# Mathématiques des systèmes numériques
# Ressource R213

Cyrille SICLET, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr
Kévin KASPER, kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr
Jean-Marc THIRIET, jean-marc.thiriet@univ-grenoble-alpes.fr
Cléo BARAS, cleo.baras@univ-grenoble-alpes.fr

IUT Département Réseaux & Télécommunications
Version 2024-2025

# - Les Maths en RT

## Objectif

Maitriser les outils mathématiques utiles pour l'informatique, les réseaux et les télécoms.

## Les ressources

- R113 (S1) : Mathématiques du signal
- R114 (S1) : Mathématiques des transmissions
- R213 (S2) : Mathématiques des systèmes numériques
- R214 (S2) : Analyse mathématique des signaux

# - Ressource R213, Mathématiques des systèmes numériques

- **Volume horaire :**
  - 30 heures
  - 14 séances de cours/travaux dirigés ($14 \times 2$h),
  - 1 devoir surveillé ($1 \times 2$h)
- **Évaluation**
  - Contrôle continu : coeff 1
  - Devoir surveillé final : coeff 3

# - Compétences ciblées et apprentissages critiques ouverts par la ressource R213

- Compétence RT1 Niveau 1 - Administrer les réseaux et l'Internet :
  - AC0112 : Comprendre l'architecture des systèmes numériques et les principes du codage de l'information.
- Compétence RT2 Niveau 1 - Connecter les entreprises et les usagers :
  - AC0212 : Caractériser des systèmes de transmissions élémentaires et découvrir la modélisation mathématique de leur fonctionnement.
- Compétence RT3 Niveau 1 - Créer des outils et applications informatiques pour les R&T :
  - AC0311 : Utiliser un système informatique et ses outils.
  - AC0313 : Traduire un algorithme, dans un langage et pour un environnement donné.

# - SAÉ et ressources concernées par la ressource R213

## SAÉ concernées

- SAÉ22 : Mesurer et caractériser un signal ou un système ;
- SAÉ23 : Mettre en place une solution informatique pour l'entreprise ;
- SAÉ24 : Projet intégratif.

# 1. - Plan

Introduction aux signaux discrets

- Rappels sur les suites numériques
- Suites récurrentes
- Signaux discrets

De la géométrie 2D à l'algèbre linéaire nD

Matrices

Systèmes linéaires

# 1. - Introduction

## Définition 1 (Les signaux discrets).

Les signaux discrets sont des fonctions de la variable temporelle entière $k$. Ils véhiculent une information délivrée par l'évolution d'une grandeur physique mesurée à des instants $t_k$, et peuvent être de natures variées :

- en **électronique** : signal de tension ou d'intensité ;
- en **télécommunication** : signal électromagnétique en sortie d'un modulateur ;
- en **téléphonie** : signal de parole, signal vidéo pour une visioconférence.

## Contexte général du cours

En mathématiques, on utilise souvent les lettres $n$ ou $k$ pour désigner des variables entières, et la lettre $u$ pour désigner une suite dont le terme général $u_n$ est fonction d'un paramètre entier $n$. Dans ce cours on utilisera cette notation usuelle pour décrire des propriétés mathématiques générales. Quand on fera référence à un signal discret, on utilisera plutôt la notation $s[k]$ pour désigner un signal $s$ dépendant d'un paramètre entier $k$ représentant le temps discret.

# 1. - Introduction : de l'analogique au numérique

## Signal continu (analogique)

Variable temporelle $t$ réelle : signal $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$

## Signal discret (numérique)

Variable temporelle $k$ entière : signal $s[k]$, $k \in \mathbb{Z}$

## Passage du continu au discret : échantillonnage

échantillonnage d'un signal continu $s(t)$ à la période $T_\mathrm{e}$ :
$s[k] = s(t_0 + kT_\mathrm{e})$ avec $t_0$ instant arbitraire (souvent, $t_0 = 0$)

# 1.1.1. - Suites numériques

## Définition 2 (Suite numérique).

Une **suite numérique** $u$ est une application, définie sur l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et à valeurs dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, et notée :

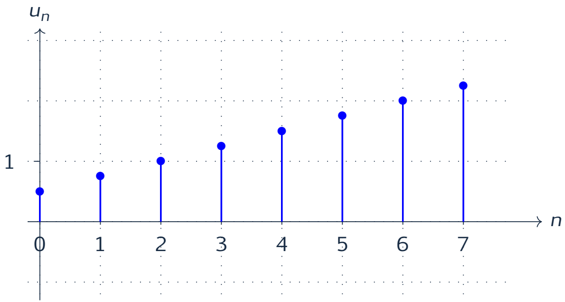
$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{cases} .$$

On appelle $n$ le **rang** et $u_n$ est le **terme général** de la suite.

# 1.1.1. - Représentation

## Exemple 3 (Une suite).

$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ n \mapsto \frac{1}{4}n + \frac{1}{2} \end{cases}$ est une suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{4}n + \dfrac{1}{2}$.




**Remarque :** Une suite $u$ peut n'être définie qu'**à partir d'un certain rang** (apcr.) $n_0$ : cela signifie que $u_n$ n'est donné que pour $n \geq n_0$.

# 1.1.2. - Sens de variation

## Définition 4 (Sens de variation).

Soient une suite $u$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. $u$ est :

1. **croissante** apcr. $n_0$ ssi $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$
2. **strictement croissante** apcr. $n_0$ ssi $\forall n \geq n_0, u_{n+1} > u_n$
3. **décroissante** apcr. $n_0$ ssi $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$
4. **strictement décroissante** apcr. $n_0$ ssi $\forall n \geq n_0, u_{n+1} < u_n$
5. **monotone** apcr. $n_0$ ssi $u$ est croissante ou décroissante apcr. $n_0$

EXERCICE 1. *Sens de variation* :
En calculant le signe de $u_{n+1} - u_n$ déterminer si le sens de variation des suites de termes généraux suivants : (on indiquera le terme à partir duquel la suite est croissante ou décroissante) :

1 $u_n = n^2 - 2n - 1$ 2 $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ 3 $u_n = \sqrt{n}$

# 1.1.2. - Bornes

**Définition 5 (Suite majorée, minorée, bornée).**

Soient une suite $u$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. La suite $u$ est :

1. **majorée** apcr. $n_0$ ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq M$
2. **minorée** apcr. $n_0$ ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq m$
3. **bornée** apcr. $n_0$ ssi $u$ est majorée et minorée

➔ Exercice 2. *Suite majorée, minorée, bornée* :

Montrer que pour $n \geq 0$ :

1 $n^2 - 2n - 1 \geq -2$ 2 $-1 \leq \frac{n-1}{n+1} < 1$ 3 $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq 1$ □

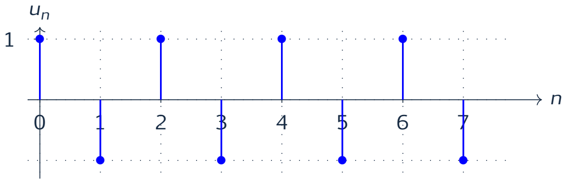
# 1.1.2. - Suites alternées

## Définition 6 (Suite alternée).

Une suite $u$ est alternée apcr. $n_0$ si pour tout $n \geq n_0$, $u_n$ et $u_{n+1}$ sont de signes opposés, autrement dit : $\forall n \geq n_0, u_n\, u_{n+1} < 0$

## Exemple 7 (Une suite alternée).

La suite $u$ de terme général $u_n = (-1)^n$ est alternée.



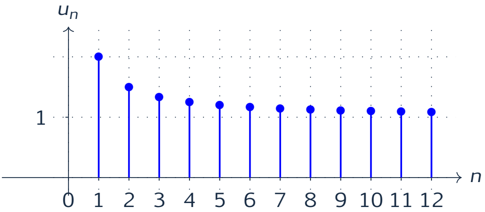
# 1.1.3. - Convergence

## Définition 8 (Suite convergente).

Soit $L \in \mathbb{R}$. Une suite $u$ est **convergente** de **limite** $L$ en $+\infty$ ssi $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in ]n_0;+\infty[, \left|u_n - L\right| < \epsilon$. On note alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim u = L$.

## Exemple 9 (Une suite convergente).

$u$ de terme général $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ est convergente de limite $L = 1$



# 1.1.3. - Divergence

## Définition 10 (Divergence).

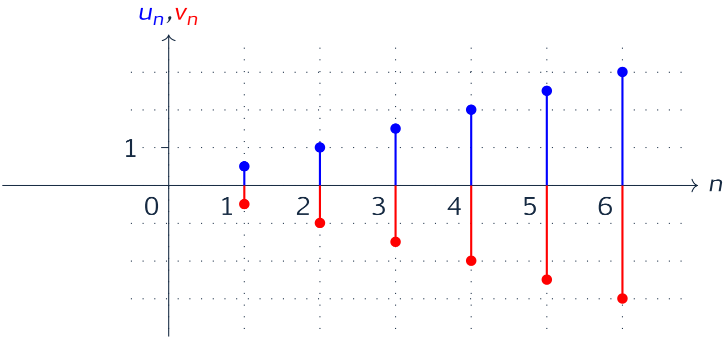
Une suite $u$ est **divergente** si elle n'est pas convergente. Elle peut :

- être **divergente de limite** $+\infty$ ssi $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in ]n_0, +\infty[, u_n > A$. On note alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim u = +\infty$
- être **divergente de limite** $-\infty$ ssi $\forall A < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in ]n_0, +\infty[, u_n < A$. On note alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim u = -\infty$
- être **divergente sans limite**

# 1.1.3. - Exemples

## Exemple 11 (Des suites divergentes).

1. $u_n = \frac{n}{2}$ est divergente de limite $L = +\infty$
2. $v_n = -\frac{n}{2}$ est divergente de limite $L = -\infty$
3. $w_n = (-1)^n$ est divergente sans limite



# 1.1.3. - Limites de suites usuelles

Pour $c \in \mathbb{R}$ une constante réelle, $k \in \mathbb{N}^*$ un entier positif non nul, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ une constante réelle positive, $v_n$ suite telle que $\lim v = +\infty$ :

| $u_n$ | $c$ | $v_n^k$ | $\frac{1}{v_n^k}$ | $\sqrt{v_n}$ | $\sqrt[k]{v_n}$ | $v_n^\alpha$ | $v_n^{-\alpha}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Limite | $L = c$ | $+\infty$ | $0^+$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $0^+$ |

| $u_n$ | $\ln(v_n)$ | $\exp(v_n)$ | $\cos(v_n)$ | $\sin(v_n)$ | $n!$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Limite | $+\infty$ | $+\infty$ | p.d.l. [1] | p.d.l. | $+\infty$ |

**Note** : si $v_n = v_0 + 2n\pi$, on a $\cos(v_n) = \cos(v_0)$ et $\sin(v_n) = \sin(v_0)$. De plus, si $v_n = n\pi$ alors $\sin(v_n) = 0$ et si $v_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\cos(v_n) = 0$. Dans tous ces cas particuliers, $\cos(v_n)$ et $\sin(v_n)$ sont en fait des suites constantes et donc convergentes. Dans les autres cas il n'y a pas de limite.

1. p.d.l. : pas de limite

# 1.1.3. - Opérations sur les limites

.

| | $\lim\limits_{+\infty} u$ | $\lim\limits_{+\infty} v$ | $\lim\limits_{+\infty} \lambda u$ | $\lim\limits_{+\infty} u+v$ | $\lim\limits_{+\infty} u.v$ | $\lim\limits_{+\infty} \frac{u}{v}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Finie-Finie** | $L_u$ | $L_v$ | $\lambda L_u$ | $L_u + L_v$ | $L_u L_v$ | $\frac{L_u}{L_v}$ |
| | $L_u$ | $0^+$ | $\lambda L_u$ | $L_u$ | $0$ | $\text{sign}(L_u)\infty$ |
| | $L_u$ | $0^-$ | $\lambda L_u$ | $L_u$ | $0$ | $-\text{sign}(L_u)\infty$ |
| | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | FI |
| **Finie-Infinie** | $s\,\infty$ | $L_v$ | $\text{sign}(s\lambda)\infty$ | $s\,\infty$ | $\text{sign}(sL_v)\infty$ si $L_v \neq 0$<br>FI si $L_v = 0$ | $\text{sign}\left(\frac{s}{L_v}\right)\infty$ |
| | $L_u$ | $s\,\infty$ | $\lambda L_u$ | $s\,\infty$ | $\text{sign}(sL_u)\infty$ si $L_u \neq 0$<br>FI si $L_u = 0$ | $0$ |
| **Infinie-Infinie** | $+\infty$ | $+\infty$ | $\text{sign}(\lambda)\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | FI |
| | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\text{sign}(\lambda)\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | FI |
| | $+\infty$ | $-\infty$ | $\text{sign}(\lambda)\infty$ | FI | $-\infty$ | FI |
| | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\text{sign}(\lambda)\infty$ | FI | $-\infty$ | FI |

# 1.1.3. - Étude de la convergence

## Propriété 12.

*Soient $u$, $v$ et $w$ trois suites définies apcr. $n_0$.*

1. *Si $(u_n)$ est croissante et majorée, elle converge vers une limite $l$ inférieure à tous ses majorants*
2. *Si $(u_n)$ est décroissante et minorée, elle converge vers une limite $l$ supérieure à tous les minorants*

## Propriété 13.

*Si $\forall n > n_0, u_n \leq w_n \leq v_n$, et si $\lim u = \lim v = l$, alors $\lim w = l$.*

## Propriété 14.

*Si $\forall n > n_0, v_n \geq u_n$,*

1. *si $\lim u = +\infty$, alors $\lim v = +\infty$*
2. *si $\lim v = -\infty$, alors $\lim u = -\infty$*

# 1.1.3. - Exercices

**Exercice 3.** *Convergence d'une suite numérique* :
Déterminer si les suites $u$ suivantes sont convergentes et si oui, quelles sont leurs limites ?

1. $u_n = \dfrac{3n-1}{7n+2}$
2. $u_n = \dfrac{n^2+1}{7n+2}$
3. $u_n = \dfrac{n.(-1)^n+1}{n+1}$

**Exercice 4.** *Convergence de suites numériques* :
Étudier la convergence des suites $u$ dont le terme général $u_n$ est :

1. $\dfrac{2n-4}{3n+5}$
2. $n^3-2n^2$
3. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
4. $\dfrac{\cos(n)}{n}$
5. $\dfrac{\exp(2n+1)}{\exp(3n-1)}$
6. $\dfrac{n!}{2^n}$
7. $\dfrac{n!}{n^n}$
8. $\dfrac{1}{n+(-1)^n}$

# 1.2.1. - Suite récurrente

### Définition 15 (Suite récurrente).

Une **suite récurrente** $u$ est une suite définie implicitement par une relation de récurrence permettant de calculer le terme $u_n$ à partir des termes précédents et de $n$ : $u_n = \phi(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, n)$, où $\phi$ est une fonction.

### Exemple 16 (La suite de Fibonacci).

Elle est définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ et par deux conditions initiales imposant $u_0$ et $u_1$.

# 1.2.1. - Démonstration par récurrence

## Méthodologie 17 (Démonstration par récurrence).

*Pour démontrer qu'une propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$ :*

1. *On démontre la propriété au rang $n_0$, i.e. on démontre que $\left(\mathcal{P}_{n_0}\right)$ est vrai.*
2. *On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vrai pour $n$ quelconque et on démontre que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vrai (souvent en utilisant la relation de récurrence liant $(\mathcal{P}_n)$ à $(\mathcal{P}_{n+1})$).*

➔ EXERCICE 5. *Somme des entiers de 1 à $n$ :* montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. □

➔ EXERCICE 6. *Somme des puissances de $q$ :* montrer par récurrence que pour $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ : $1 + q + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. □

# 1.2.2. - Suite géométrique de raison $q$

**Définition 18 (Suite géométrique de raison $q$).**

Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite $u$ est **géométrique de raison** $q$ lorsqu'elle est définie par la relation de récurrence : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = q\, u_n$.

**Théorème 19 (Suite géométrique de raison $q$).**

*Soit $q \in \mathbb{C}$. $u$ est une suite géométrique de raison $q$ ssi $\forall 0 \leq k \leq n$, $u_n = u_k\, q^{n-k}$.*

**Démonstration.**

Par récurrence □

# 1.2.2. - Suite arithmétique de raison $q$

**Définition 20 (Suite arithmétique de raison $q$).**

Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite $u$ est **arithmétique de raison** $q$ lorsqu'elle est définie par la relation de récurrence : $\forall n \geq 0, u_{n+1} = u_n + q$.

**Théorème 21 (Suite arithmétique de raison $q$).**

*Soit $q \in \mathbb{C}$. $u$ est une suite arithmétique de raison $q$ ssi $\forall 0 \leq k \leq n$, $u_n = u_k + (n-k)q$.*

**Démonstration.**

Par récurrence □

# 1.2.2. - Exercices

**Exercice 7.** *Soit $u_n$ la suite définie par la relation : $u_{n+1} = u_n - 3$, avec $u_0 = 1$ :*

1. Quelle est la nature de cette suite ?
2. Calculer $u_{12}$.
3. $u_n$ est-elle divergente ou convergente ? Calculer la limite si elle existe.

□

**Exercice 8.** *Mêmes questions pour :*

1 $u_{n+1} = 2u_n$ 2 $u_{n+1} = 0.5u_n$ 3 $u_{n+1} = u_n + 1$

□

**Exercice 9.** *Récurrence :* Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. **Inégalité de Bernoulli** : pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)$

□

# 1.3.1. - Signal discret et suite numérique

## Notation

Un signal discret est une suite $\{x[k]\}$ à termes réels ou complexes définie par l'application :

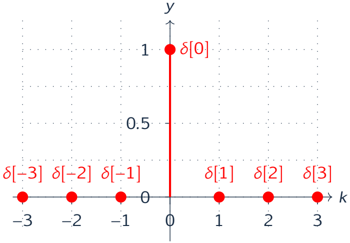
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\to \mathbb{C} \\ k &\mapsto x[k] \end{aligned}$$

Remarque : par abus de langage, on désignera souvent un signal par $x[k]$ au lieu de $\{x[k]\}$.

# 1.3.1. - Impulsion de Kronecker (Dirac discret)

**Définition 22 (Impulsion de Kronecker).**

$$\delta : \begin{cases} \delta[0] = 1 \\ \delta[k] = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \end{cases} .$$



# 1.3.1. - Échelon unité

**Définition 23 (Échelon unité).**

$$u : \begin{cases} u[k] = 1 & \text{pour } k \geq 0 \\ u[k] = 0 & \text{pour } k < 0 \end{cases}.$$

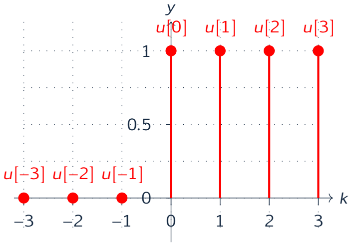



Figure – Echelon $u = \{u[k]\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

# 1.3.2. - Propriétés

**Définition 24 (Signal discret causal).**

Lorsque $x[k] = 0$ pour $k < 0$, on dit que $x$ est causal.

**Propriété 25 (Rendre un signal causal).**

*Tout signal $x$, multiplié par l'échelon unité $u$, devient causal.*

**Définition 26 (Signal discret de durée finie).**

On dit que $x$ est de durée finie lorsqu'il existe deux entiers $k_1$ et $k_2$ tels que $x[k] = 0$ pour $k < k_1$ et $k > k_2$.

**Définitions 27 (Avance, retard).**

Étant donné un signal $x$ et $k_0$ un entier naturel, on définit le signal $y$ comme :

- le **signal retardé** de $k_0$ échantillons par : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y[k] = x[k - k_0]$ ; la représentation de $y$ est celle de $x$ décalée de $k_0$ échantillons vers la droite.
- le **signal avancé** de $k_0$ échantillons par : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $y[k] = x[k + k_0]$ ; la représentation de $y$ est celle de $x$ décalée de $k_0$ échantillons vers la gauche.

# 1.3.2. - Exercices

**Exercice 10.** *Signaux discrets :*

- Représenter graphiquement les signaux suivants pour $-3 \leq k \leq 10$ :

| | |
|---|---|
| 1 $s[k] = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-1]$ | 2 $s[k] = u[k] + \frac{1}{2}\delta[k+1]$ |
| 3 $s[k] = u[k] + \frac{1}{2}u[k-1]$ | 4 $s[k] = u[k+1] - u[k-1]$ |
| 5 $s[k] = u[k] - \frac{1}{2}u[k-1]$ | 6 $s[k] = ku[k]$ |
| 7 $s[k] = u[k] + \frac{k}{2}u[k-1]$ | 8 $s[k] = (k+1)u[k+1] - (k-1)u[k-1]$ |

- Parmi les signaux précédents, lesquels sont causaux ? De durée finie ?

□

# 1.3.3. - Généralités sur les systèmes discrets

## Définition 28 (Système discret).

Un système discret F est une transformation d'une suite $x[k]$ (entrée du système) en une suite $y[k] = \mathrm{F}\{x[k]\}$ (sortie).

## Définition 29 (Systèmes discrets linéaires).

On dit qu'un système discret F est linéaire lorsque
$\mathrm{F}\{\alpha_1 x_1[k] + \alpha_2 x_2[k]\} = \alpha_1 \mathrm{F}\{x_1[k]\} + \alpha_2 \mathrm{F}\{x_2[k]\}$
avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ et $x_1[k]$ et $x_2[k]$ deux signaux discrets.

## Définition 30 (Système discrets invariants).

On dit qu'un système discret F est invariant lorsque
$\mathrm{F}\{x[k-n]\} = y[k-n]$ pour tous $k, n$ entiers.

## Exemples 31 (Systèmes linéaires, invariants... ou pas).

- $y[k] = x^3[k]$ : non linéaire, invariant ;
- $y[k] = kx[k]$ : linéaire, non invariant ;
- $y[k] = 3x[k] + 2x[k-1]$ : linéaire et invariant.

# 1.3.3. - Systèmes linéaires invariants discrets

## Propriété 32 (Équation aux différences).

*Un système discret est linéaire et invariant (SLI) si et seulement si sa sortie $y[k]$ peut être calculée à partir de son entrée $x[k]$ par une **équation aux différences** du type :* $\sum_{n=0}^{N} a_n y[k-n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[k-m]$.

## Opérateurs élémentaires.

Un SLI discret peut être réalisé à l'aide des trois opérateurs de base :

- retard $y[k] = x[k-1]$ ;
- amplification $a$ : $y[k] = ax[k]$ ;
- addition : $y[k] = x_1[k] + x_2[k]$.

## Exemples 33 (Relations entrée-sortie).

- $y[k] = x[k] + 2x[k-1]$
- $y[k] - ay[k-1] = x[k-1]$ (Système récursif du premier ordre)

# 1.3.3. - Réponse impulsionnelle d'un filtre numérique

**Définition 34 (Réponse impulsionnelle).**

On appelle réponse impulsionnelle d'un SLI discret la réponse (sortie) du système à l'impulsion de Kronecker $\delta[k]$ (entrée du système) : $h[k] = \mathrm{F}\{\delta[k]\}$

**Définition 35 (Filtre numérique).**

Un SLI discret est aussi appelé filtre numérique.

# 1.3.3. - Réponse impulsionnelle causale, finie, infine

## Définition 36 (Système (filtre) causal).

Un SLI est dit causal si sa réponse impulsionnelle $h[k]$ est causale.

## Définition 37 (Système (filtre) à réponse impulsionnelle finie ou infinie).

Un SLI est dit à réponse impulsionnelle finie (RIF) si $h[k]$ est à durée limitée. Dans le cas contraire, on dit qu'il est à réponse impulsionnelle infinie (RII).

➔ EXERCICE 11. *Réponse impulsionnelle :*
Donner la réponse impulsionnelle des systèmes régis par les relations entrée sorties suivantes et indiquer si le système est causal, RIF ou RII :

1. $y[k] = x[k] + \frac{1}{2}x[k-1]$
2. $y[k] = 2x[k+1] + \frac{1}{2}x[k-1]$
3. $y[k] = x[k] + x[k-1] + x[k-2]$

# 1.3.3. - Relation entrée-sortie d'un filtre à réponse impulsionnelle finie causale

**Théorème 38 (Produit de convolution).**

*La sortie d'un SLI de réponse impulsionnelle finie causale $h$ et d'entrée $x$, est le signal $y$ défini par :*

$$y[k] = h[k] * x[k] = \sum_{n=0}^{L-1} h[n]x[k-n]$$ *où l'opération $*$ est appelé **produit de convolution** et $h[k] = 0$ pour $k \geq L \in \mathbb{N}$.*

**Exercice 12.** *On applique un signal $x[k]$ à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h[k]$. Donner la réponse $y[k]$ obtenu en sortie du filtre lorsque :*

1. $x[k] = \delta[k] + 2\delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] + 3\delta[k-1]$;
2. $x[k] = \delta[k] + \delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] - \delta[k-1]$;
3. $x[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-1]$ et $h[k] = \delta[k] - 2\delta[k-1]$.

□

# 1.3.3. - Propriétés du produit de convolution

## Propriété 39 (Produit de convolution).

*Soient $s_1, s_2, s_3$ trois signaux, $\lambda$ un réel et $k_0$ un entier. Alors :*

1. ***Multiplication par une constante** : $(\lambda s_1) * s_2 = \lambda(s_1 * s_2)$ ;*
2. ***Commutativité** : $s_1 * s_2 = s_2 * s_1$ ;*
3. ***Associativité** : $(s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3)$ ;*
4. ***Distributivité par rapport à l'addition** :*
   $s_1 * (s_2 + s_3) = (s_1 * s_2) + (s_1 * s_3)$ ;
5. ***Convolution avec une impulsion de Kronecker** : $s * \delta = s$ et*
   $s[k] * \delta[k - k_0] = s[k - k_0]$.

➔ EXERCICE 13. *On applique un signal $x[k]$ à l'entrée d'un filtre de réponse impulsionnelle $h[k]$.Appliquer les propriétés précédentes pour calculer la réponse $y[k]$ obtenu en sortie du filtre lorsque :*

1. $x[k] = \delta[k] - 3\delta[k-1]$ et $h[k] = 2\delta[k] + 3\delta[k-2]$;
2. $x[k] = \delta[k] - \frac{1}{2}\delta[k-2]$ et $h[k] = \delta[k] - 2\delta[k-1] + \delta[k-3]$.

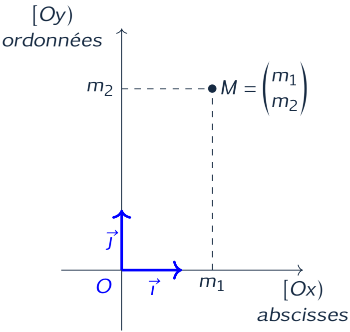
# 2. - Plan

# 2.1.1. - Point dans l'espace 2D

Dans le plan (l'**espace 2D**), un **point** $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ est identifié par un couple **ordonné** de valeurs réelles $m_1$ et $m_2$.

Muni du **repère cartésien orthonormé** de centre $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$ sur l'axe $[0x)$ et $\vec{\jmath}$ sur l'axe $[Oy)$ le couple de valeurs $\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ donne les **coordonnées** de $M$ :

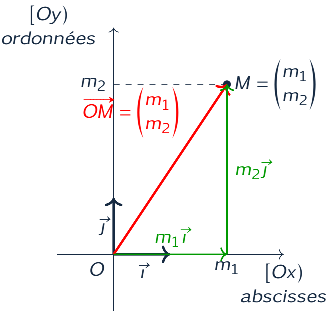
- $m_1$ est son **abscisse** : c'est la distance qui sépare le point $M$ de l'axe des ordonnées
- $m_2$ est son **ordonnée** : c'est la distance qui sépare le point $M$ de l'axe des abscisses



# 2.1.2. - Vecteurs, des déplacements

## Définition 40 (Du point au vecteur).

Partant d'un point $M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ dans le repère cartésien, le **vecteur** $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ est l'**entité** qui décrit le déplacement allant de $O$ (point de départ) à $M$ (point final). Il consiste à se déplacer de $m_1$ dans le sens de $\vec{\imath}$ puis de $m_2$ dans le sens de $\vec{\jmath}$. On le note : $\boxed{\overrightarrow{OM} = m_1\vec{\imath} + m_2\vec{\jmath}}$.



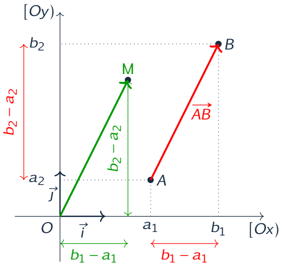

## Cas particuliers : le vecteur nul, $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$

Le vecteur nul est $\vec{0} = \overrightarrow{OO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# 2.1.2. - Indépendants de leur point de départ

**Définition 41 (Un vecteur à partir de ses deux extrémités).**

Pour deux points $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le couple de valeurs $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'écrit donc : $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{\imath} + (b_2 - a_2)\vec{\jmath}$.




Remarque : Puisqu'un vecteur est une **mesure de déplacement**, il est égal au vecteur $\overrightarrow{OM}$ où $M$ est le point $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 14. *Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec :*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

□

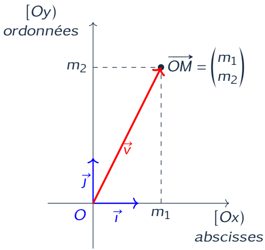
# 2.1.2. - Interprétation géométrique

## Définition 42 (Description d'un vecteur).

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut se décrire à l'aide :

1. d'une **direction** : celle de la droite $(OM)$
2. d'un **sens** : celui allant de $O$ vers $M$
3. d'une **longueur** : celle du segment $[OM]$

Puisqu'il exprime un déplacement, il n'est pas nécessaire d'en exprimer les points d'extrémités et on le notera plus généralement $\vec{v}$.



# 2.1.3. - Égalité de deux vecteurs

## Théorème 43 (Égalité de deux vecteurs).

*Deux vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *sont égaux*

$\iff$ *leurs coordonnées sont égales :*

$$\begin{cases} u_1 = v_1 & \text{(égalité des abscisses)} \\ u_2 = v_2 & \text{(égalité des ordonnées)} \end{cases}$$

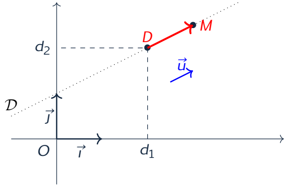
$\iff$ *leur direction, leur sens et leur longueur sont égaux.*

**Remarque** : Deux vecteurs sont de même direction s'ils sont portés par (ou s'ils dirigent) des droites parallèles.

# 2.1.4. - Vecteurs colinéaires

**Définition 44 (Vecteurs colinéaires).**

Des vecteurs sont **colinéaires** s'ils sont de même direction .




**Définition 45 (Notion de produit externe).**

Soit un vecteur $\vec{v}$ de longueur $L_v$. Un vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ s'écrit $\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}$ où $\lambda$ est un réel. La longueur de $\vec{u}$, notée $L_u$, est : $\boxed{L_u = |\lambda| L_v}$. L'opération "$\cdot$" s'appelle un **produit externe** (ou multiplication externe).

Exercice 15. *Parmi les vecteurs suivants, dire lesquels sont colinéaires :*

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

# 2.1.5. - Produit externe en 2D

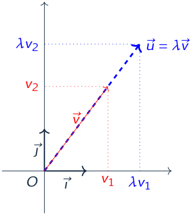
## Définition 46 (Produit externe .).

Dans le plan 2D, le résultat du **produit externe** du réel $\lambda$ et du vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}$ qui :

- est colinéaire à $\vec{v}$;
- dont la longueur est celle de $\vec{v}$ multipliée par $|\lambda|$;
- et dont le sens est celui de $\vec{v}$ si $\lambda > 0$ et est opposé à $\vec{v}$ si $\lambda < 0$.

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont :

$\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}}$ ; le nombre $\lambda$ s'appelle un **scalaire.**




**Remarques :**

- Le produit étire la longueur d'un vecteur si $|\lambda| > 1$ et la contracte si $0 < |\lambda| < 1$.

# 2.1.5. - Propriétés du produit externe

## Propriété 47 (Propriétés de "$\cdot$").

*Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs et $\lambda$ un réel.*

- *Si $\lambda \neq 0$, $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \dfrac{1}{\lambda} \cdot \vec{u}$*
- *Si $\lambda = 0$, alors $\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ (même si $\vec{v}$ n'est pas $\vec{0}$).*

## Propriété 48 (Équation paramétrique de droite).

*Une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ passant par le point $D$ est l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{DM}$ est colinéaire à $\vec{u}$ :*

$$\boxed{\mathcal{D} = \left\{ M \middle/ \overrightarrow{DM} = \lambda \cdot \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}.$$

# 2.1.5. - Exercices

**Exercice 16.** *Équation de droite* : donner l'équation paramétrique de la droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ avec

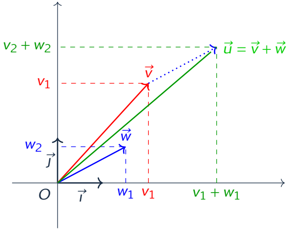
1. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

# 2.1.5. - Addition en 2D

**Définition 49 (Addition +).**

Dans le plan 2D, le résultat de la somme des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\boxed{\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}}$ dont les coordonnées sont : $\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}}$.



# 2.1.5. - Combinaisons linéaires

## Définition 50 (Combinaisons linéaires).

Étant donnés $m$ vecteurs (ayant chacun 2 coordonnées), notés $\vec{v_j}$ avec $j$ variant de 1 à $m$ et $m$ réels, notés $\lambda_j$ avec $j$ variant de 1 à $m$, le vecteur

$$\boxed{\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j}$$

est appelé **combinaison linéaire** (CL) des vecteurs $\vec{v_j}$ et des réels $\lambda_j$.

➔ Exercice 17. *Des CL :* $\vec{v} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2} + 3\vec{v_3}$ est une combinaison linéaire de $m = 3$ vecteurs avec les scalaires $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = 3$; quelles sont les coordonnées de $\vec{v}$ lorsque $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$? □

# 2.1.6. - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

## Définition 51 (Espace des vecteurs $\mathbb{R}^2$).

L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ d'abscisse $v_1$ et d'ordonnée $v_2$ dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ forme l'**espace (ensemble) de vecteurs** $\mathbb{R}^2$ :
$\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} / v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

## Définition 52 (Espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$).

L'espace de vecteurs $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition entre vecteurs et du produit externe entre un réel et un vecteur définis précédemment, définit l'**espace vectoriel** noté $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

# 2.1.6. - Stabilité et dimension de $\mathbb{R}^2$

## Théorème 53 (Stabilité de $\mathbb{R}^2$).

*Dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, .)$, toute* ***combinaison linéaire*** *de vecteurs de l'espace est un vecteur de l'espace : on dit que l'espace est stable pour l'addition et la multiplication.*

**Remarque** : $\mathbb{R}^2$ est un espace à 2 dimensions (2 coordonnées par vecteurs, 2 directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ pour décrire un vecteur).

# 2.1.7. - Droites dans $\mathbb{R}^2$

## Définition 54 (Équations de droite dans $\mathbb{R}^2$).

Dans $\mathbb{R}^2$, la droite passant par un point $D$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble de points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan dont les coordonnées sont *contraintes* par **une** relation. Cette relation est soit :

- une **équation cartésienne** de la forme : $ax + by + c = 0$ avec $a$, $b$, et $c$ trois coefficients réels et $\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$.
- une **équation paramétrique** de la forme $\overrightarrow{DM} = \lambda \vec{u}$ avec $\lambda$ un réel associé de manière unique à $x$ et $y$.

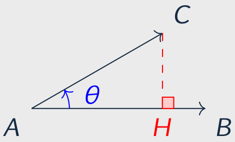
➔ Exercice 18. *Équation de droite* : donner l'équation de la droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ avec

1. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

□

# 2.1.8. - Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$

## Rappel : Projection orthogonale d'un vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$




Le projeté orthogonal de $C$ sur $(AB)$ est $H$ . Il définit le **produit scalaire** de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$, noté $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle$, par la relation :

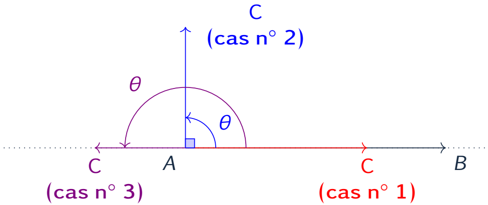
$$\boxed{\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = \overline{AH}.\overline{AB} = AC.AB.\cos(\theta)}$$ avec :

- $\overline{AH}$ (resp. $\overline{AB}$) la distance algébrique (signée) entre $A$ et $H$ (resp. $B$)
- $AC$ (resp. $AB$) la distance géométrique (non signée) entre $A$ et $C$ (resp. $B$)
- $\theta$, l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

# 2.1.8. - Une mesure d'alignement

Le produit scalaire de deux vecteurs $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AC.AB.\cos(\theta)$ est un nombre réel, mesurant à la fois ① l'**alignement** de deux vecteurs et ② l'**angle** qui les séparent .
Il s'interprète dans les cas suivants de la sorte :

1. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec $C$ et $B$ du "même coté" de $A$ alors $\theta = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AC.AB$ est une quantité positive (**alignement**).
2. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires avec $C$ et $B$ chacun d'un côté de $A$ alors $\theta = \pi$ et $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = -AC.AB$ (**alignement opposé**).
3. Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont **orthogonaux** alors $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0$.



# 2.1.8. - Produit scalaire canonique

**Définition 55 (Produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$).**

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ définis par leurs coordonnées (① abscisses $u_1$ et $v_1$ et ② ordonnées $u_2$ et $v_2$) peut se calculer avec : $\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2}$. Il est alors appelé **produit scalaire canonique.**

# 2.1.8. - Vecteur normal

## Définition 56 (Vecteurs orthogonaux).

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

**Exercice 19.** *Parmi les vecteurs suivants, dire lesquels sont orthogonaux :*

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

## Définition 57 (Vecteur normal).

Si $\vec{u}$ est orthogonal aux vecteurx directeurs d'une droite, on dit qu'il est normale à cette droite.

**Exercice 20.** *Équation de droite :* donner l'équation de la droite passant par le point $A$ et de vecteur normal $\vec{u}$ avec

1. $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ \dots \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} -1 \\ \dots \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix}$

# 2.1.9. - Norme dans $\mathbb{R}^2$

Le produit scalaire de deux vecteurs $\left\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AC.AB.\cos(\theta)$ permet également de mesurer la longueur d'un vecteur :

**Démonstration.**

Lorsque $C = B$ avec donc un angle $\theta = 0$, on obtient :
$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = AB.AB = AB^2$, donc $AB = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \right\rangle}$. □

**Définition 58 (Norme).**

La **norme** d'un vecteur $\vec{v}$, notée $\|\vec{v}\|$, mesurant sa longueur $L_v$ (autrement dit la **distance** non signée entre ses deux extrémités), se définit à partir du produit scalaire par : $\boxed{L_v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}}$.

⚠ **Remarque** : De tout vecteur $\vec{v}$ non nul peut être déduit un **vecteur unitaire** $\vec{u}$ (c'est à dire de longueur 1) en prenant : $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$.

# 2.1.9. - Norme canonique dans $\mathbb{R}^2$

## Théorème 59 (Norme associée au produit scalaire canonique).

*Pour un vecteur* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ *défini par ses coordonnées dans le repère orthonormé* $(0,\vec{i},\vec{j})$*, la norme de* $\vec{v}$ *(basée sur le produit scalaire canonique) se calcule avec :* $\boxed{\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

## Définition 60 (Espace vectoriel euclidien).

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit **scalaire** canonique (et de sa **norme**) est un **espace vectoriel euclidien**.

# 2.1.9. - Exercices

**Exercice 21.** *Équations de droite* :
Dans le repère $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$,

① Tracer puis donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation cartésienne $2x+3y+5=0$.

② Soient le point $A=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$. Déterminer l'équation cartésienne des droites suivantes :

1. $\mathcal{D}_2$ : droite parallèle à $\mathcal{D}_1$ et passant par $A$
2. $\mathcal{D}_3$ : droite passant par $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$
3. $\mathcal{D}_4$ : droite passant par $A$ et orthogonale à la direction $\vec{u}$.

□

# 2.1.9. - Exercices

**Exercice 22.** *Propriété du triangle :* Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les points $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On construit ensuite les points $I$ et $J$ tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

① Tracer le triangle $ABC$ et positionner les points $I$ et $J$.

② Donner les coordonnées de $I$ et de $J$.

③ Donner les longueurs $AI$ et $AJ$.

④ Déterminer l'équation cartésienne de la droite $(IJ)$.

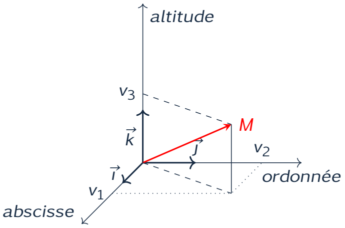
⑤ Démontrer que la droite $(IJ)$ passe par le milieu du segment $[BC]$.

□

# 2.2.1. - L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$

## Définition 61 (L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$).

L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ avec $v_1, v_2, v_3$ trois nombres réels forme l'espace vectoriel noté $\mathbb{R}^3$. $\vec{v}$ s'interprète comme un déplacement de $O$ vers un point $M$ dont les coordonnées dans le repère cartésien orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ sont : $v_1$ pour abscisse, $v_2$ pour ordonnée et $v_3$ pour altitude, avec : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{v} = v_1\vec{\imath} + v_2\vec{\jmath} + v_3\vec{k}}$. $\vec{v}$ se décrit toujours comme une direction, un sens et une longueur.




⚠ **Remarque** : $\mathbb{R}^3$ définit l'espace 3D, donc un **espace de dimension 3** : 3 coordonnées/3 directions par vecteur pour décrire un déplacement.

# 2.2.1. - Vecteurs de l'espace 3D

## Cas particulier

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Théorème 62 (Égalité de deux vecteurs).

*Deux vecteurs* $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *sont égaux*

$\iff$ *leurs coordonnées sont égales :*

$$\begin{cases} u_1 = v_1 & \text{(égalité des abscisses)} \\ u_2 = v_2 & \text{(égalité des ordonnées)} \\ u_3 = v_3 & \text{(égalité des altitudes)} \end{cases}$$

$\iff$ *leur direction, leur sens et leur longueur sont égaux.*

# 2.2.2. - Opérations vectorielles

## Définition 63 (Addition "+").

Pour deux vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur somme est

$$\boxed{\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}}.$$

## Définition 64 (Produit externe "·").

Pour un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda$ un nombre réel, $\boxed{\vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ de coordonnées $\boxed{\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \end{pmatrix}}$ (de même direction mais de longueur et de sens modifié par $\lambda$).

# 2.2.2. - Combinaisons linéaires

## Définition 65 (Combinaisons linéaires).

Étant donnés ① $m$ vecteurs (ayant chacun 3 coordonnées), notés $\vec{v}_j$ avec $j$ variant de 1 à $m$, et ② $m$ réels, notés $\lambda_i$ avec $j$ variant de 1 à $m$, le vecteur $\boxed{\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \ldots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j}$ est appelé **combinaison linéaire** (CL) des vecteurs $\vec{v}_j$ et des réels $\lambda_j$.

➔ Exercice 23. *Une CL* : Quel est le vecteur résultat de la combinaison linéaire $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$ avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ? □

# 2.2.3. - Produit scalaire et norme dans $\mathbb{R}^3$

## Définition 66 (Produit scalaire canonique).

Soient deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ définis par leurs coordonnées dans le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient $L_u$ et $L_v$ leurs longueurs respectives et $\theta$ l'angle qui les sépare. On définit :

- le produit scalaire canonique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par : $\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$ ; ce nombre mesure l'**alignement** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- la norme associée par : $\boxed{\left\| \vec{v} \right\| = L_v = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} v_i^2} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ ; ce nombre mesure la **longueur** de $\vec{v}$.

# 2.2.4. - Exercices

**Exercice 24.** *Calculs de produit scalaire et de norme :* On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Calculer, à l'aide du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$, $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, $\|\vec{u}+\vec{w}\|$.

□

**Exercice 25.** : Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, montrer que le triangle ayant pour sommets $A = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est rectangle isocèle.

□

# 2.3.1. - Généralisation à la nD

On peut facilement généraliser les vecteurs de la 2D et de la 3D à la nD : un vecteur $\vec{v}$ est un **n-uplet ordonné** de $n$ coordonnées $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où les $v_i$ sont des nombres réels.

Se généralisent aussi l'addition, la multiplication externe et la dimension. Ces opérations servent à former l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$.

Se généralisent enfin le produit scalaire (mesure d'alignement) et la norme (mesure de distance) qui font de $\mathbb{R}^n$ un espace vectoriel euclidien.

# 2.3.2. - Généralisation à la nD ♥

| | | En 2D | En nD ($n \geq 1$) |
|---|---|---|---|
| Espace | **espace vectoriel** | $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ | $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ |
| | **Vecteurs** | $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ | $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ |
| | **Scalaire** | $\lambda \in \mathbb{R}$ | $\lambda \in \mathbb{R}$ |
| Opérations | **Addition** | $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$ |
| | **Multiplication** | $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$ | $\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$ |
| | **CL de *m* vecteurs** | $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j$ | |
| | **Égalité** | $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$ | $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ \dots \\ u_n = v_n \end{cases}$ |
| Alignement | **Produit scalaire** | $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^{2} u_i v_i$ | $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ |
| | **Norme** | $\lVert\vec{u}\rVert = L_u = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} u_i^2}$ | $\lVert\vec{u}\rVert = L_u = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}$ |

# 2.3.3. - Quelques interprétations de la nD

## Des exemples simples

Un vecteur nD est donc la donnée de $n$ informations numériques ordonnées, repérées en composantes.

- $n = 4$ : espace **spatio-temporel** avec abscisse, ordonnée, altitude et temps.
- $n = 3$ : espace des couleurs avec leur niveau de rouge, vert, bleu.
- $n = 2$ : les 2 coefficients $(a_0, a_1)$ d'un polynôme de la forme $a_0 + a_1 X$.

## Domaines d'application

- (Télé)communications (modulation/démodulation) : se repérer sur les porteuses
- Big Data : croiser des données en groupe d'intérêt
- Statistiques : par ex. profil moyen d'un étudiant validant son BUT

# 2.4. - CL : en route vers les matrices

Les CL $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j$ impliquent une **famille** de $m$ vecteurs (ordonnés par l'indice $j$), chacun défini par $n$ coordonnées :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ \vdots \\ v_{n,1} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \\ \vdots \\ v_{n,2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \vec{v}_m = \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ \vdots \\ v_{n,m} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \textit{abscisse} \\ \textit{ordonnée} \\ \vdots \\ \phantom{x} \end{array}$$

Cette famille peut se manipuler par le biais d'un tableau appelé **matrice** dont les $m$ colonnes sont les $n$ coordonnées des $m$ vecteurs :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & \vec{v}_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \ldots & v_{n,m} \end{pmatrix} \end{array}$$

# 3. - Plan

# 3.1.1. - Qu'est-ce qu'une matrice ?

## Définition 67 (Matrice à $n$ lignes et $m$ colonnes).

Une matrice $A$ de $n$ lignes et $m$ colonnes est définie par $n \times m$ coefficients, réels ou complexes, identifiés par deux indices (dits de ligne et de colonne) rangé dans un *"tableau"* : le coefficient $a_{i,j}$ désigne le coefficient de $A$ à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La matrice $A$ peut alors être représentée par :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \overleftrightarrow{\hspace{6em} m \hspace{6em}} \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,m} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,m}
\end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ n \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

# 3.1.1. - Qu'est-ce qu'une matrice ?

**Remarques :**

- De façon plus compacte, la matrice $A$ est notée : $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$.
- Les pointillés traduisent une suite logique dans les coefficients et leurs indices.
- En algèbre linéaire, chaque colonne de la matrice représente les $n$ coordonnées d'un vecteur.

## Exemple 68 (Une matrice).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ est une matrice ayant $n = 2$ lignes et $m = 4$ colonnes donc avec 8 coefficients : $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 2$, $a_{1,3} = 3$, $a_{1,4} = 4$, $a_{2,1} = 5$, $a_{2,2} = 6$, $a_{2,3} = 7$ et $a_{2,4} = 8$.
Dans un contexte d'algèbre linéaire, $A$ désigne la famille de 4 vecteurs du plan 2D, donnés par leurs coordonnées : $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

# 3.1.1. - Ensemble des matrices

Bien que les coefficients des matrices puissent être complexes, on se limitera dans le cadre de ce cours aux coefficients réels.

⚠ **Remarque** : L'ensemble des matrices de $n$ lignes et $m$ colonnes à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

## Définition 69 (Matrice nulle).

Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont nuls. On la note $\boldsymbol{O}_{n\times m}$ lorsqu'elle a $n$ lignes et $m$ colonnes :

$$\boldsymbol{O}_{n\times m} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}^{m} n$$

# 3.1.2. - Matrices carrées

## Définition 70 (Matrice carrée).

Une **matrice carrée** est une matrice ayant autant de lignes que de colonnes (autrement dit $n = m$). On dit qu'elle est de **taille** $n$.

$$A = \begin{array}{cc} \overset{n}{\longleftrightarrow} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & n \end{array}$$

*diagonale*

Elle possède une *diagonale* formée par les coefficients $a_{i,i}$ avec $i$ variant de 1 à $n$ .

**Remarque** : L'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients réels est $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, noté également (pour simplifier) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

# 3.1.2. - Matrices diagonales

## Définition 71 (Matrice diagonale).

Une **matrice diagonale** $A$ est une matrice carrée de taille $n$ dont tous les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls, sauf ceux de la diagonale (les $a_{i,i}$ avec $i$ variant de 1 à $n$). Elle prend la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est diagonale $\Longleftrightarrow \forall i \neq j, a_{i,j} = 0$

# 3.1.2. - Matrices identités

## Définition 72 (Matrice identité).

La **matrice identité de taille** $n$ est une matrice carrée diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 1. On la note :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice identité $\iff a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

# 3.1.2. - Matrices triangulaires

## Définition 73 (Matrices triangulaires supérieures).

On appelle **matrice triangulaire supérieure** une matrice carrée $A$ dont tous les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i > j$ (donc *au dessous de la diagonale*) sont nuls, soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure $\Longleftrightarrow a_{i,j} = 0$ si $i < j$

# 3.1.2. - Matrices triangulaires

## Définition 74 (Matrices triangulaires inférieures).

On appelle **matrice triangulaire inférieure** une matrice carrée $A$ dont tous les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i < j$ (donc *en dessus de la diagonale*) sont nuls, soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire inférieur $\Longleftrightarrow a_{i,j} = 0$ si $i > j$

**Remarque :** Une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.

# 3.1.2. - Vecteurs lignes et vecteurs colonnes

## Définitions 75 (Vecteur ligne et vecteur colonne).

On appelle :

- **vecteur ligne** : une matrice possédant une seule ligne ($n = 1$) et plusieurs ($m$) colonnes, soit : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \end{pmatrix}$
- **vecteur colonne** : une matrice possédant plusieurs ($n$) lignes et une seule colonne ($m = 1$), soit : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$

# 3.1.2. - Symétrie des matrices

## Définition 76 (Matrice carrée symétrique).

Une matrice carrée $A$ est **symétrique** si ses coefficients vérifient $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i$ et $j$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{1,n} & \cdots & & a_{n-1,n} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique lorsque $\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = a_{j,i}$

# 3.1.2. - Symétrie des matrices

## Définition 77 (Matrice carrée antisymétrique).

Une matrice carrée $A$ est **antisymétrique** si ses coefficients vérifient $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout $i$ et $j$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ -a_{1,n} & \cdots & & -a_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix}$$

🏛 $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est antisymétrique lorsque $\forall 1 \leq i,j \leq n, a_{i,j} = -a_{j,i}$

# 3.1.2. - Des exemples

## Exemple 78 (Des exemples des matrices).

| Matrice | $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ | $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
|---|---|---|---|
| Dimension | $2 \times 2$ | $3 \times 2$ | $3 \times 3$ |
| Carrée | ✓ | ✗ | ✓ |
| Diagonale | ✗ | ✗ | ✓ |
| Triang. supérieure | ✓ | ✗ | ✓ |
| Triang. inférieure | ✗ | ✗ | ✓ |
| Symétrique | ✗ | ✗ | ✓ |

# 3.1.3. - Égalité de matrices

## Théorème 79 (Égalité de matrices).

*Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times m$. Alors $A = B$ si et seulement si, pour tous indices $i$ et $j$, $a_{i,j} = b_{i,j}$.*

## Exemple 80 (Égalité de matrices).

- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1$ et $b = 2$ et $c = 3$ et $d = 4$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}_2 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

# 3.1.3. - Transposée d'une matrice

## Définition 81 (Transposée d'une matrice).

Soit une matrice $A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$ de taille $n \times m$.

La **transposée** de $A$, notée $A^T$, est la matrice de taille $m \times n$ définie par : $A^T = (a_{j,i}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$.

⚠ **Remarque** : La transposition transforme les colonnes d'une matrice $A$ en lignes de $A^T$ ; elle transforme donc un vecteur colonne en vecteur ligne (et réciproquement).

# 3.1.3. - Exercices

**Exercice 26. :** Calculer la transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

□

# 3.1.3. - Addition

## Définition 82 (Addition de deux matrices).

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de taille $n \times m$. La somme de $A$ et $B$ est la matrice de taille $n \times m$ :

$$\boxed{A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,m} + b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,m} + b_{n,m} \end{pmatrix}}.$$

⚠ **Remarque** : l'addition matricielle généralise l'addition vectorielle en travaillant colonne par colonne.

## Exemple 83.

La somme de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ est :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+2 \\ 3-1 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

# 3.1.3. - Multiplication par un scalaire

## Définition 84 (Multiplication (externe) d'une matrice par un scalaire).

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et $\lambda$ un réel ou un complexe. Le produit externe de $A$ par $\lambda$ est la matrice $B$ de taille $n \times m$ valant

$$\boxed{B = \lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,m} \end{pmatrix}}.$$

## Exemple 85.

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 2$, on obtient $2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times 2 \\ 2 \times 3 & 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

# 3.1.3. - Exercices

**Exercice 27.** *Factoriser les matrices suivantes :*
$A = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^4 \\ 2^5 & 2^8 \end{pmatrix}$ et $B = A + 4 \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. □

**Exercice 28.** *Transposition :* Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$. Montrer que $A + A^T$ est une matrice symétrique et que $A - A^T$ est une matrice antisymétrique. On pourra illustrer la démonstration avec la matrice
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. □

# 3.1.3. - Multiplication d'une matrice et d'un vecteur

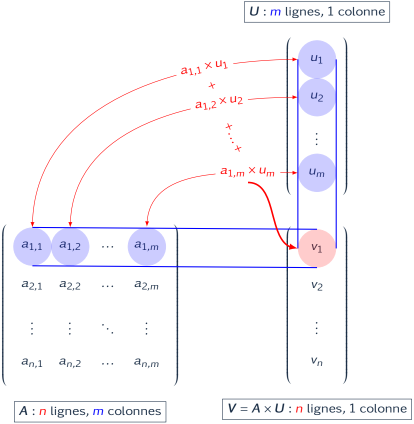
## Définition 86 (Multiplication d'une matrice et d'un vecteur).

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et $\boldsymbol{U} = (u_i)$ un vecteur colonne de $m$ lignes. Le produit de $A$ par le vecteur $\boldsymbol{U}$, noté $\boxed{A \times \boldsymbol{U}}$ ou $\boxed{A\boldsymbol{U}}$, est le **vecteur colonne** $\boldsymbol{V} = (v_i)$ de $n$ lignes dont les coefficients pour tout indice de ligne $i$ sont : $\boxed{v_i = \sum_{p=1}^{m} a_{i,p} u_p}$.

**Remarques :**

- Le produit n'existe que si les dimensions de $A$ et de $\boldsymbol{U}$ concordent : il faut que le nombre de colonnes de $A$ soit égal au nombre de lignes de $\boldsymbol{U}$
- Le produit entre une matrice et un vecteur a **un sens d'écriture** : $\boldsymbol{U}A$ n'existe pas (toujours)

# 3.1.3. - Calcul de $AU$



# 3.1.3. - Exemple

## Exemple 87 (Produit entre une matrice et un vecteur).

Le produit entre la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (de taille $2 \times 3$) et le vecteur $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (de taille $3 \times 1$) est le vecteur $V$ de taille $2 \times 1$ dont les coefficients sont :

- $v_1 = \sum_{p=1}^{3} a_{1,p} u_p = a_{1,1} u_1 + a_{1,2} u_2 + a_{1,3} u_3 = 1.1 + 2.(-1) + 3.0 = -1$
- $v_2 = \sum_{p=1}^{3} a_{2,p} u_p = a_{2,1} u_1 + a_{2,2} u_2 + a_{2,3} u_3 = 4.1 + 5.(-1) + 6.0 = -1$

Donc $V = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

# 3.1.3. - Application : Combinaison linéaire

## Écriture matricielle d'une combinaison linéaire

Soient $m$ de vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ ayant chacun $n$ coordonnées (notées $v_{i,j}$ pour le vecteur $\vec{v}_i$) et $m$ réels $\lambda_j$. La combinaison linéaire $\boxed{\vec{v} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \vec{v}_j}$ est un vecteur dont les $n$ coordonnées sont données par le vecteur colonne $\boxed{V = AU}$ avec :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & & \vec{v}_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \cdots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \cdots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \cdots & v_{n,m} \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et } U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

# 3.1.3. - Application : produit scalaire

## Écriture matricielle d'un produit scalaire

Soient 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par leurs coordonnées $\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors le produit scalaire canonique de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ se calcule avec : $\boxed{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{V}}$ où $^T$ désigne l'opération de transposition.

⚠ **Remarque** : Le résultat de $\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{V}$ est factuellement une **matrice** ne contenant qu'un terme ; par souci de simplicité, il est vu comme un nombre réel (ici le résultat du produit scalaire).

# 3.1.3. - Application : norme

## Écriture matricielle de la norme

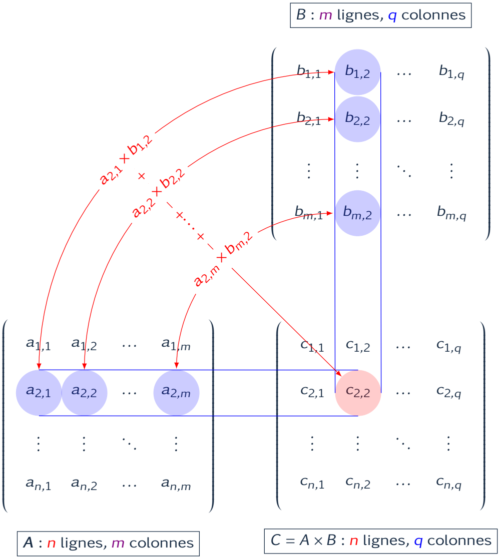
Soit un vecteur $\vec{v}$ défini par ses coordonnées $\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Alors la norme de $\vec{v}$ (associée au produit scalaire canonique) se calcule avec : $\boxed{\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{V}}}$ où $^T$ désigne l'opération de transposition.

# 3.1.3. - Multiplication de matrices

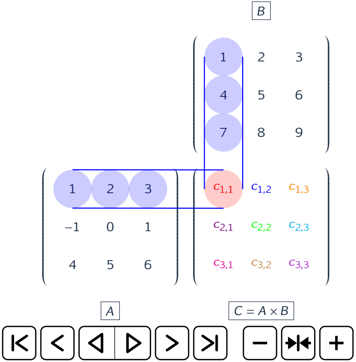
## Définition 88 (Multiplication de deux matrices).

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times m$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de taille $m \times q$. Alors le produit de $A$ et $B$, noté $\boxed{A \times B}$ ou $\boxed{AB}$, est la matrice $C = (c_{i,k})$ de $n$ lignes et $q$ colonnes telle que pour tout indice de ligne *in* et tout indice de colonne $k$ : $\boxed{c_{i,k} = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} b_{j,k}}$.

# 3.1.3. - Multiplication de matrices



# 3.1.3. - Exemple




**Exemple 89 (Produit de** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **par** $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$**).**

- $c_{1,1} = 1 \times 1 + 2 \times 4 + 3 \times 7 = 30$
- $c_{1,2} = 1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 8 = 36$
- $c_{1,3} = 1 \times 3 + 2 \times 6 + 3 \times 9 = 42$
- $c_{2,1} = (-1) \times 1 + 0 \times 4 + 1 \times 7 = 6$
- $c_{2,2} = (-1) \times 2 + 0 \times 5 + 1 \times 8 = 6$
- $c_{2,3} = (-1) \times 3 + 0 \times 6 + 1 \times 9 = 6$
- $c_{3,1} = 4 \times 1 + 5 \times 4 + 6 \times 7 = 66$
- $c_{3,2} = 4 \times 2 + 5 \times 5 + 6 \times 8 = 81$

# 3.1.3. - Exercices

**Exercice 29.** *Produit matriciel* :

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits $AB$, $BA$, $AC$, $CA$, $BC$ et $CB$, lorsqu'ils ont un sens. □

**Exercice 30.** *Commutativité* :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer, après avoir justifié leur existence les matrices $AB$ et $BA$. Qu'en déduisez-vous ?

□

# 3.1.3. - Exercices

**Exercice 31.** *Produit matriciel* :

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

① Calculer, lorsque cela est possible, les produits suivants : $AB$, $BA$, $AC$, $CA$, $BC$, $CB$.

② Calculer, après avoir justifié leur existence, les matrices suivantes : $A + 2CB$, $A(CB)$, $(AC)B$, $C(BA^2)$.

□

# 3.1.3. - Exercices

**Exercice 32.** *Matrice (DS UFA 2011)* : Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$ deux matrices définies par les paramètres réels $a$, $b$, $c$ et $d$. Les trois questions suivantes sont indépendantes.

① Calculer $AB$ puis $BA$. Donner toutes les valeur(s) de $a$, $b$, $c$ et $d$ pour lesquelles on a $AB = BA$ ?

② Calculer $(A+B)^2$, puis $A^2 + 2AB + B^2$. Qu'en concluez-vous ? Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?

# 3.1.3. - Puissances de matrices

## Définition 90 (Puissance entière de matrice carrée de taille $n$).

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$. On définit :

- $A$ à la puissance 0 par : $\boxed{A^0 = I_n}$, où $I_n$ est la matrice identité ;
- $A$ à la puissance 1 par : $\boxed{A^1 = A}$;
- $A$ à la puissance $k$ avec $k$ un entier naturel non nul, par $\boxed{A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}}$.

# 3.1.3. - Exercice

EXERCICE 33. *Puissance d'une matrice :* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2, A^3, A^4$ puis $A^n$ pour $n$ entier quelconque.

□

# 3.1.3. - Exercices : Matrices diagonales

**Exercice 34.** *Matrices diagonales :* Soient $D_n$ et $\Delta_n$ les matrices $n \times n$ définies par : $D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ et $\Delta_n = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_n \end{pmatrix}$.

① Ces matrices sont-elles : carrée ? triangulaire supérieure ? triangulaire inférieure ? diagonale ? symétrique ?

② Calculer, après avoir justifié leur existence et pour deux entiers $n$ et $k$ quelconques, les matrices :

❶ $D_2^2, D_2^3, D_2^k$ ❷ $D_3^2, D_3^3, D_3^k$ ❸ $D_n^2, D_n^3, D_n^k$

③ Calculer, après avoir justifié leur existence, les matrices :

❶ $D_2\Delta_2, \Delta_2 D_2$ ❷ $D_3\Delta_3, \Delta_3 D_3$ ❸ $D_n\Delta_n, \Delta_n D_n$

Qu'en déduisez-vous ?

# 3.1.3. - Matrice inverse

## Définition 91 (Matrice inverse).

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$. On dit que $A$ est **inversible** s'il existe une matrice appelée **inverse** et notée $\boxed{A^{-1}}$ (carrée de taille $n$) telle que $\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$.

## Théorème 92 (Unicité de l'inverse).

*L'inverse d'une matrice est unique.*

# 3.1.3. - Exercices

**Exercice 35.** *Inverse d'une matrice* $2 \times 2$ :
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice $2 \times 2$ dont les coefficients $a,b,c,d$ sont réels et tels que $ad - bc \neq 0$. Démontrer que la matrice inverse de $A$ est
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
□

**Exercice 36.** : $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'inverse de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ? □

**Exercice 37.** *Inverse d'une matrice diagonale* : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont non nuls. Montrer que $A^{-1} = \mathbf{diag}(\frac{1}{a_{1,1}}, \frac{1}{a_{2,2}}, \dots, \frac{1}{a_{n,n}})$.
□

# 3.1.3. - Exercices

**Exercice 38.** *Inverser une matrice sans (trop) de calcul :*

① Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$. En déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.

② Soit $A$ une matrice telle que $A^3 - A = 4I_3$. En déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.

③ Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 + A = 2I_2$. En déduire que $A$ est inversible et calculer $A^{-1}$.

□

# 3.1.4. - Propriétés de la multiplication

## Théorème 93 (Associativité de la multiplication matricielle).

*Soient $A, B, C$ trois matrices. Alors* $\boxed{A(BC) = (AB)C}$.

## La multiplication matricielle n'est pas commutative

$AB$ n'est quasiment jamais égal à $BA$. Plus précisément :

- Si $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$, alors $AB$ existe et appartient à $\mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{R})$, mais $BA$ n'existe pas (sauf si $n = q$)!!!
- Si $n = q$, $AB \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathcal{M}_{q\times n}(\mathbb{R})$ mais les matrices sont de tailles différentes si $n \neq p$!!!
- Enfin, même si $n = p = q$, le produit ne commute pas forcément!

# 3.1.4. - Propriétés des opérateurs

Soient $A,B$ deux matrices de taille $n \times m$, $C$ et $D$ deux matrices de taille $m \times q$ et $\lambda$, $\mu$ deux nombres réels.

## Théorème 94 (Propriétés de l'addition et de la multiplication externe).

1. *Commutativité de l'addition et de la multiplication externe :*
   ① $A + B = B + A$
   ② $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$
2. *Associativité de l'addition et de la multiplication externe :*
   ① $A + (B + C) = (A + B) + C.$
   ② $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A$
   ③ $\lambda \cdot (AB) = (\lambda \cdot A)B = A(\lambda \cdot B)$
3. *Distributivité de la multiplication sur l'addition :*
   ① $A(C + D) = AC + AD$
   ② $(A + B)C = AC + BC$
   ③ $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
   ④ $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

# 3.1.4. - Exercices

**Exercice 39.** *Commutant :* Soient $a$ et $b$ des réels non nuls et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A$, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

□

**Exercice 40.** *Propriétés des opérations sur les matrices :* Montrer que :

① l'addition de matrices est une opération associative et commutative,

② la mutliplication de matrices est une opération associative mais pas toujours commutative,

③ la multiplication est distributive sur l'addition,

④ pour toute matrice $A$ de taille $n \times p$, $AI_p = I_nA = A$.

□

# 3.1.4. - Propriétés de la transposition

## Théorème 95 (Propriétés de la transposée).

*Soient $A$ et $B$ deux matrices de taille $n \times m$ et $C$ une matrice de taille $m \times p$. Alors :*

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AC)^T = C^T A^T$

EXERCICE 41. *Démonstration autour de la transposition* :
Soient $A$ et $B$ deux matrices. Soit $\lambda$ un nombre réel. Montrer que :

❶ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ❷ $(A+B)^T = A^T + B^T$ ❸ $(AB)^T = B^T A^T$

# 3.1.4. - Propriétés des matrices identités et des matrices nulles

Soient $A$ une matrice de taille $n \times m$, et $q$ un nombre entier.

## Théorème 96 (Propriétés des matrices identités).

- $\boldsymbol{I}$ *est l'**élément neutre de la multiplication** :* $\boldsymbol{I}_n A = A$ *et* $A\boldsymbol{I}_m = A$
- *pour tout entier* $k$, $(\boldsymbol{I}_n)^k = \boldsymbol{I}_n$

## Théorème 97 (Propriétés des matrices nulles).

- $\mathbf{0}$ *est l'**élément neutre de l'addition** :* $\mathbf{0}_{n\times m} + A = A + \mathbf{0}_{n\times m} = A$
- $\mathbf{0}_{q\times n} A = \mathbf{0}_{q\times m}$ *et* $A\mathbf{0}_{m\times q} = \mathbf{0}_{n\times q}$
- *pour tout entier* $k > 0$, $(\mathbf{0}_n)^k = \mathbf{0}_n$.

# 3.1.4. - Propriété des matrices inverses

**Théorème 98 (Propriété).**

*Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées inversibles de même taille. Alors* $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.

⚠ Remarque : Attention $\boxed{(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}}$

# 3.1.4. - Exercice

**Exercice 42.** *Annulateur :* On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $AB$ et $AC$. Que constate-t-on ?
La matrice $A$ peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = \mathbf{0}_3$.

# 3.2.1. - Définitions

## Définition 99 (Notation).

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de taille $n$ à coefficients réels. Le **déterminant de $A$** est un nombre réel **unique**, noté :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

⚠ **Remarque** : Dire que $\boxed{\det(A) = \det(B)}$ ne signifie pas forcément que $\boxed{A = B}$.

# 3.2.2. - Déterminant d'une matrice d'ordre 1

**Théorème 100 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1).**

*Soit $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 1. Alors :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$$

**Exemple 101 (Déterminant).**

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = 2$.

# 3.2.2. - Déterminant d'une matrice d'ordre 2

## Théorème 102 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2).

*Le déterminant d'une matrice carrée* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *d'ordre 2 est :*

$$\boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

## Exemple 103 (Une matrice carrée d'ordre 2).

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Alors $\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$.

Aide mnémotechnique $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$

# 3.2.2. - Exercice

**Exercice 43.** *Déterminants :* Calculer les déterminants suivants :

① $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ ② $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ ③ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ ④ $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

□

# 3.2.2. - Déterminant d'une matrice d'ordre 3

## Théorème 104 (Règle de Sarrus).

*Le déterminant d'une matrice carrée* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *d'ordre 3 est :*

$$\boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - (gec + ahf + dbi)$$

# 3.2.2. - Exercice

➔ EXERCICE 44. *Déterminants* : Calculer les déterminants suivants, en utilisant la méthode la plus judicieuse :

$$① \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad ② \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad ③ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad ④ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

□

# 3.2.2. - Cofacteur

## Définition 105 (Cofacteur).

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée. Le **cofacteur associé au coefficient** $a_{i,j}$, noté $\mathrm{cof}_{i,j}$, est le déterminant de la matrice $A_{i,j}$ obtenue en supprimant la ligne $i$ et la colonne $j$ de la matrice $A$, multiplié par $(-1)^{i+j}$ :

$$\boxed{\mathrm{cof}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}$$

# 3.2.2. - Développement suivant une colonne

**Théorème 106 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n$ avec développement suivant une colonne).**

*Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice à coefficients réels. Soit* $j$ *l'indice d'une colonne de* $A$*. Le déterminant de* $A$ *se calcule en* ***développant par rapport à la colonne*** $j$ *avec :*

$$\boxed{\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{cof}_{i,j}}$$

# 3.2.2. - Développement suivant une ligne

**Théorème 107 (Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n$ avec développement suivant une ligne).**

*Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ *une matrice à coefficients réels. Soit* $i$ *l'indice d'une ligne de* $A$*. Le déterminant de* $A$ *se calcule en* ***développant par rapport à la ligne*** $i$ *avec :*

$$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \operatorname{cof}_{i,j}}$$

# 3.2.2. - Exemple

**Exemple 108 (Déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$).**

Pour l'exemple, on choisit de développer suivant la 1ère ligne. Alors :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \times 1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,1})} + (-1)^{1+2} \times$$

$$2 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & \cancel{5} & 6 \\ 7 & \cancel{8} & 9 \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,2})} + (-1)^{1+3} \times 3 \times \underbrace{\begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 4 & 5 & \cancel{6} \\ 7 & 8 & \cancel{9} \end{vmatrix}}_{\det(A_{1,3})} =$$

$$+1 \times (5 \times 9 - 8 \times 6) - 2 \times (4 \times 9 - 7 \times 6) + 3 \times (4 \times 8 - 7 \times 5) = 0$$

# 3.2.2. - Exercice

**Exercice 45.** *Calculez le déterminant :* $d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & \pi & e & \frac{3}{17} \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

**Exercice 46.** *Calculer les déterminants suivants :*

1. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
2. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
3. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
4. $\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

# 3.2.2. - Exercice

**Exercice 47.** *Règle de Sarrus :* Démontrer la règle de Sarrus $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$ en utilisant le développement suivant une ligne ou une colonne du théorème 106. □

# 3.2.2. - Déterminant - cas particuliers

## Théorème 109 (Déterminant d'une matrice diagonale).

*Soit $A$ une matrice diagonale de taille $n$. Alors :*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

## Théorème 110 (Déterminant d'une matrice triangulaire).

*Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice triangulaire de taille $n$. Alors son déterminant est le produit des termes diagonaux :*

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

# 3.2.3. - Propriétés des déterminants

## Théorème 111 (Propriétés des déterminants).

1. *Multiplication par un scalaire : Soient $A$ une matrice carrée de taille n et $\lambda$ un réel. Alors :* $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)}$.
2. *Déterminant d'un produit de matrices : Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de taille n. Alors :* $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$.
3. *Déterminant d'une matrice transposée : Soit $A$ une matrice carrée de taille n. Alors :* $\boxed{\det(A^T) = \det(A)}$.

## Théorème 112 (Permutation de deux lignes ou de deux colonnes).

*Lorsqu'on permute deux lignes ou deux colonnes d'une matrice dont on calcule le déterminant, le déterminant est multiplié par* $\boxed{-1}$.

# 3.2.3. - Propriétés des déterminants

## Théorème 113 (Linéarité par rapport aux colonnes).

*Soient $\alpha, \beta$ deux réels. Lorsque la colonne $j$ d'une matrice s'exprime comme la combinaison linéaire de 2 vecteurs $(a_{i,j})$ et $(a'_{i,j})$, le calcul du déterminant peut être linéarisé par rapport à la colonne $j$ avec :*

$$\begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \alpha a_{1,j} + \beta a'_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \alpha a_{n,j} + \beta a'_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} = \alpha \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array} + \beta \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a'_{1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a'_{n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}$$

⚠ **Remarque :** Le théorème est également vrai pour les lignes de la matrice.

# 3.2.3. - Propriétés des déterminants

## Théorème 114 (Ajout d'une colonne).

*Dans le calcul du déterminant, ajouter une colonne $C_l$ (éventuellement) multipliée par un coefficient $\beta$, à une (autre) colonne $C_j$ ne change pas la valeur du déterminant :*

$$\begin{array}{c} \text{colonne } l \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,j}+\beta a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,j}+\beta a_{n,l} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ \text{colonne } j \end{array} = \begin{array}{c} \text{colonne } l \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\ \text{colonne } j \end{array}$$

⚠ **Remarque** : Le théorème est également vrai pour les lignes de la matrice.

## Lemme 115.

*Le déterminant d'une matrice qui contient deux lignes ou deux colonnes identiques est nul.*

# 3.2.3. - Exercice

➔ Exercice 48. *Déterminants :* Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer les déterminants des matrices $A^2$, $A^3$, $AB$, $AB^T$, $3A$ et $A - B$. □

➔ Exercice 49. *Déterminant d'une matrice triangulaire :* Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses termes diagonaux. □

# 3.2.3. - Exercice

**Exercice 50.** *Déterminant d'une matrice antidiagonale* :

Calculer le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

☐

**Exercice 51.** *Calcul* : Soient $a,b,c,d$ quatre réels. Calculer le déterminant des matrices suivantes en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$ :

① $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \end{pmatrix}$ ② $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{pmatrix}$

☐

# 3.2.4. - Matrice inverse

**Théorème 116 (Condition d'existence de l'inverse).**

*Soit $A$ une matrice carrée. $A$ est inversible si et seulement si* $\boxed{\det(A) \neq 0}$.

**Théorème 117 (Propriété).**

*Soit $A$ une matrice carrée inversible. Alors* $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$.

# 3.2.4. - Comatrice ou matrice des cofacteurs

## Définition 118 (Matrice des cofacteurs ou comatrice).

Soit $A$ une matrice. La **matrice des cofacteurs** ou **comatrice** associée à $A$ est la matrice notée $\mathrm{com}(A)$ définie par :

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{cof}_{1,1} & \cdots & \mathrm{cof}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cof}_{n,1} & \cdots & \mathrm{cof}_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{cof}_{i,j}$ sont les cofacteurs associés à $A$ (on rappelle que $\boxed{\mathrm{cof}_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}$ où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne $i$ et la ligne $j$ de la matrice $A$).

## Théorème 119 (Comatrice et inversion matricielle).

*Soit $A$ une matrice carrée et $\mathrm{com}(A)$ sa comatrice.*

*Alors* $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \left(\mathrm{com}(A)\right)^T}$.

# 3.2.4. - Exemple

**Exemple 120 (Inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ par les comatrices).**

La comatrice de $A$ est $B = (b_{i,j})$ avec :

- $b_{1,1} = \text{cof}_{1,1} = (-1)^{1+1} \det(A_{1,1}) = 4$ car $A_{1,1} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$
- $b_{1,2} = \text{cof}_{1,2} = (-1)^{1+2} \det(A_{1,2}) = -3$ car $A_{1,2} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$
- $b_{2,1} = \text{cof}_{2,1} = (-1)^{2+1} \det(A_{2,1}) = 2$ car $A_{2,1} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$
- $b_{2,2} = \text{cof}_{2,2} = (-1)^{2+2} \det(A_{2,2}) = 1$ car $A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} \\ \cancel{3} & \cancel{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

Donc $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ; puis $\text{com}(A)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (car $\det(A) = -2$).

# 3.2.4. - Exercice

➔ Exercice 52. *Méthode des comatrices :* Dire si l'inversion de la matrice est possible, et si oui inverser ces matrices en utilisant la méthode des comatrices.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

□

# 4. - Plan

# 4.1.1. - Système linéaire

## Définition 121 (Système linéaire).

Un système linéaire est un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,m}x_m = & b_1 \quad (L_1) \\ & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,m}x_m = & b_n \quad (L_n) \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$, $b_i$ sont des réels ou des complexes donnés et les $x_1, \dots, x_m$ sont $m$ inconnues.

## Objectif de l'étude des systèmes linéaires

Déterminer les inconnues $x_1$ à $x_m$. Ces solutions forment un $m$-uplet. Les systèmes possèdent :

1. soit 0 solution ;
2. soit un unique $m$-uplet solution ; on parle alors de système de Cramer.
3. soit une infinité de $m$-uplet solutions.

# 4.1.1. - Matrices associées

## Définition 122.

Matrices associées à un système linéaire On peut modéliser un système linéaire sous forme d'une **équation matricielle** de type $\boxed{AX = B}$, avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

où :

- $A$ est appelée **matrice de transformation,**
- $X$ **vecteur d'inconnues,**
- $B$ **vecteur de coefficients.**

# 4.1.1. - Matrice associée à un système

## Exemple 123 (Un système).

$$\begin{cases} 2x + 4y = 3 & (L_1) \\ -x + 2y = 5 & (L_2) \\ 4x - \phantom{4}y = 7 & (L_3) \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}}_{B} \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{matrix}$$

# 4.2.1. - Système de Cramer

## Définition 124 (Système de Cramer).

Un système linéaire

$$AX = B \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

est un **système de Cramer** lorsque $A$ est une matrice carrée inversible. Il possède donc autant d'équations que d'inconnues $(n = m)$.

# 4.2.1. - Exemple

**Exemple 125 (Résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$).**

Ce système peut être représenté par l'équation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc sous la forme $AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Comme $A$ est carré et que $\det(A) = -2$, le système est un système de Cramer possédant un unique couple $(x_1, x_2)$ solution.

# 4.2.2. - Résolution avec la solution formelle

## Théorème 126 (Solution formelle).

*Un système de Cramer possède une unique solution donnée par :* $\boxed{X = A^{-1}B}$.

**Démonstration :** $AX = B \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I} = A^{-1}B \Leftrightarrow \underbrace{IX}_{X} = A^{-1}B$

## Exemple 127 (Suite de l'exemple 125).

Puisque le système a une unique solution, en utilisant la formule de l'inverse d'une matrice $2 \times 2$ (cf. exercice 35), cette solution est :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4.5 \end{pmatrix}.$$

# 4.2.2. - Exercice

**Exercice 53.** *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5x + 8y = 7 \\ 4x - \phantom{8}y = 2 \end{cases}$

$\square$

# 4.2.3. - Résolution formelle de Cramer

## Théorème 128 (Théorème de Cramer).

*Soit un système de Cramer* $AX = B$ *avec pour vecteur d'inconnues* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. *La* $k^e$ *inconnue* $x_k$ *est donnée par :* $\boxed{x_k = \dfrac{\det(A_k)}{\det(A)}}$ *où* $A_k$ *est la matrice obtenue en remplaçant la* $k^e$ *colonne de* $A$ *par* $B$.

## Exemple 129 (Suite de l'exemple 125).

- $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$ avec $A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ donc $\det(A_1) = 8$ soit $x_1 = -4$
- $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}$ avec $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ donc $\det(A_2) = -9$ soit $x_2 = \dfrac{9}{2}$

# 4.2.3. - Exercice

**Exercice 54.** *Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode de Cramer :*

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

□

# 4.2.3. - Exercice

**Exercice 55.** *Un système :* On considère le système suivant, portant sur les 3 inconnues réelles $x, y, z$ et paramétré par un réel $t$ :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & t+1 \\ 2x & - & y & + & (4t+3)z & = & 0 \\ -x & + & 2y & + & 2t^2z & = & 0 \end{array}\right.$$

① A quelle condition sur $t$ le système est-il un système de Cramer ?

② Dans ce cas, résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.

□

# 4.2.4. - Résolution par substitution

## Méthodologie 130 (Méthode par substitution).

*Soit un système de Cramer* $AX = B$ *avec pour vecteur d'inconnues* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. *On choisit une des inconnues* $x_k$, *on l'exprime en fonction des autres inconnues puis on remplace* $x_k$ *par son expression dans le système pour se ramener à un système comportant une inconnue de moins.*

## Exemple 131 (Même exemple que 125).

On cherche à résoudre $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$. En utilisant la 2de équation, on déduit que $x_2 = \dfrac{6 - 3x_1}{4}$, donc en remplaçant $x_2$ par son expression dans la 1ère équation, on obtient :
$x_1 + \dfrac{6 - 3x_1}{2} = 5 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x_1 + 3 = 5 \Leftrightarrow x_1 = -4$. Finalement, en remplaçant $x_1$ par sa valeur dans l'expression de $x_2$, on déduit : $x_2 = 9/2$.

# 4.2.4. - Exercice

**Exercice 56.** *Résolution par substitution* : Résoudre avec la méthode de substitution le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=7 & \text{(a)} \\ \quad\quad\; y+2z=2 & \text{(b)} \\ \quad\quad\quad\;\; 6z=12 & \text{(c)} \end{cases}$$

□

# 4.2.5. - Notion compacte d'un système

## Matrices associées à un système linéaire

Soit un système de type $AX = B$, avec :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

En omettant les inconnues $x_1, \cdots, x_m$, un système linéaire peut être modélisé par la **représentation compacte** suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} & b_n \end{array}\right] \qquad \begin{matrix} (L_1) \\ \vdots \\ (L_n) \end{matrix}$$

# 4.2.5. - Systèmes linéaires équivalents

## Définition 132 (Systèmes linéaires équivalents).

Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

## Théorème 133 (Règles d'équivalence).

*Les opérations permises sur les lignes, car conduisant à des systèmes équivalents, sont les suivantes :*

1. *Permutation de la ligne $L_i$ et de la ligne $L_j$, notée* $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$;
2. *Multiplication d'une ligne par un réel $\alpha$ non nul, notée* $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$;
3. *Ajout de la ligne $L_j$ à la ligne $L_i$, éventuellement multipliées par les réels $\alpha$ et $\beta$ non nuls, noté* $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j}$.

*Aucune opération sur les colonnes n'est permise car elles modifient l'ordre des inconnues dans le système.*

# 4.2.5. - Méthode du pivot de Gauss

## Méthodologie 134 (Méthode du pivot de Gauss).

*On utilise les règles d'équivalence sur les lignes conduisant à des systèmes linéaires équivalents pour faire apparaître un système de la forme $A'X = B'$ dans lequel :*

- *au mieux $A' = I_n$ (auquel cas les solutions sont dans $B'$)*
- *ou au pire $A'$ est triangulaire supérieure (dans ce cas, reste à utiliser la méthode de substitution).*

# 4.2.5. - Algorithme du pivot de Gauss

## Pivot de Gauss pour un système de Cramer

Partant du système en **notation compacte** :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (L_1) \\ (L_2) \\ \vdots \\ (L_n) \end{array}$$

**for** k allant de 1 à $n$ **do**
- **if** il existe une ligne $i \geq k$ telle que $a_{i,k} \neq 0$ **then**
  - Permutation $L_k \leftrightarrow L_i$;
- **else**
  - Le système n'a pas de solution; break ;
- **end**
- $pivot \leftarrow a_{k,k}$;
- $L_k \leftarrow \frac{1}{a_{k,k}} L_k$ de sorte que $a_{k,k} \leftarrow 1$;
- **for** j allant de 1 à $n$, et différent de $k$ **do**
  - $L_j \leftarrow L_j - a_{j,k} L_k$ de sorte que $a_{j,k} \leftarrow 0$
- **end**

**end**

# 4.2.5. - Exemple

## Exemple 135 (Même exemple que 125).

On cherche à résoudre $(\mathcal{S})\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c}(L_1)\\(L_2)\end{array}$.

- 1ᵉ pivot = 1ᵉ coeff diagonal (ici 1) porté par la ligne 1 et la colonne 1
  - Permutation pas nécessaire
  - $a_{1,1} \leftarrow 1$ : déjà fait!
  - $a_{j,1} \leftarrow 0$ : on modifie toutes les lignes autres que celle du pivot de sorte à annuler les coef dans la colonne 1 en utilisant $(L_1)$ :

    $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right]$ en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
- 2ᵉ pivot = 2ᵉ coef diagonal (ici $-2$) porté par la ligne 2 et la colonne 2
  - Permutation pas nécessaire
  - $a_{2,2} \leftarrow 1$ : $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 9/2 \end{array}\right]$ en faisant $L_2 \leftarrow -L_2/2$
  - $a_{j,1} \leftarrow 0$ : on modifie toutes les lignes autres que celle du pivot de sorte à annuler les coef dans la colonne 2 en utilisant $(L_2)$ :

    $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -9 \end{array}\right]$ en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$
- On conclut que $x_1 = -4$ et $x_2 = 9/2$.

⚠ **Remarque** : Seule la matrice $A$ détermine les étapes dans la résolution par la méthode du pivot.

# 4.2.6. - Exercices

**Exercice 57.** *Résoudre avec la méthode du pivot de Gauss, les systèmes d'équations suivants :*

**1** $\begin{cases} 2x + y + 2z = 7 \\ 3x - 2y + 3z = 2 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$

**2** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

□

**Exercice 58.** *Exercice type :* Soit le système d'équations

$$\begin{cases} x + \lambda y = 1 \\ x - y = \alpha \end{cases}$$

① A quelle condition sur $\lambda$ s'agit-il d'un système de Cramer ?

② Résoudre le système,en fonction de $\lambda$ et $\alpha$.

□

# 4.2.6. - Exercices

**Exercice 59.** *Résolution d'un problème d'interpolation :* Connaissant trois points d'une courbe : $A = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$, trouver une fonction de la forme $ax^2 + bx + c$ qui passe par ces points.

□

**Exercice 60.** *Gauss :* Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle et les résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

1 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 3 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

□

# 4.3.1. - Application à l'inversion matricielle

**Objectif** : On cherche à inverser la matrice $A$.

## Inversion matricielle par la méthode de Cramer

On cherche une matrice $X = (x_{i,j})$ telle que $AX = I_n$. Il s'agit donc de résoudre le système obtenu en développant le produit $AX = I_n$, avec pour inconnues les coefficients $x_{i,j}$. C'est à la fois :

- un système linéaire de Cramer à $n^2$ équations et $n^2$ inconnues,
- et $n$ systèmes de Cramer indépendants à résoudre comportant chacun $n$ lignes et $n$ inconnues.

# 4.3.1. - Interprétation par un exemple

**Exemple 136 (Inversion matricielle).**

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned}
AB = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} x_{1,1} & & +2x_{2,1} & & = 1 \\ & x_{1,2} & & +2x_{2,2} & = 0 \\ 3x_{1,1} & & +4x_{2,1} & & = 0 \\ & 3x_{1,2} & & +4x_{2,2} & = 1 \end{array} \right. && (1) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && (2) \\
&\Leftrightarrow \quad A'X' = B' && (3)
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire à 4 équations et 4 inconnues, qu'on peut résoudre à l'aide de l'une des 3 méthodes vues précédemment.

$$\begin{aligned}
AB = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. && (4) \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} AX_1 = B_1 \\ AX_2 = B_2 \end{array} \right. && (5) \\
& && (6)
\end{aligned}$$

On se ramène donc à deux systèmes linéaires de même matrice de transformation $A$. Et comme la méthode du pivot est dictée par la matrice $A$ on peut **les résoudre simultanément**.

# 4.3.2. - Méthode du pivot de Gauss

## Méthodologie 137 (Pivot de Gauss pour l'inversion matricielle).

*Pour calculer l'inverse de $A$, en utilisant les règles d'équivalence sur les lignes, on passe du système*
$$[A|I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$
*au système $[I_n|A^{-1}]$. Il n'y a plus qu'à relire la matrice $A^{-1}$.*

# 4.3.2. - Exercice

**Exercice 61.** *Dire, si les matrices qui suivent sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse avec la méthode du pivot de Gauss :*

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

□

# 4.3.2. - Exercice

**Exercice 62.** *Inversion de matrices 2x2* : Dire si l'inversion de la matrice est possible, et si oui inverser-la :

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
5. $A_5 = A_1 \times A_2$
6. $A_6 = A_2 \times A_4$
7. $A_7 = A_3 \times A_4$
8. $A_8 = A_2^T$
9. $A_9 = 3A_1$.

□

# 4.3.2. - Exercice

**Exercice 63.** *Inversion des matrices 2x2 :* Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

① Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{0}$.

② En déduire que si $A$ est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\Big((a+d)\boldsymbol{I}_2 - A\Big)$.

□

**Exercice 64.** *Inversibilité :* Pour tout nombre réel $m$, on considère la matrice $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & m^2 & m \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs de $m$ la matrice $A(m)$ est inversible, puis déterminer l'inverse avec la méthode du pivot de Gauss.

□

# 4.4.1. - Système linéaire quelconque

**Définition 138 (Lignes linéairement indépendantes).**

Soit un système linéaire quelconque de $m$ inconnues et $n$ équations. Les lignes du système sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas $n$ coefficients $\lambda_k$ autres que 0 tels que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{0}_{1,n}}$.

**Exemple 139** ($\begin{cases} x - \phantom{2}y = 2 & (L_1) \\ 2x - 2y = 4 & (L_2) \end{cases}$).

Avec $\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, on a $2\boldsymbol{L}_1 - \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{0}_{1,3}$ donc deux lignes linéaires dépendantes.

# 4.4.1. - Système linéaire quelconque

## Définition 140 (Système linéaire sous-déterminé).

Un système linéaire est **sous-déterminé** lorsque le nombre de lignes linéairement indépendantes est inférieur au nombre d'inconnues.

## Définition 141 (Système linéaire sous-déterminé, sur-déterminé).

Un système linéaire est **sur-déterminé** lorsque le nombre de lignes linéairement indépendantes est supérieur au nombre d'inconnues.

## Exemple 142 (Des systèmes).

$$\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y-z=-1 \end{cases} \text{ est sous-déterminé ; } \begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=-1 \\ x-y=3 \end{cases} \text{ est sur-déterminé}$$

# 4.4.1. - Nombre de solutions d'un système linéaire quelconque

**Théorème 143 (Nombre de solutions d'un système).**

*Soit un système linéaire $AX = B$. Alors :*

- *S'il possède autant d'inconnues (p) que d'équations et s'il est de Cramer (lignes linéairement indépendantes), alors il possède une solution unique $X = A^{-1}B$ (cf. méthodes précédentes).*

*Sinon :*

- *Si le système est sous-déterminé, il possède une infinité de solutions ;*
- *Si le système est sur-déterminé, il ne possède aucune solution.*

# 4.4.2. - Systèmes carrés ($n = m$)

## Méthodologie 144 (Pivot de Gauss pour les systèmes carrés ($n = m$)).

*Partant du système matriciel carré, ① utiliser les règles d'équivalence pour obtenir un système linéaire équivalent $A'X = B'$ dans lequel $A'$ est **triangulaire supérieure** :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & a'_{n,n} \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{B'}$$

*Puis ② analyser les cas de figure :*

- *Si la dernière ligne de $A'$ est non nulle : système de Cramer avec une **solution unique** qui se résout par substitution progressive.*
- *Si les $k$ dernières lignes de $A'$ sont nulles et correspondent chacune à des coefficients nuls dans $B'$ : système sous-déterminé avec une **infinité de solutions** obtenues en exprimant $k$ inconnues en fonction des $n - k$ inconnues restantes ;*
- *Si l'une des lignes de $A'$ est nulle et correspond à un coefficient non nul dans $B'$ : système sur-déterminé n'ayant **pas de solution**.*

# 4.4.3. - Systèmes non carrés avec $n < m$

## Méthodologie 145 (Pivot de Gauss pour les systèmes non carrés avec $n < m$).

*Partant du système matriciel, ① utiliser les règles d'équivalence sur les lignes pour obtenir un système linéaire équivalent $A'X = B'$ dans lequel $A'$ est* ***le début d'une matrice triangulaire supérieure :***

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1,m} \\ & \ddots & & \vdots & \\ \mathbf{0} & & a'_{n,k} & \cdots & a'_{n,m} \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{B'}$$

*Puis ② analyser les cas de figure :*

- *Si les $k$ dernières lignes de $A'$ sont nulles et que les $k$ dernières lignes de $B'$ sont nulles aussi : Système sous-déterminé ayant une infinité de solutions obtenues en exprimant $k$ inconnues en fonction des $m-k$ restantes ;*
- *Si l'une des lignes (la $k^e$) de $A'$ est nulle tandis que la $k^e$ ligne de $B'$ n'est pas nulle : Système sur-déterminé n'ayant pas de solution.*

# 4.4.3. - Systèmes non carrés avec $n > m$

## Méthodologie 146 (Pivot de Gauss pour les systèmes non carrés avec $n > m$).

*Partant du système matriciel,* ① *utiliser les règles d'équivalence pour obtenir un système linéaire équivalent $A'X = B'$ dans lequel les $m$ premières lignes de $A'$ constituent une* ***matrice triangulaire supérieure dont les n-m lignes dernières sont nulles*** *:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & & a_{m,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a'_{1,1} & \cdots & a'_{1,m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a'_{k,m} \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}}_{A'} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_k \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}}_{B'}$$

② *Analyser ensuite les solutions :*

- *Si les $m$ 1^e lignes de $A'$ sont non nulles, si les $n - m$ dernières lignes de $A'$ sont nulles et si les $m$ derniers coefficients de $B'$ sont nuls : système de Cramer avec une* ***solution unique*** *obtenue en ne gardant que les $m$ 1^e lignes.*
- *Si $k$ lignes de $A'$ sont nulles et sont chacune associées à un coefficient dans $B'$ nul : infinité de solutions obtenues en exprimant $k$ inconnues en fonction de $m - k$ paramètres ;*
- *Si une ligne de $A'$ (la $k^e$) est nulle et que le $k^e$ coefficient de $B'$ est non nul : aucune solution.*

# 4.4.4. - Rang d'une matrice

## Définition 147 (Rang).

Soit $A$ une matrice de taille $n \times m$. Le rang de $A$ est la taille de la plus grande matrice carrée extraite de $A$ de déterminant non nul. C'est un nombre et on le note $\boxed{\text{rang}(A)}$.

## Propriétés

- $\text{rang}(A) \leq \min(n,m)$
- Le rang d'une matrice représente le nombre de colonnes (ou de lignes) indépendantes (non linéairement dépendantes).

## Définition 148 (Rang plein).

Soit $A$ une matrice de taille $n \times m$. On dit que$A$ est de **rang plein** si $\boxed{\text{rang}(A) = \min(n,m)}$.

# 4.4.4. - Nombre de solutions d'un système linéaire

## Théorème 149 (Solutions d'un système linéaire et rang).

*Soit $A$ une matrice de taille $n \times m$ et $B$ un vecteur colonne de taille $n$ impliqué dans un système linéaire de la forme $AX = B$ (où $X$ est le vecteur d'inconnues). En notant $(A|B)$ la matrice obtenue en concaténant $A$ et $B$ suivant les colonnes, alors :*

- *si $\mathrm{rang}(A|B) = m$, le système possède une unique solution ;*
- *si $\mathrm{rang}(A|B) < m$, le système possède une infinité de solutions paramétrées par $m - \mathrm{rang}(A)$ variables $x_1, \ldots, x_{m-\mathrm{rang}(A)}$ ;*
- *si $\mathrm{rang}(A|B) > m$, le système n'a aucune solution.*

# 4.5. - Exercices

**Exercice 65.** *Résolution de systèmes linéaires :* Pour chacun des systèmes linéaires suivants, donner la notation matricielle compacte correspondante, puis trouver l'ensemble de solutions en utilisant la méthode la plus appropriée :

**1** $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

**2** $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ 4x + 3y + z \end{cases}$

**3** $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ 3x - y + z \end{cases}$

**4** $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

□

# 4.5. - Exercices

➔ Exercice 66. *Résolution d'un système linéaire paramétré :* Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe quelconque. Résoudre et discuter suivant la valeur de $\lambda$ le système d'équations : $\begin{cases} (\lambda-1)x + (1-\lambda) = 0 \\ 2x + (1+\lambda)y + (1+\lambda)z = 2 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$ □

➔ Exercice 67. *Matrice de rotation :* Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel quelconque et soit $A(x)$ la matrice définie par $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

① Montrer que $A(x)$ est inversible, puis calculer son inverse et montrer que $A^{-1}(x) = A(-x)$.

② Montrer que $A(x)^2 = A(2x)$.

③ En déduire $A(x)^n$ pour tout entier relatif $n$.

□