1} = (A_2^{-1})^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{2}{17} & -\frac{1}{51} \end{pmatrix}$$

$$9 \quad (3A_1)^{-1} = \frac{1}{3} A_1^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

□

T.160

➔ EXERCICE 63. Inversion des matrices 2×2 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

① Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \mathbf{0}$.

② En déduire que si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - A)$.

Correction : ① En utilisant l'expression de la matrice A :

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 &= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (a+d)a & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_2 \end{aligned}$$

② De l'équation matricielle $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \mathbf{0}$, on déduit que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) \quad &\Leftrightarrow A^2 - (a+d)A = -(ad-bc)I_2 \\ &\Leftrightarrow A(A - (a+d)I_2) = -(ad-bc)I_2 \quad (\text{factorisation}) \\ &\Leftrightarrow A \times \underbrace{\frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - A)}_{A^{-1}} = I_2 \quad (\text{division par } -(ad-bc)) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I_2 - A).$$

□

➔ EXERCICE 64. *Inversibilité* : Pour tout nombre réel m , on considère la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$.

Déterminer pour quelles valeurs de m la matrice $A(m)$ est inversible, puis déterminer l'inverse avec la méthode du pivot de Gauss.

Correction :

- Calcul du déterminant : en développant suivant la dernière ligne, on a : $A(m) = \begin{vmatrix} m & m^2 \\ m^2 & m \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{vmatrix} = m^2 - m^4 + m(m^2 - m^2) = m^2(1 - m^2) = m^2(1 - m)(1 + m)$.
- Inversibilité : le déterminant s'annule pour $m = 0$, $m = 1$, $m = -1$. Ce sont les trois valeurs de m pour laquelle la matrice n'est pas inversible. Pour toute autre valeur, A^{-1} existe

□

4.4 Systèmes linéaires quelconques

4.4.1 Nombre de solutions d'un système linéaire quelconque

Définition 138 (Lignes linéairement indépendantes). Soit un système linéaire quelconque de m inconnues et n équations. Les lignes du système sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas n coefficients λ_k autres que 0 tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k L_k = \mathbf{0}_{1,m+1}$.

Exemple 139 $\begin{cases} x - y = 2 & (L_1) \\ 2x - 2y = 4 & (L_2) \end{cases}$. Avec $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $L_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, on a $2L_1 - L_2 = \mathbf{0}_{1,3}$ donc deux lignes linéaires dépendantes.

T.162

Définition 140 (Système linéaire sous-déterminé). Un système linéaire est **sous-déterminé** lorsque le nombre de lignes linéairement indépendantes est inférieur au nombre d'inconnues.

Définition 141 (Système linéaire sous-déterminé, sur-déterminé). Un système linéaire est **sur-déterminé** lorsque le nombre de lignes linéairement indépendantes est supérieur au nombre d'inconnues.

Exemple 142 (Des systèmes). $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$ est sous-déterminé ; $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ est sur-déterminé

T.163

Théorème 143 (Nombre de solutions d'un système). Soit un système linéaire $AX = B$. Alors :

- S'il possède autant d'inconnues (p) que d'équations et s'il est de Cramer (lignes linéairement indépendantes), alors il possède une solution unique $X = A^{-1}B$ (cf. méthodes précédentes).

Sinon :

- Si le système est sous-déterminé, il possède une infinité de solutions ;
- Si le système est sur-déterminé, il ne possède aucune solution.

T.164

4.4.2 Résolution des systèmes carrés

Méthodologie 144 (Pivot de Gauss pour les systèmes carrés ($n = m$)). Partant du système matriciel carré, ① utiliser les règles d'équivalence pour obtenir un système linéaire équivalent $A'X = B'$ dans lequel A' est **triangulaire supérieure** :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & a'_{n,n} \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{B'}$$

Puis ② analyser les cas de figure :

- Si la dernière ligne de A' est non nulle : système de Cramer avec une **solution unique** qui se résout par substitution progressive.
- Si les k dernières lignes de A' sont nulles et correspondent chacune à des coefficients nuls dans B' : système sous-déterminé avec une **infinité de solutions** obtenues en exprimant k inconnues en fonction des $n - k$ inconnues restantes ;

- Si l'une des lignes de A' est nulle et correspond à un coefficient non nul dans B' : système sur-déterminé n'ayant **pas de solution**.

T.165

4.4.3 Résolution des systèmes non carrés

Méthodologie 145 (Pivot de Gauss pour les systèmes non carrés avec $n < m$). Partant du système matriciel, ① utiliser les règles d'équivalence sur les lignes pour obtenir un système linéaire équivalent $A'X = B'$ dans lequel A' est le début d'une **matrice triangulaire supérieure** :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1,m} \\ & \ddots & & & \vdots \\ \mathbf{0} & & a'_{n,k} & \cdots & a'_{n,m} \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{B'}$$

Puis ② analyser les cas de figure :

- Si les k dernières lignes de A' sont nulles et que les k dernières lignes de B' sont nulles aussi : Système sous-déterminé ayant une infinité de solutions obtenues en exprimant k inconnues en fonction des $m - k$ restantes ;
- Si l'une des lignes (la k^e) de A' est nulle tandis que la k^e ligne de B' n'est pas nulle : Système sur-déterminé n'ayant pas de solution.

T.166

Méthodologie 146 (Pivot de Gauss pour les systèmes non carrés avec $n > m$). Partant du système matriciel, ① utiliser les règles d'équivalence pour obtenir un système linéaire équivalent $A'X = B'$ dans lequel les m premières lignes de A' constituent une **matrice triangulaire supérieure dont les $n-m$ lignes dernières sont nulles** :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a'_{k,m} \\ & & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_k \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{B'}$$

② Analyser ensuite les solutions :

- Si les m 1^{re} lignes de A' sont non nulles, si les $n - m$ dernières lignes de A' sont nulles et si les m derniers coefficients de B' sont nuls : système de Cramer avec une **solution unique** obtenue en ne gardant que les m 1^{re} lignes.
- Si k lignes de A' sont nulles et sont chacune associées à un coefficient dans B' nul : infinité de solutions obtenues en exprimant k inconnues en fonction de $m - k$ paramètres ;
- Si une ligne de A' (la k^e) est nulle et que le k^e coefficient de B' est non nul : aucune solution.

T.167

4.5 Exercices

➔ **EXERCICE 65. Résolution de systèmes linéaires** : Pour chacun des systèmes linéaires suivants, donner la notation matricielle compacte correspondante, puis trouver l'ensemble de solutions en utilisant la méthode la plus appropriée :

$$\boxed{1} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{3} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{2} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ 4x + 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{4} \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

□

Correction :

1

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 1} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L'_1 \leftarrow L_1/2 \\ L'_2 \leftarrow L_2 - L'_1 \\ L'_3 \leftarrow L_3 - 3L'_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 2} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L'_2 \\ L'_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L'_2 \end{array}$$

La dernière équation indiquée par le système s'interprétant comme $0x + 0y = 0$, ce qui est toujours vrai, alors le système admet effectivement une solution : $x = 2, y = -3$.

2

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 1} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L'_1 \leftarrow L_1/2 \\ L'_2 \leftarrow L_2 - L'_1 \\ L'_3 \leftarrow L_3 - 4L'_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 2} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L'_2 \\ L'_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L'_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{retraduction sous forme de système}$$

La dernière équation indiquée par le système s'interprétant comme $0x + 0y + 0z = 0$, ce qui est toujours vrai, le système perd une contrainte au profit d'un degré de liberté. Notons λ ce degré de liberté et choisissons de l'affecter (puisque ni x , ni y , ni z n'a encore de valeur imposée) à l'inconnue z .

Finalement,

$$\begin{array}{l} (S) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 2 \\ y + 3z = -3 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{ajout du degré de liberté} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2z = 2 + 2\lambda \\ y = -3 - 3z = -3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{en exprimant les variables} \\ \text{en fonction du degré de liberté} \end{array} \end{array}$$

Le système admet donc une infinité de solutions de la forme : $x = 2 + 2\lambda$, $y = -3 - 3\lambda$ et $z = \lambda$ avec λ un paramètre réel quelconque.

3

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 1} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -4 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \text{1er pivot déjà 1} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 2} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L'_2 \\ L'_2 \leftarrow -L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L'_2 \end{array}$$

La dernière ligne s'interprétant comme $0x + 0y + 0z = -4$, ce qui est impossible, alors le système n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

4

$$(S) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 1} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L'_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L'_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L'_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L'_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 2} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L'_2 \\ L'_2 \leftarrow -L_2/(\frac{3}{2}) \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L'_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L'_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{pivot 3} \\ \Leftrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L'_3 \\ L'_3 \leftarrow L_3/2 \end{array}$$

La dernière ligne s'interprétant comme $0x + 0y + 0z = \frac{5}{3}$ ce qui est impossible, alors le système n'a pas de solution : $S = \emptyset$.

T.168

➔ EXERCICE 66. Résolution d'un système linéaire paramétré : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe quelconque. Résoudre et discuter suivant la valeur de λ le système d'équations :
$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + (1 - \lambda)z = 0 \\ 2x + (1 + \lambda)y + (1 + \lambda)z = 2 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

Correction : Notation compacte :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - 1 & 0 & 0 & \lambda - 1 \\ 2 & 1 + \lambda & 1 + \lambda & 2 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right)$$

. Le déterminant du système vaut $(\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda + 1 & \lambda + 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda(\lambda - 1) - (\lambda + 1)) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$. Ce déterminant est donc nul si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. On va donc être amené à étudier différents cas :

- si $\lambda = 1$: le système s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

d'où $x = 1 - y - z$, y, z quelconques : $\mathcal{S} = \{(1 - y - z, y, z), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;

- si $\lambda = -1$, le système s'écrit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Les solutions sont alors telles que $x = 1$ et $y = z$: $\mathcal{S} = \{(1, y, y), y \in \mathbb{R}\}$.

- si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$, le système possède une unique solution $x = 1, y = 0, z = 0$: $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$.

□

➔ EXERCICE 67. *Matrice de rotation* : Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel quelconque et soit $A(x)$ la matrice définie par $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

- ① Montrer que $A(x)$ est inversible, puis calculer son inverse et montrer que $A^{-1}(x) = A(-x)$.
- ② Montrer que $A(x)^2 = A(2x)$.
- ③ En déduire $A(x)^n$ pour tout entier relatif n .

Correction :

1. $\det(A(x)) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$, donc $A(x)$ est bien inversible ; de plus $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x)A(-x)$, d'où le résultat.
2. $A(x)^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & -2 \cos x \sin x \\ 2 \cos x \sin x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2x) & -\sin(2x) \\ \sin(2x) & \cos(2x) \end{pmatrix} = A(2x)$;
3. en itérant, on trouve que $A(x)^n = A(nx)$, pour tout entier positif n . Et comme $A(x)^{-1} = A(-x)$, on en déduit que $A(x)^n = A(nx)$ pour tout entier positif, négatif ou nul.

□