Analyse mathématiques des signaux
Ressource R2.14

Cyrille SICLET, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr
Cléo BARAS, cleo.baras@univ-grenoble-alpes.fr

Kévin KASPER, kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr

Version 2024-25

Table des matières

Ressource R214 — Analyse mathématique des signaux

T.1

1 Outils d'analyse de signaux

1.1 Continuité

1.1.1 Notion

Notion de continuité
La continuité est le fait de pouvoir « *tracer le graphe géométrique d'une fonction sans lever le stylo* » ; la courbe représentative « *ne saute pas* » d'un point à un autre.
La continuité indique l'absence de discontinuité ou de rupture dans le graphe.

Exemple 1 (Des fonctions continues et non continues).

- Les polynômes, les log, les expo sont continues sur leur domaine de définition
- L'échelon, la porte ne sont pas continus

T.3

1.1.2 Définition (PE)

Définition 2 (Continuité en un point)**.** Soit f une fonction de la variable réelle et a un point de son domaine de définition D_f.

1. f est **continue en** a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. f est **continue à droite de** a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
3. f est **continue à gauche de** a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Remarques

- Une fonction f, qui n'est pas définie en un point a (autrement dit pour laquelle $f(a)$ n'existe pas), n'est jamais continue en a.
- On se reportera à la partie 1.3 et 1.4 pour la définition et le calcul des limites.

T.4

Définition 3 (Continuité sur un intervalle I)**.** Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point a de l'intervalle I.

Théorème 4 (Image d'un intervalle)**.** *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

T.5

1.1.3 Prolongement par continuité

Remarque PE : Lorsqu'une fonction f n'est pas définie en un point fini a, mais que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$, on peut déduire de f une autre fonction $\hat{f}$ qui, elle, est continue en a en imposant que $\hat{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$ et surtout que $\hat{f}(a) = L$. Cette fonction $\hat{f}$ est appelée **prolongement par continuité de** f.

Définition 5 (Sinus cardinal)**.** Le **sinus cardinal** noté sinc (très utilisé en télécoms) est défini par : $\boxed{\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$. C'est une fonction prolongée par continuité en 0. Son graphe est donné figure 1.

Remarque : En dehors du lobe central, sinc est un signal pseudo-périodique, de pseudo période 2π et d'enveloppes $\pm\dfrac{1}{x}$.

T.6

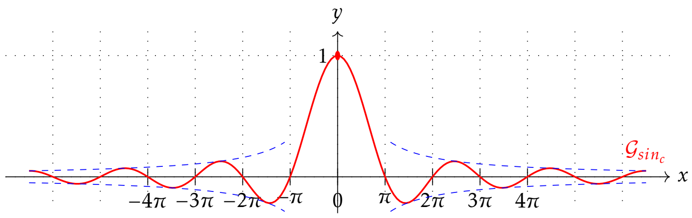


FIGURE 1 – Graphe de la fonction sinus cardinal.

1.1.4 Domaine de continuité (PE)

Définition 6 (Domaine de continuité)**.** Le **domaine de continuité** d'une fonction f, noté C_f, est l'ensemble formé par les réels $x \in D_f$ en lesquels la fonction f est continue.

T.7

Pour déterminer le domaine de continuité d'une fonction, on fait rarement appel à la définition de la continuité (def. 2 et 3). On préfère (si cela est possible) écrire f sous forme d'une suite d'opérations (somme, produit, etc...) impliquant des fonctions usuelles dont on connaît le domaine de continuité et utiliser les règles d'opérations sur les fonctions.
Les domaines de continuité des fonctions usuelles (présentées section 1.2.2.B) sont les mêmes que leurs domaines de définition. Les règles de calcul du domaine de continuité pour un assemblage de fonctions sont les mêmes que celles pour le calcul du domaine de définition en remplaçant chaque domaine de définition par le domaine de continuité.

1.1.5 Exercices (PE)

➜ Exercice 1. *Etude de continuité* : On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{|x-a|}{x-a}$ pour un paramètre a réel quelconque. **1** Donner le domaine de continuité de h. **2** Peut-on prolonger la fonction h par continuité en a ?

➜ Exercice 2. *Continuité en un point* : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$ est-elle continue en 0 ? T.8

➜ Exercice 3. *Ensemble de continuité d'une fonction produit* :
Soient f et g les fonctions définies par : $\begin{cases} f(x) = x+2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} g(x) = 1-x & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x+2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Étudier la continuité des fonctions f et g et représenter graphiquement chacune d'elles.
2. Déterminer la fonction $h = fg$. Représenter graphiquement h en traçant plusieurs points caractéristiques.
3. h est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$? Quelle conclusion peut-on en déduire ?

T.9

➜ Exercice 4. *Ensemble de continuité* :
Donner l'ensemble de continuité des fonctions suivantes :

1 $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$ **2** $f(x) = \dfrac{2x+|2x+5|}{5x-1}$ **3** $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

T.10

1.2 Dérivation

La dérivée détermine comment une fonction varie quand la quantité dont elle dépend (son argument) change. Plus précisément, son expression donne le rapport entre les variations infinitésimales de la fonction et les variations infinitésimales de son argument. Par exemple, la vitesse est la dérivée d'une fonction exprimant le déplacement d'un objet par rapport au temps, et l'accélération est la dérivée de la vitesse, toujours par rapport au temps.

1.2.1 Dérivabilité en un point

1.2.1.A Notion

Définition 7 (Nombre dérivé de f en a)**.** Le **nombre dérivé** d'une fonction f de la variable réelle x en a est le **nombre réel** noté $\boxed{f'(a)}$ ou $\boxed{\frac{df}{dx}(a)}$ égal à la **pente de la tangente** à $\mathcal{G}_f$ au point $M\big(a, f(a)\big)$. Il traduit la vitesse de variation instantanée de la courbe en a.

Théorème 8 (Équation de la tangente en a)**.** *La tangente au graphe de f au point $A(a, f(a))$ est d'équation* $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.

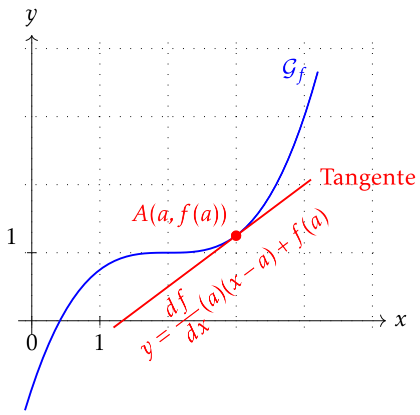


Figure 2 – Illustration du nombre dérivée $f'(a)$ comme pente de la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point $(a, f(a))$.

T.11

Remarques :

- $f'(a)$ est la notation mathématique de la dérivée en a. $\frac{df}{dx}(a)$ est la notation **différentielle**, très souvent utilisée en physique car elle indique (grâce au dx) quelle est la variable de dérivation considérée pour f (ici x). Toutes deux indiquent bien que le nombre dérivé dépend du point a.
- **Attention** : dans la notation $\frac{df}{dx}$, df n'est pas le produit de d et f mais un symbole **insécable** qui dénote la différentielle de f. Idem pour dx.

1.2.1.B Définition (PE)

Soit f une fonction réelle de la variable réelle.

Définition 9 (Taux de variation)**.** On appelle **taux de variation de f entre les réels x_1 et x_2 de D_f** la quantité $\boxed{T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$. Graphiquement, le taux de variation $T_f(x_1, x_2)$ est la pente de la sécante (droite orientée) passant par les deux points du graphe : $M(x_1, f(x_1))$ et $M(x_2, f(x_2))$.

Définition 10 (Dérivabilité en un point, Nombre dérivé)**.** f est **dérivable en un point a de D_f** s'il existe un réel A et une fonction ϵ tels que

$\boxed{T_f(x, a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \epsilon(x)}$ avec $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$. A est le **nombre dérivé** de f en a. On le note $\boxed{A = f'(a)}$.

Remarque : Cette définition donne également le **développement limité de f à l'ordre** 1 : $\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x)}$, c'est-à-dire une approximation de la fonction f au voisinage de a sous la forme d'un polynôme de degré 1 (ici $f(a) + f'(a)(x-a)$) et d'un reste (ici $(x-a)\epsilon(x)$).

Théorème 11. *f est **dérivable en** a si et seulement si $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et admet une valeur finie A. Dans ce cas, son nombre dérivé en a est $f'(a) = A$.*

1.2.1.C Exemples de non dérivabilité

Il existe des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points a.

Exemple 12 (Partie supérieure). C'est la fonction $x \mapsto \lceil x \rceil$, où $\lceil x \rceil$ est l'entier directement supérieur ou égal à x ; en informatique, elle s'appelle *ceil*. Son graphe est donné figure 3. Elle n'est pas continue en tout point a entier (c'est-à-dire $a = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$), donc n'y est pas non plus dérivable.

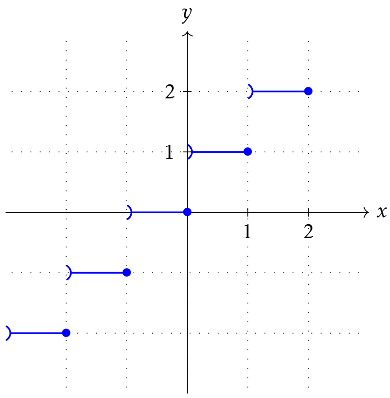


FIGURE 3 – Partie supérieure, une fonction présentant des discontinuités donc non dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Les échelons, les portes, les créneaux ne sont pas dérivables (au sens des fonctions) car ces signaux présentent des discontinuités. T.12

Exemple 13 (Non dérivabilité suite à une inflexion dans le graphe). La fonction $f(x) = \frac{1}{3}|x| + x^2$ dont le graphe est donné figure 4 est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0, car elle présente une inflexion en 0 à cause de la valeur absolue : il y a donc une tangente à droite et une tangente à gauche.

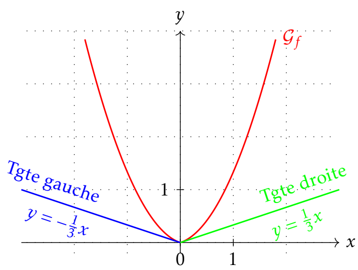


FIGURE 4 – Une fonction présentant une inflexion dans son graphe donc non dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. (PE). Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$ (donc $|x| = x$) . Le taux d'accroissement entre les points 0 et x est : $T_f(0,x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\frac{1}{3}x + x^2}{x} = \dfrac{1}{3} + x$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} T_f(0,x) = \dfrac{1}{3}$. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_*^-$ donc $|x| = -x$. Cette fois, $T_f(x,0) = \dfrac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \dfrac{-\left(\frac{1}{3}(-x) + x^2\right)}{-x} = -\dfrac{1}{3} + x$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} T_f(x,0) = -\dfrac{1}{3}$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} T_f(0,x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} T_f(x,0)$; il n'y a donc pas de nombre dérivé unique en 0. □

Remarque : Les triangle, dent de scie ne sont pas dérivables car ces signaux présentent des inflexions. T.13

1.2.1.D Exercices (PE)

➲ Exercice 5. *Dérivabilité en* 0 : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x|}$ est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0. T.14

1.2.2 Dérivée

1.2.2.A Définitions

Définition 14 (Ensemble de dérivabilité B_f)**.** L'**ensemble de dérivabilité** B_f d'une fonction f est l'ensemble des points x de D_f en lesquels f est dérivable. B_f donne le domaine de définition de la dérivée de f, autrement dit $D_{f'}$.

Théorème 15 (De la dérivabilité à la continuité)**.** *Une fonction dérivable sur l'ensemble B_f est forcément continue sur B_f, autrement dit $B_f \subset C_f$.*

T.15 **Remarques** : La continuité n'implique pas nécessairement la dérivabilité (cf. exemple 13)

Définition 16 (Fonction dérivée ou Dérivée)**.** La **dérivée** de f, notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$, est la **fonction** qui à tout $x \in B_f$ associe le nombre dérivé en x. Elle est définie par : $\boxed{f' : \begin{cases} B_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}}$ ou avec la **notation différentielle** $\boxed{\dfrac{df}{dx} : \begin{cases} B_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{df}{dx}(x) \end{cases}}$.

Remarque : La notation différentielle $\dfrac{df}{dx}$ a l'avantage d'indiquer la variable de dérivation x (via le dx) ;
T.16 tout ce qui ne dépend pas de cette variable est constant pour (vue de) x.

1.2.2.B Dérivées usuelles

La table 1 présente les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions usuelles.

	f	$f(x)$	B_f	**Dérivée** $f'(x)$
	Constante	c	$\mathbb{R}$	0
	Monôme	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
	Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	Inverse	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
Trigonométrie	**Sinus**	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
	Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
	Tangente	$\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
	ArcSinus	$\arcsin(x) = \arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	ArcCosinus	$\arccos(x) = \arccos(x)$	$]-1;1[$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	ArcTangente	$\arctan(x) = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
	Racine *n*-ième	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ $(n \in N^*)$	$\mathbb{R}_*^+$ (n paire) ou $\mathbb{R}^*$ (n impaire)	$\dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
	Logarithme népérien	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_*^+$	$\dfrac{1}{x}$
	Exponentielle	$\exp(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
	Puissances réelles	x^α	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

Table 1 – Ensemble de dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles.

T.17

1.2.2.C Dérivées d'assemblage de fonctions

Les ensembles de dérivabilités et les dérivées en cas d'opérations usuelles sur les fonctions sont donnés table 2.

Fonction	h	B_h	$h'(x)$
Somme	$f+g$	$B_f \cap B_g$	$f'(x)+g'(x)$
Amplification	$\lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R})$	B_f	$\lambda f'(x)$
Produit	$f.g$	$B_f \cap B_g$	$f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$
Inverse	$\frac{1}{f}$	$\left\{x \in B_f / f(x) \neq 0\right\}$	$-\frac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$
Quotient	$\frac{f}{g}$	$\left\{x \in B_f \cap B_g / g(x) \neq 0\right\}$	$\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Puissance	f^n	B_f	$nf'(x)f^{n-1}(x)$
Dilatation de λ	$h(x)=f(\lambda x)$	B_f	$\lambda f'(\lambda x)$
Retard de r	$h(x)=f(x-r)$	B_f	$f'(x-r)$
Composée	$g \circ f$	$\left\{x \in B_f / f(x) \in B_g\right\}$	$f'(x)g'\left(f(x)\right)$

TABLE 2 – Ensemble de dérivabilité et dérivée des assemblages de fonctions usuelles.

Remarque : Les règles pour déterminer l'ensemble de dérivabilité sont les mêmes que celles pour déterminer l'ensemble de définition. Par contre, les ensembles « de départ » (les ensembles de dérivabilité des fonctions usuelles dont on part pour créer une fonction plus complexe) ne sont pas nécessairement les mêmes que les ensembles de définition ! T.18

1.2.2.D Exercices

1.2.2.D.a Exercices types

➔ Exercice 6. *Exercice type : Ensemble de dérivabilité et calcul de dérivée* :
Calculer l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x}$
2. $f(x) = 5\cos(2x) - 3\sin(2x)$
3. $f(t) = \frac{1}{1+\omega_0 t}$
4. $f(t) = a\cos(2\pi f_0 t) + b\sin(\omega_1 t)$
5. $f(t) = 3e^{-6t} + 2e^{4t}$
6. $f(t) = \cos(\omega t)e^{-\alpha t}$

T.19

1.2.2.D.b Exercices de TD

➔ Exercice 7. *Tangente en* 0 : Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe d'équation $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

➔ Exercice 8. *Systèmes dynamiques* : L'étude des systèmes dynamiques du 1^{er} ordre amène souvent à travailler avec la fonction de la variable réelle t : $V(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$, où τ est la constante de temps fixée. Montrer que la tangente à la courbe de $V(t)$ en un point M_0 d'abcisse t_0 quelconque coupe l'axe des temps au point $t_0 + \tau$. T.20

➔ Exercice 9. *Ensemble de dérivabilité et calcul de dérivée* : Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1 $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

2 $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$

3 $\phi(s) = \frac{3}{s}$

4 $h(z) = (1-z)^3(1+2z)$

5 $p(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$

6 $s(t) = \frac{(t+1)^2}{t^2+1}$

7 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

8 $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$

9 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

10 $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$

11 $f(x) = \tan\left(\sin(x)\right)$

12 $f(x) = \frac{1}{\cos\left(\sqrt{x}\right)}$

13 $f(x) = 2(2-x) + \frac{1}{4}\frac{x}{x+2}$

14 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}$

15 $f(x) = \tan^2\left(x^3\right)$

16 $y(x) = x^x$

17 $f_a(x) = x^{x^a}$

18 $g(x) = \ln(\log_{10}(x))$

19 $f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2+3}{1-x}$

20 $g(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} + (x-2)(x+3)$

21 $h(x) = \ln(1 - e^{-x})$

T.21

1.2.3 Différentielles (PE)

La notion de différentielle est très utilisée dans le calcul d'approximation en physique. Elle généralise le calcul de la dérivée, lève les ambiguïtés sur la variable par rapport à laquelle la dérivée est calculée et facilite grandement l'expression de la dérivée de la composée.
En physique, on s'intéresse souvent à l'évolution d'une quantité f dépendante d'une variable x autour d'un point $(a, f(a))$: par exemple, l'évolution de la charge d'un condensateur [1] autour d'un point d'équilibre [2] lorsqu'on doit faire face à une petite diminution de l'intensité du courant. Plus particulièrement, le physicien souhaite connaitre la variation engendrée sur la quantité f par une petite variation de la variable x voire la vitesse de cette variation. La variation de la variable x autour du point a est notée $\delta x = x - a$. La variation engendrée sur la quantité f est notée $\delta f = f(x) - f(a)$. En général, ces variations sont supposées infiniment petites. Pour interpréter ces variations, reprenons l'interprétation géométrique du taux d'accroissement et de la dérivée, en s'appuyant sur le graphe donné figure 5.
Autour du point M_0 d'abscisse a et d'ordonnée $f(a)$, introduire une petite variation δx sur a revient à déplacer le point d'étude de la quantité f en M_1 d'abscisse $x = a + \delta x$ et d'ordonnée $y = f(x) = f(a) + \delta f$. Le rapport entre la variation δf et la variation δx qui l'a provoquée n'est autre que le taux d'accroissement $T_f(a,x)$, défini par les mathématiques. En effet, ce taux d'accroissement est la pente de la droite liant $M_0(a, f(a))$ au point $M_1(x, f(x))$. On a alors : $\delta f = T_f(a,x)\delta x$.
Les mathématiciens disposent eux aussi d'une formalisation de ces petites variations. Une très petite variation, dite **infiniment petite**, de la variable x est notée dx et appelée **différentielle de** x. La différentielle est une quantité algébrique (qui peut donc être quantifiée). La variation engendrée sur f par dx est appelée différentielle de f, notée df, et est définie au point a par : $df = f'(a)dx$. Cette variation de f, dépendant de la dérivée f', est donc graphiquement liée à la tangente au graphe de f au point $M_0(a, f(a))$ et d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Considérant le point M_2 dont l'abscisse x est distante de celle de M_0 de la quantité dx, l'écart séparant l'ordonnée de M_2 et celle de M_0 est donc $df = f'(a)dx$.
Les formalismes du physicien et du mathématicien ne sont pas sans lien : si l'on fait tendre la petite variation physique δx vers 0, autrement dit on rapproche x de a, δx tend vers l'infiniment petit dx. De

1. fonction de l'intensité du courant
2. obtenu par exemple lorsque le condensateur est complètement chargé

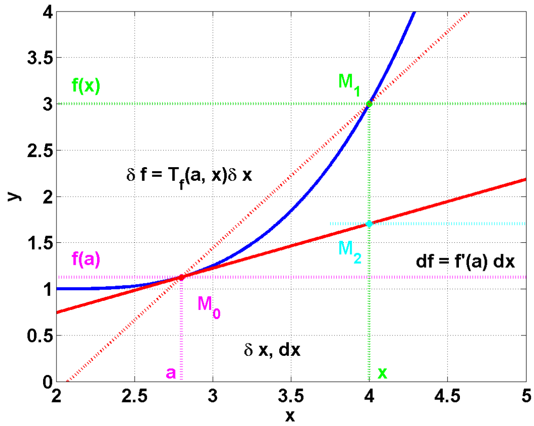


FIGURE 5 – Interprétation graphique de la dérivée et de la différentielle.

même le taux d'accroissement $T_f(a,x)$ tend (par définition) vers la dérivée au point a, $f'(a)$. Donc, en reprenant les équations précédentes, la variation physique sur f, δf, tend vers la différentielle de f, df, en a.
En pratique, le physicien assimile souvent les petites variations physiques à la différentielle, pour pouvoir bénéficier de cet outil mathématique très puissant. Finalement, en assimilant δf à df, il remplace l'étude de la courbe de f au point a par l'étude de la tangente au graphe f au point a. Il obtient ainsi un résultat certes approché, mais dont l'erreur est d'autant plus petite que les variations autour du point le sont.

➔ Exercice 10. *Différentielles et variations* : On considère un carré de côté a, dont la surface en fonction de a est notée $S(a) = a^2$. Par suite d'une variation de température, on suppose que a varie d'une petite quantité [3] notée δa.

1. Calculer sa nouvelle surface $S(a+\delta a)$, la variation absolue de son aire $\delta S = S(a+\delta a) - S(a)$ et la variation relative $\frac{\delta S}{S}$, en fonction de a et de δa.
2. Calculer la différentielle dS de $S(a)$ puis $\frac{dS}{S}$.
3. Que néglige-t-on en assimilant la variation, $\frac{\delta S}{S}$ à la différentielle $\frac{dS}{S}$ (infiniment petite) ?

Même questions pour le volume $V(r)$ d'un ballon de rayon r.

1.2.4 Application : Variations

1.2.4.A Sens de varation

Définition 17 (Sens de variation)**.** Soient deux réels a et b d'un intervalle I de D_f avec $a < b$. La fonction f est :

- **croissante sur** I si et seulement si $f(a) \leq f(b)$
- **strictement croissante sur** I si et seulement si $f(a) < f(b)$
- **décroissante sur** I si et seulement si $f(a) \geq f(b)$
- **strictement décroissante sur** I si et seulement si $f(a) > f(b)$

Exemple 18 (Dent de scie). Son graphe est donné figure 6.

T.22

Théorème 19 (Formule des accroissements finis)**.** *Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

3. Attention δa est un symbole pour représenter la petite variation sur a ; ce n'est pas $\delta \times a$! !

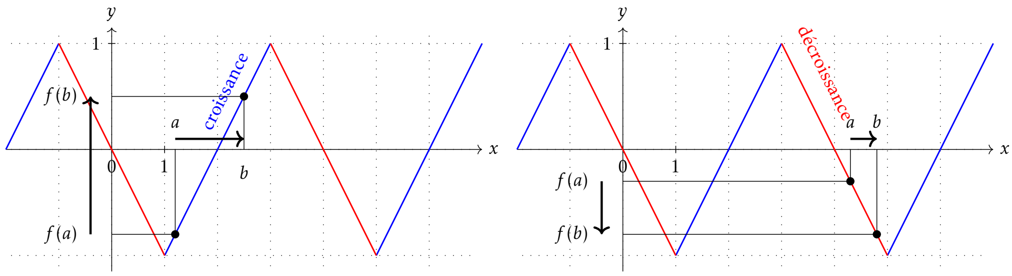


Figure 6 – La dent de scie : une fonction avec des portions croissantes (figure de gauche) et des portions décroissantes (figure de droite).

Corollaire 20 (Sens de variation et dérivée). *Le sens de variation d'une fonction f est donné par* ***signe de la dérivée*** *:*

- *Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I*
- *Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \leq 0$, f est décroissante sur I*

T.23

Remarque (PE) : La fonction f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) si $f'(x) > 0$ (respectivement $f'(x) < 0$) ou si $f'(x) \geq 0$ (respectivement $f'(x) \leq 0$) et l'ensemble des réels de I tel que $f'(x) = 0$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide.

1.2.4.B Extremums

Définition 21 (Extremum). Pour un intervalle I donné, la fonction f admet :

- un **minimum** m sur I si et seulement si pour tout x de I, $f(x) \geq m$: on le note $m = \arg\min_{x\in I} f(x)$;
- un **maximum** M sur I si et seulement si pour tout x de I, $f(x) \leq M$: on le note $M = \arg\max_{x\in I} f(x)$.

Définition 22 (Extremum absolu/local). Si $I = D_f$, l'extremum est **absolu** ; sinon, il est **local**.

Exemple 23 ($f(x) = e^{-x}(\frac{1}{2} + x^3)$). Cette fonction dont le graphe est donné figure 7 présente :

- un maximum absolu $M_{global} \approx 1.4$ atteint en $x_{opt} \approx 3$ et valable sur $\mathbb{R}$;
- un maximum local $M_{local} \approx 0.65$ atteint en $x_{opt} \approx -0.4$ et valable sur $]-\infty; 1]$;
- un minimum local $m_{local} \approx 0.4$ atteint en $x_{opt} \approx 0.5$ et valable sur $[-0.5; 6]$.

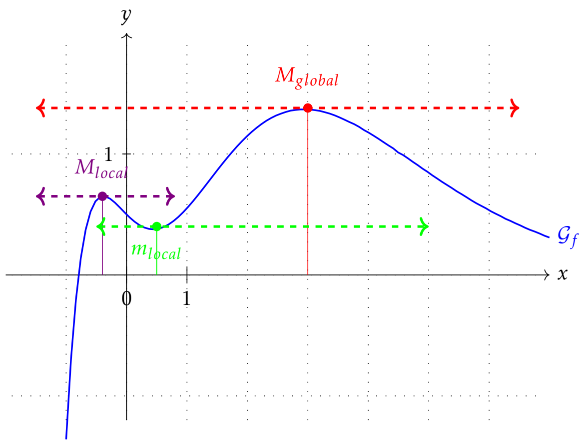


Figure 7 – Maxima et minima.

T.24

Théorème 24 (Extrêma). *Une fonction f, dérivable au voisinage d'un point a, admet un extremum valable sur un voisinage de a si sa dérivée f' s'annule en a (c'est-à-dire $f'(a) = 0$) et change de signe au voisinage de a ; la nature de l'extremum dépend des sens de variation.*

Remarques :

- Si f est décroissante pour $x < a$ et f est croissante pour $x > a$, l'extremum est un minimum.
- Si f est croissante pour $x < a$ et f est décroissante pour $x > a$, l'extremum est un maximum.

T.25

1.2.4.C Exercices

Exercice 11. *Exercice type : Sens de variation* : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes, en précisant s'il y a lieu les extrêma :

1 $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$ 2 $g(x) = 12(x-6)\exp\left(-\frac{1}{4}x\right)$

T.26

Exercice 12. *Étude de fonctions* : Étudier le sens de variation des fonctions de la variable réelle x définies par :

1 $f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x + 5|}$ 2 $g(x) = \dfrac{3x}{x+3}$ 3 $y(x) = x^x$ 4 $y(x) = x^{(x/a)}$

Exercice 13. *Bac S 1996, et oui !* :

1. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\phi(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Montrer que ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire le signe de $\phi(x)$ pour tout $x \geq 0$.
2. Soit la fonction f définie par $f(t) = e^{-t}\ln(1+e^t)$. Étudier à l'aide de la fonction ϕ les variations de f.

T.27

1.2.4.D Exercices de TD

Exercice 14. *Deux nombres* : On considère deux nombres a et b dont la somme vaut 12. Trouver ces deux nombres pour que : 1 la somme de leur carré soit minimale, 2 le produit de l'un et du carré de l'autre soit maximal, 3 le produit de l'un et du cube de l'autre soit maximal.

Exercice 15. *Proximité de deux voitures* : Deux rues se coupent à angle droit en un point P. L'une à la direction nord-sud, l'autre est-ouest. Une voiture venant de l'ouest passe en P à 10h à la vitesse constante de 20 km/h. Au même instant, une autre voiture, situé à 2 km au nord du croisement, se dirige vers le sud à 50 km/h. À quel moment ces deux voitures sont-elles les plus proches l'une de l'autre (à vol d'oiseau) et quelle est cette distance minimale ? T.28

Exercice 16. *Cuisine* : On considère une boîte de conserve cylindrique de hauteur h et de rayon R.

1. On dispose d'une surface de métal S limitée pour construire la boîte de conserve de taille $S = 400\pi$ cm^2. Comment choisir le rayon R et la hauteur h de la boîte pour que son volume V soit maximal ?
2. On souhaite maintenant construire une boîte de volume V_0 donné et fixé. Comment choisir le rayon R et la hauteur h pour que la surface de métal à utiliser soit minimale ? On exprimera la solution en fonction du rapport $\dfrac{h}{R}$.

Mêmes questions avec une casserole. T.29

1.2.5 Application : Réciproque (PE)

1.2.5.A Notion d'injection, de surjection et de bijection

Une fonction f est injective si et seulement si les images de 2 éléments différents de D_f sont différentes, comme l'évoque la figure 8. T.30

Une fonction g est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble image I_g possède au moins un antécédent par g (dans D_g), comme l'évoque la figure 9. T.31

Une fonction h est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble image I_h possède un **unique** antécédent par h, comme l'évoque la figure 10. Dans ce cas, h admet une **fonction réciproque** h^{-1} qui réalise la transformation inverse de h. T.32

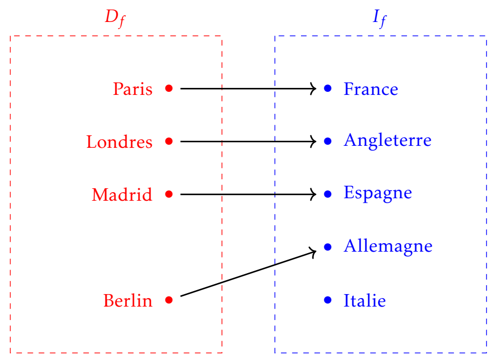


FIGURE 8 – Une transformation injective.

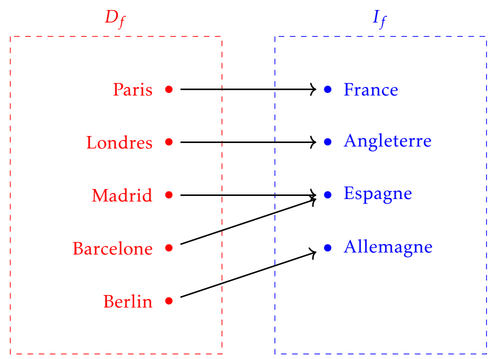


FIGURE 9 – Une transformation surjective.

1.2.5.B Définition

Définition 25 (Bijection)**.** Une fonction f est une **bijection** (ou est **bijective**) de l'intervalle I (sous-ensemble de D_f) vers l'intervalle J (sous-ensemble de I_f) si et seulement si pour tout $y \in J$, l'eq. $y = f(x)$ admet une unique solution x.
Cela signifie que : pour tout $x \in I$, il existe un unique élément $y \in J$ (ce qui se note en mathématique $\exists! y \in J$) tel que $y = f(x)$

Théorème 26 (Condition nécessaire et suffisante)**.** *Pour être une bijection sur l'intervalle I, f doit être* ***continue*** *et* ***strictement monotone*** *sur I.*

T.33

1.2.5.C Image d'un intervalle par une fonction bijective (PE)

Théorème 27 (Image d'un intervalle par une fonction bijective)**.** *Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I vers l'intervalle $J = \{f(x)/x \in I\} = f(I)$. En particulier,*

- *si f est strictement croissante, et $I = [a,b]$ alors $J = f([a,b]) = [f(a), f(b)]$;*
- *si f est strictement décroissante, et $I = [a,b]$ alors $J = f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.*

Exemple 28 (La fonction carré). La fonction carré $f : x \mapsto x^2$, continue sur $\mathbb{R}$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers $f(\mathbb{R}^-)$, avec $f(\mathbb{R}^-) = \left[f(0), \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)\right[= [0;+\infty[$ et f est une autre bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $f(\mathbb{R}^+)$ avec $f(\mathbb{R}^+) = \left[f(0); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[= [0;+\infty[$. Il existe donc deux solutions à l'équation $f(x) = a$ (avec a un réel positif et non nul quelconque). Comme $a \in [0;+\infty[= f(\mathbb{R}^-) = f(\mathbb{R}^+)$, la première solution appartient à $\mathbb{R}^-$ (et est unique dans $\mathbb{R}^-$) et la seconde appartient à $\mathbb{R}^+$ (et est unique dans $\mathbb{R}^+$).

T.34

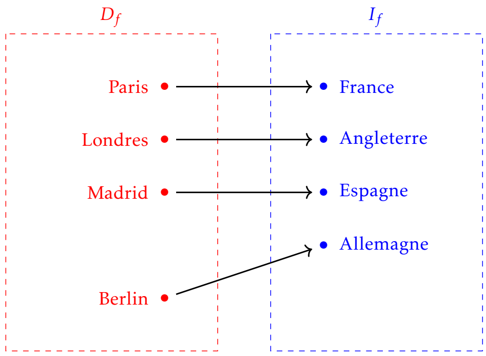


FIGURE 10 – Une transformation bijective.

1.2.6 Fonctions réciproques (PE)

1.2.6.A Définition

Définition 29 (Fonction réciproque). Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J. g est la **fonction réciproque** (ou inverse) de f si et seulement si g est définie en tout point de J **et** pour tout $x \in D_f$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. La réciproque g de f sur I est **unique**. Elle est notée $g = f^{-1}$.

Remarques :

- Une fonction f dont le sens de variation change sur $\mathbb{R}$ admet une réciproque sur chaque intervalle de variation !
- Ne pas confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$.

T.35

1.2.6.B Propriétés de la réciproque

Théorème 30 (Sens de variation). *f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et de même sens de variation que la fonction f.*

Théorème 31 (Propriétés calculatoires).

- *La composée de f^{-1} et de f est l'identité : $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.*
- *La réciproque de la réciproque de f est f : $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x)$.*

T.36

Théorème 32 (Graphe). *Dans un repère orthonormé, les graphes $\mathcal{G}_f$ (de f) et $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ (de f^{-1}) sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice du plan, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.*

Exemple 33 (Graphes de f et f^{-1}). $f(x) = x^4$ et sa réciproque sur $\mathbb{R}^+$ $f^{-1}(x) = x^{1/4}$ ont un graphe symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$ comme le montre la figure 11.

T.37

Exemple 34 (Réciproques usuelles).

- ln et exp
- $x \mapsto x^2$ restreinte à $\mathbb{R}^+$ et $\sqrt{x}$. Attention : $\sqrt{x^2} = |x|$.
- sin restreinte à $[-\pi/2;\pi/2]$ et arcsin
- cos restreinte à $[0;\pi]$ et arccos
- tan restreinte à $]-\pi/2;\pi/2[$ et arctan

T.38

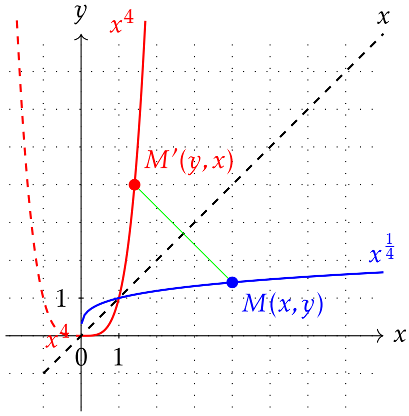


FIGURE 11 – Le graphe de deux fonctions réciproques est symétrique, suivant une symétrie axiale d'axe la 1ère bissectrice du plan.

.

1.2.6.C Exercices (PE)

Méthodologie 35 (Montrer qu'une fonction est la réciproque d'une autre)**.** *Montrer que* $g(f(x)) = f(g(x)) = x$.

➔ Exercice 17. *Réciproque* : Montrer que $g(x) = 1 + x$ est la réciproque de $f(x) = x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Méthodologie 36 (Déterminer une réciproque)**.**

1. *Étudier la continuité et le (ou les) sens de variation de f.*
2. *Poser $y = f(x)$ et inverser l'équation pour avoir $x = g(y)$. Alors $g = f^{-1}$.*

➔ Exercice 18. *Réciproque* : Montrer que $f(x) = (x+1)^{1/3} + 2$ admet une réciproque (sur un intervalle
T.39 que l'on précisera) et donner l'expression de sa réciproque.

➔ Exercice 19. *Composition de fonctions trigonométriques* : Simplifier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1 $x \mapsto \arccos(\cos(x))$	2 $x \mapsto \cos(\arccos x)$
3 $x \mapsto \arctan(\tan(x))$	4 $x \mapsto \tan(\arctan(x))$

➔ Exercice 20. *Réciproque* : Déterminer la (ou les) réciproques de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

➔ Exercice 21. *Réciproque* : On considère la fonction f de la variable x, définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. 1 Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $[1;+\infty[$. 2 Montrer que cette
T.40 réciproque est la fonction $g(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$.

➔ Exercice 22. *Réciproque* : On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle x définies par : $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Pour chacune de ces fonctions, 1 montrer qu'elle possède deux intervalles de monotonie, puis 2 expliciter la fonction inverse relative à chacun de ces intervalles.

➔ Exercice 23. *Résolution d'équations avec des fonctions puissances* :
T.41 Déterminer les racines de l'équation : $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

1.3 Comportements asymptotiques

1.3.1 Limites en l'infini

1.3.1.A Notion de comportement asysmptotique

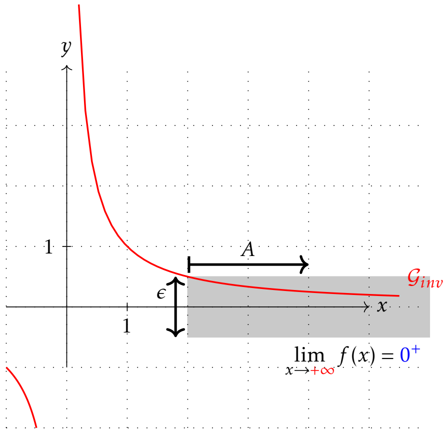


FIGURE 12 – Graphe de la fonction inverse avec focus en $+\infty$.

1.3.1.A.a Notions

Exemple 37 (La fonction inverse). Plus x augmente (autrement dit x tend vers $+\infty$), plus $f(x)$ se rapproche de 0 par valeurs supérieures comme l'illustre la figure 12 ; on dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

T.42

Définitions 38 (Comportements asymptotiques)**.**

- Le comportement asymptotique d'une fonction f de la variable x est la « direction » de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$
- Elle prend la forme d'une limite L qui peut être un nombre $\in \mathbb{R}$ (et on parle de limite finie) ou un infini $+\infty$ ou $-\infty$ (et on parle de limite infinie)
- La limite L peut être atteinte ou approchée par la fonction, en arrivant par valeurs inférieures (L^-) ou supérieures (L^+).

On la note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f = L$$

T.43

1.3.1.A.b Limite finie en l'infini

Cas d'une limite L réelle finie en $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f = L$

Exemple 39 (Fonction inverse). $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (cf. figure 12)

T.44

Cas d'une limite L réelle finie en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} f = L$

Exemple 40 (Exponentielle). $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ (cf. figure 13)

T.45

Cas d'une limite L par valeurs supérieures en ∞

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^+$ signifie que pour x proche de ∞, $f(x)$ tend vers L avec $f(x) \geq L$

Cas d'une limite L par valeurs inférieures en ∞

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^-$ signifie que pour x proche de ∞, $f(x)$ tend vers L avec $f(x) \leq L$

Exemple 41 (Fonction inverse). $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ (cf. figure 14)

T.46

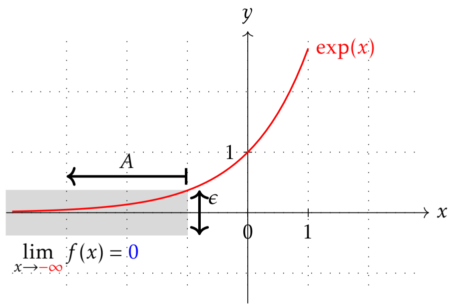


FIGURE 13 – La limite 0 en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

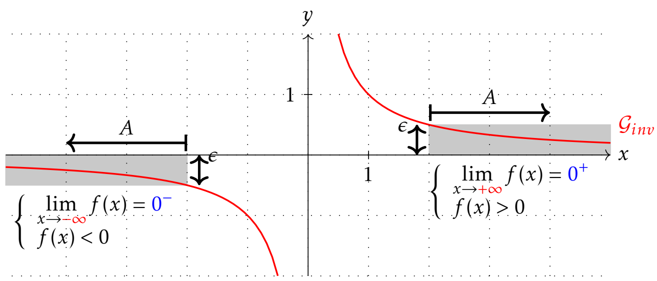


FIGURE 14 – Limites asymptotiques de la fonction inverse.

1.3.1.A.c Limite infinie en l'infini

Cas d'une limite $+\infty$ en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = +\infty$, ce qui implique que $f(x) > 0$ pour x suffisamment grand

Exemple 42 (Valeur absolue). $\lim_{x\to+\infty} |x| = +\infty$ (cf. figure 15)

Remarque : Idem pour une limite en $-\infty$ et pour une limite $-\infty$

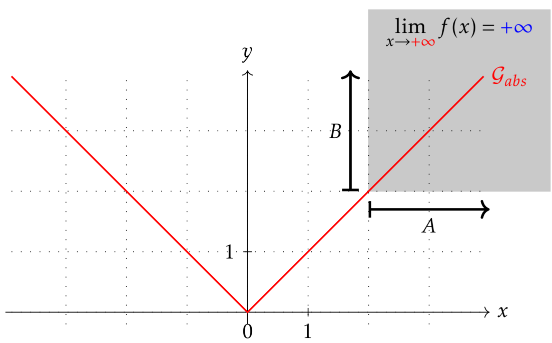


FIGURE 15 – La fonction valeur absolue : Cas d'une limite $+\infty$ en $+\infty$.

T.47

1.3.1.B Définitions (PE)

Définition 43 (Limite finie en l'infini)**.** Soit $L \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = L$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $x > A$ alors $|f(x) - L| < \epsilon$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut à la condition de prendre x suffisamment grand.
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = L^+$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $x > A$ alors $0 \leq f(x) - L < \epsilon$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f = L^-$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $x > A$ alors $0 \leq L - f(x) < \epsilon$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} f = L$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour $x \in D_f$: si $x < -A$, alors $|f(x) - L| < \epsilon$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut à la condition de prendre x suffisamment petit.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} f = L^+$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour $x \in D_f$: si $x < -A$, alors $0 \leq f(x) - L < \epsilon$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} f = L^-$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour $x \in D_f$: si $x < -A$, alors $0 \leq L - f(x) < \epsilon$.

Remarque : ϵ est la lettre grecque habituellement choisie pour désigner de « petites » quantités.

Définitions 44 (Limites infinies en l'infini)**.** Soit f une fonction de la variable réelle x.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ si et seulement si pour tout $B > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour $x \in D_f$: si $x > A$, alors $f(x) > B$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment grand.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ si et seulement si pour tout $B > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $x < -A$, alors $f(x) > B$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ si et seulement si pour tout $B > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $x > A$, alors $f(x) < -B$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ si et seulement si pour tout $B > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $x < -A$, alors $f(x) < -B$

1.3.2 Calcul de limites

1.3.2.A Limites asymptotiques des fonctions usuelles

Les limites asymptotiques (en $+\infty$ et $-\infty$) des fonctions usuelles sont résumées table 3.

Fonction $f(x)$	**Limite en $-\infty$**	**Limite en $+\infty$**
Constante c	c	c
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	n.d. si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$
Inverse $\frac{1}{x}$	0^-	0^+
$\ln(x)$	n.d.	$+\infty$
$\exp(x)$	0^+	$+\infty$
$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$	p.d.l.	p.d.l.
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}^+$	$\frac{\pi}{2}^-$

Table 3 – Limites asymptotiques usuelles; les abréviations signifient n.d.=non défini, p.d.l.=pas de limite.

T.48

1.3.2.B Opérations sur les limites

Étant donnée deux fonctions u et v dont on connaît les limites, on peut déterminer - grâce à différents théorèmes - les limites des fonctions somme, différence, amplification, produit et quotient. Les résultats de ces théorèmes utilisent la fonction signe :

Définition 45 (Fonction signe)**.** La **fonction signe** est une fonction de la variable réelle définie par

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{si } x > 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \\ -1 & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1.3.2.B.a Limites d'une somme, d'une amplification, d'un produit, d'un quotient

Les limites asymptotiques en $+\infty$ des différents assemblages de fonctions sont données table 4 pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et s un signe (égal à $+1$ ou -1)

	$\lim\limits_{+\infty} u$	$\lim\limits_{+\infty} v$	$\lim\limits_{+\infty} \lambda u$	$\lim\limits_{+\infty} u+v$	$\lim\limits_{+\infty} u.v$	$\lim\limits_{+\infty} \frac{u}{v}$
Finie-Finie	L_u	L_v	λL_u	$L_u + L_v$	$L_u L_v$	$\frac{L_u}{L_v}$
	L_u	0^+	λL_u	L_u	0	$\text{sign}(L_u)\infty$
	L_u	0^-	λL_u	L_u	0	$-\text{sign}(L_u)\infty$
	0	0	0	0	0	FI
Finie-Infinie	$s\infty$	L_v	$\text{sign}(s\lambda)\infty$	$s\infty$	$\text{sign}(sL_v)\infty$ si $L_v \neq 0$ FI si $L_v = 0$	$\text{sign}\left(\frac{s}{L_v}\right)\infty$
	L_u	$s\infty$	λL_u	$s\infty$	$\text{sign}(sL_u)\infty$ si $L_u \neq 0$ FI si $L_u = 0$	0
Infinie-Infinie	$+\infty$	$+\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
	$-\infty$	$-\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
	$+\infty$	$-\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI
	$-\infty$	$+\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI

Table 4 – Opérations sur les limites asymptotiques avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et s un signe (égal à $+1$ ou -1) ; l'abréviation FI indique une forme indéterminée.

T.49 **Remarque** : Résultats identiques lorsque la limite est asymptotique en $-\infty$

1.3.2.B.b Limites d'une composée

Théorème 46 (Limite d'une composée)**.** *Si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = L$ (avec L un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$) alors*

$$\lim_{x\to+\infty} (v \circ u)(x) = \lim_{x\to+\infty} v(u(x)) = \lim_{y\to L} v(y)$$

T.50 **Remarque** : Le résultat est identique lorsque $x \to -\infty$

1.3.2.B.c Bilan des formes indéterminées

Théorème 47 (Les classiques)**.** $\boxed{(+\infty)+(-\infty)}$ $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ $\boxed{0.\infty}$ $\boxed{\frac{0}{0}}$

Théorème 48 (Les nouvelles)**.** $\boxed{1^\infty}$ $\boxed{\infty^0}$ $\boxed{0^0}$

T.51

1.3.2.B.d Exercices

Méthodologie 49 (Calcul de limites asymptotiques)**.**

1. *Identifier les fonctions usuelles et donner leurs limites ;*
2. *Identifier le (ou les) assemblages de fonctions usuelles puis calculer la limite de proche en proche en utilisant les règles sur les limites ;*
3. *En cas de forme indéterminée :*

- *Quelques astuces (cf TD);*
- *Utiliser des outils plus puissants, comme l'équivalence ou les développements limités.*

➜ Exercice 24. *Exercice type : Limites :* Déterminer les limites suivantes :
1 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\ln(x)$ 2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$

T.52

➜ Exercice 25. *Limites :* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes :

1 $f(x) = 2x^2+x+1$ 2 $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{|x-3|}$ 3 $f(x) = x^2-x^3$

➜ Exercice 26. *Limites avec forme indéterminée de type ∞ - ∞ :* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et (si elle existe) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes :

1 $f(x) = \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ 2 $f(x) = \sqrt{x^2+2x}-x$ 3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|+2}-\sqrt{|x|}}{|x|}$
4 $f(x) = \ln(x)-\ln(x+1)$ 5 $f(x) = \ln(x^2+1)-2\ln(x)$

T.53

1.3.2.C Relations d'ordre

Théorème 50 (Relation d'ordre en $+\infty$)**.** *Soient deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout x suffisamment grand (i.e. tendant vers $+\infty$),*

1. *si $u(x) \geq v(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} v = +\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$,*
2. *si $u(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} v = -\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$,*
3. *si $|u(x)-l| \leq v(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} v = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty} u = l$.*

Théorème 51 (Relation d'ordre en $-\infty$)**.** *Soient deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout x suffisamment proche de $-\infty$,*

1. *si $u(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} v = -\infty$, alors $\lim\limits_{-\infty} u = -\infty$,*
2. *si $u(x) \geq v(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} v = +\infty$, alors $\lim\limits_{-\infty} u = +\infty$.*
3. *si $|u(x)-l| \leq v(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} v = 0$, alors $\lim\limits_{-\infty} u = l$.*

T.54

Théorème 52 (Théorème du gendarme)**.** *Soient trois fonctions u, v et w, définies sur $\mathbb{R}$ et a désignant indifféremment un réel fixé, $+\infty$ ou $-\infty$. Si $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ et $\lim\limits_a u = \lim\limits_a w$, alors $\lim\limits_a u = \lim\limits_a v = \lim\limits_a w$.*

T.55

➜ Exercice 27. *Limites avec les relations d'ordre :* Calculer la limite de la fonction $f(x) = \big(2+\cos(x)\big)x$ en $+\infty$.
Correction : Cette limite n'est pas immédiate car $\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Par contre, on sait que pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $1 \leq 2+\cos(x) \leq 3$. Dès lors que x devient assez grand (notamment x devient positif), on déduit en multipliant l'inégalité précédente par x que $x \leq f(x) \leq 3x$. Comme les deux fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 3x$ tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, alors par relation d'ordre, $f(x)$ aussi : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. T.56

1.3.2.D Équivalence en l'infini

Les équivalences sont un outil mathématique puissant, particulièrement utiles pour lever des formes indéterminées dans le calcul de limite.

1.3.2.D.a Définitions

Définition 53 (Équivalence en ∞)**.** Deux fonctions f et g sont **équivalentes au voisinage de** a (avec $a=+\infty$ ou $a=-\infty$) si et seulement si $f(x)=g(x)(1+\epsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to a}\epsilon(x)=0$. On le note : $f\underset{a}{\sim}g$ ou $f(x)\underset{x\to a}{\sim}g(x)$

Remarques :

- Deux fonctions équivalentes ont une même limite !
- Seule la fonction nulle est équivalente à 0.

Théorème 54 (Équivalence et limite)**.** *Si $f\underset{a}{\sim}g$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)$*

T.57

1.3.2.D.b Équivalences usuelles

Théorème 55 (Équivalent d'un polynôme)**.** *Un polynôme $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ un polynôme de degré n (avec $a_n\neq 0$) est tel que $P(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}a_nx^n$*

Exemple 56 (Équivalent de $P(x)=3x^4-2x=3x^4+0x^3+0x^2-2x^1+0$)**.** $P(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}3x^4$ et $P(x)\underset{x\to-\infty}{\sim}3x^4$

Théorème 57 (Équivalent d'une fraction rationnelle)**.** *Une fraction rationnelle $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ de degré n et $Q(x)=b_mx^m+\ldots+b_1x+b_0$ de degré m admet pour équivalent le quotient des équivalents de $P(x)$ et $Q(x)$.*

Exemple 58 (Équivalent de $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{3x^4-2x}{6x^3+4x^2+1}=\dfrac{3x^4+0x^3+0x^2-2x^1+0}{6x^3+4x^2+0x+1}$)**.** $F(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{3x^4}{6x^3}=\dfrac{x}{2}$

T.58

1.3.2.D.c Opérations sur les équivalents

Opérations sur les équivalents

- On peut multiplier, inverser, diviser ou dilater des équivalents
- On ne peut pas ajouter, soustraire ou composer des équivalents, sauf cas très particulier

Théorème 59 (Opérations sur les équivalences)**.** *Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre fonctions telles que $f_1\underset{+\infty}{\sim}f_2$ et $g_1\underset{+\infty}{\sim}g_2$ et $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Alors :*

- $\lambda f_1(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\lambda f_2(x)$
- $\dfrac{1}{f_1(x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{f_2(x)}$
- $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$
- $f_1(\lambda x)\underset{x\to+\infty}{\sim}f_2(\lambda x)$

T.59 **Remarque** : Idem en $-\infty$

1.3.2.D.d Exercices

Exercice 28. *Exercice type : Équivalents* : Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

T.60

Exercice 29. *Limites de fractions rationnelles* : Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f suivantes :

1 $f(x)=\dfrac{7x+3}{4x^2-3x+13}$ **2** $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$ **3** $f(x)=\dfrac{2x+|2x+5|}{5x-1}$

T.61

1.3.2.E Croissance comparée

1.3.2.E.a Définition

Définition 60 (Fonction négligeable en l'infini)**.** Une fonction f est **négligeable en** a devant une fonction g (avec $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) si et seulement si $f(x) = \epsilon(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$. On le note : $f \underset{a}{\ll} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x)$

Théorème 61 (Règles de croissance comparée)**.** *On a* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ *(avec* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$*). On dit que :* $\ln(x) \ll x^\alpha \ll e^x$ ***en*** $+\infty$ *comme l'illustre la figure 16.*

T.62

➲ Exercice 30. *Exercice type : Limites asymptotiques :* Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) \dfrac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}}$.

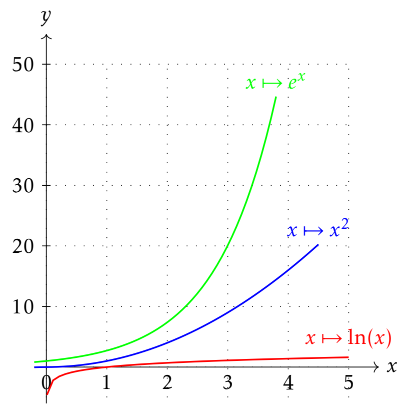


Figure 16 – « ln croit moins vite que les puissances, qui croissent moins vite que l'expo vers $+\infty$ ».

T.63

1.3.2.E.b Exercices de TD

➲ Exercice 31. *Limites avec croissance comparée :* Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et lorsqu'elle existe, lorsque x tend vers $-\infty$, des fonctions f suivantes :

1 $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ 2 $f(x) = x^3 - 2^x$ 3 $f(x) = (x+1)e^{-x}$ 4 $f(x) = \dfrac{e^{2x} - x^2}{e^{2x+1}}$

5 $f(x) = \dfrac{3^x}{x^4}$ 6 $f(x) = \sqrt{x+1}e^{-3x}$ 7 $f(x) = \dfrac{e^{1+x^2}}{x^2\ln(x)}$ 8* $f(x) = \dfrac{10^x}{\sqrt{x^2+1}}$

T.64

➲ Exercice 32. *Accroissements finis (pour les poursuites d'études longues) :* Cet exercice utilise la formule des accroissements finis donnée par : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, pour $h = b - a$, il existe un réel θ (avec $0 < \theta < 1$) tel que $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$.
Déterminer la valeur prise par θ lorsque la fonction f est définie par :

1 $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 2 $f(x) = e^x$

Calculer, dans chacun des cas, la limite de θ quand l'écart h tend vers 0.

T.65

➲ Exercice 33. *Série harmonique (pour les poursuites d'études longues) :*
Cet exercice utilise la formule des accroissements finis donnée par : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, pour $h = b - a$, il existe un réel θ (avec $0 < \theta < 1$) tel que $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$.

1. Donner un encadrement de $\ln(a+h)$ et l'appliquer lorsque $a = 1$ et $h = \dfrac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire un encadrement de $\ln(n+1) - \ln(n)$, $\ln(n) - \ln(n-1)$, et ainsi de suite jusqu'à $\ln(2) - \ln(1)$.

3. Déduire aussi un encadrement de $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.
4. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

T.66

1.3.3 Application : Branches asymptotiques (PE)

Lors du tracé du graphe d'une fonction f, une branche infinie apparaît dès lors que l'une au moins des coordonnées x ou $y = f(x)$ tend vers l'infini. La question est alors de savoir « comment » le graphe tend vers l'infini, notamment s'il suit une direction (un axe) particulière. L'étude des branches asymptotiques ou branches infinies est donc indispensable à l'étude du comportement global d'une fonction, et facilite la représentation graphique. Elle est essentiellement liée à un calcul de limites asymptotiques.
Un premier exemple, vu au lycée, est les **asymptotes verticales** au point a (avec a un réel) : ces asymptotes se produisent lorsque la fonction f tend vers l'infini en ce point particulier a. Ainsi, si $\lim_a f = \pm\infty$, alors la droite verticale d'équation $x = a$ est une asymptote verticale du graphe de f. On se reportera à la partie 1.4 pour le calcul de limites en un point.
Dans cette partie, on va s'intéresser aux branches de la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

1.3.3.A Définitions

Objectifs
Évaluer « comment » une fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, autrement dit quelle est sa direction dominante parmi : 1 les droites $(0x)$, $(0y)$, 2 les droites de la forme $y = ax + b$, 3 les branches de la forme $y = ax^2$ guidées par une droite.

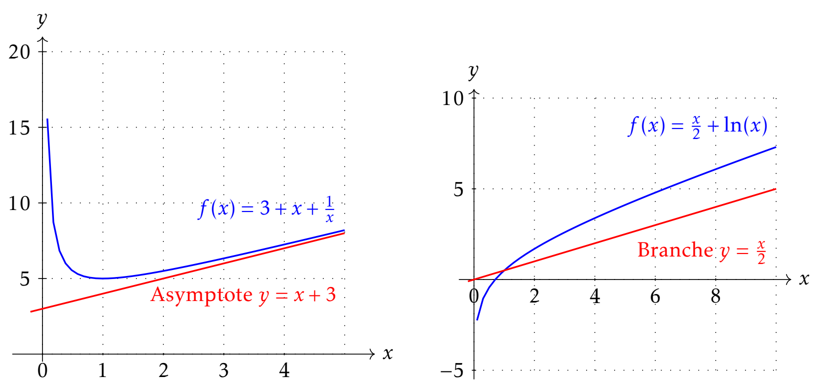


Figure 17 – Un exemple de droite asymptotique (à gauche) et de branche parabolique (à droite).

T.67

1.3.3.B Méthodologie

Les étapes du calcul des asymptotes et des branches paraboliques lorsque x tend vers $+\infty$ est donnée figure 18.

T.68 **Remarque** : Résultats identiques lorsque $x \to -\infty$

1.3.3.C Exercices (PE)

T.69 ➔ Exercice 34. *Asymptotes* : Déterminer la branche asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$: $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x - 2}$.

➔ Exercice 35. *Asymptotes* : Déterminer le comportement asymptotique de $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x - 2}{x + 2}$ en $+\infty$.

➔ Exercice 36. *Branches asymptotiques* : Déterminer les branches asymptotiques des fonctions suivantes :

1* $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 3}$ 2* $f(x) = 2(2 - x) + \dfrac{1}{4}\dfrac{x}{x + 2}$

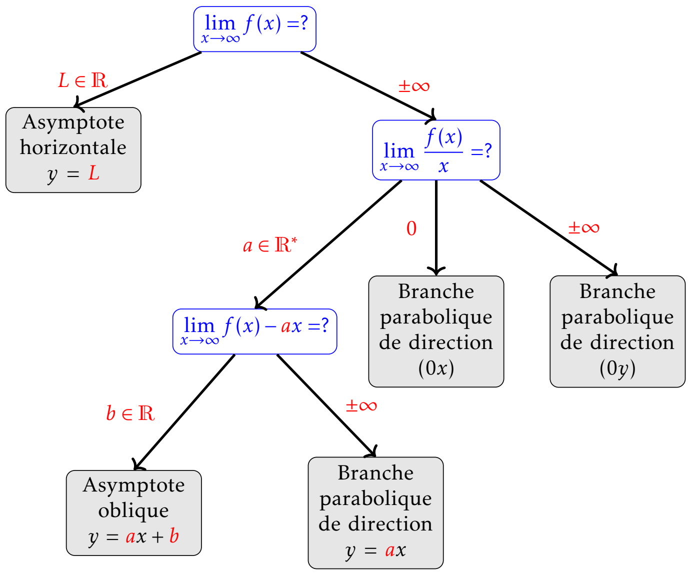
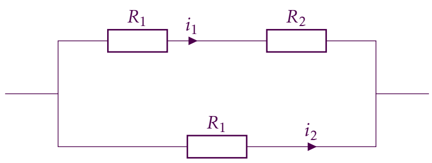


FIGURE 18 – Méthodologie pour le calcul des asymptotes et branches asymptotiques.

T.70 ➔ Exercice 37. *Étude d'un schéma électronique* :
On considère le montage suivant :



où R_1 est une résistance de x Ohms et R_2 une de 3 Ohms.

1. Exprimer la résistance équivalente du circuit, notée R, en fonction de x.
2. Étudier les variations de R en fonction de x, ainsi que les branches infinies (on envisagera la possibilité d'une asymptote en l'infinie). Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de R pour x variant entre 0 et 6 Ohms.
3. À partir de quelle valeur de x la différence $\left|R - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)\right|$ est-elle inférieure à $1/100$? En déduire une valeur approchée de R lorsque $x = 120$ Ohms. T.71

1.4 Comportements locaux

On s'intéresse maintenant à l'analyse du comportement local d'une fonction f de la variable réelle x, c'est-à-dire aux variations de $f(x)$ lorsque x est à proximité (au voisinage) d'une valeur réelle a fixée.

1.4.1 Limites en un point a

1.4.1.A Notion de comportement local

1.4.1.A.a Notion

Exemple 62 (Fonction inverse). Lorsque $x \to 0$ (par valeurs supérieures), $f(x)$ croit indéfiniment ; on dit que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ comme l'illustre la figure 19. T.72

Définitions 63 (Comportement local)**.**

- Le comportement local d'une fonction f de la variable x est la « direction » de f lorsque x tend vers a, soit des deux côtés, soit par valeurs inférieures (a^-), soit par valeurs supérieures a^+.

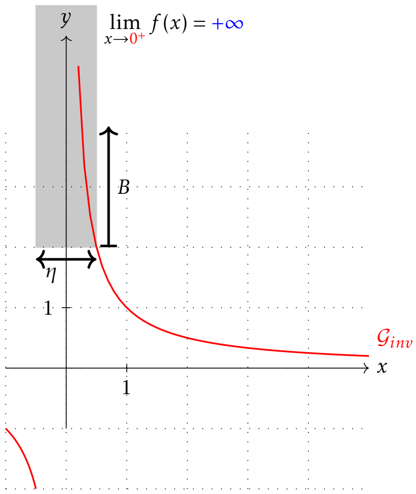


Figure 19 – La fonction inverse, cas d'une limite $+\infty$ en 0 par valeurs supérieures.

- Elle prend la forme d'une limite L qui peut être un nombre $\in \mathbb{R}$ ou un infini $\pm\infty$.
- La limite L peut être atteinte ou approchée par la fonction, en arrivant par valeurs inférieures (L^-) ou supérieures (L^+).

On la note : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_a f = L$

Remarque
Très souvent $a = 0$.

T.73

1.4.1.A.b Limite finie en un point

Cas d'une limite finie $L \in \mathbb{R}$ ***en*** $a \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_a f = L$

Exemple 64 (Sinus cardinal). $\lim_{x\to 0} \mathrm{sinc}(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ comme l'illustre la figure 20

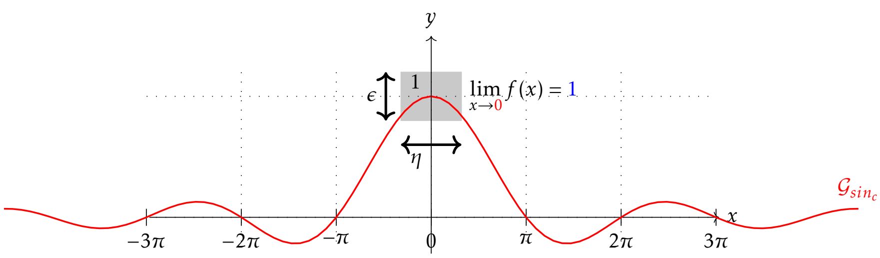


Figure 20 – La fonction sinus cardinal, de limite 1 en 0.

T.74

1.4.1.A.c Limite infinie en un point

Cas d'une limite $+\infty$ ***en un point*** $a \in \mathbb{R}$
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_a f = +\infty$

Exemple 65 ($f(x) = \frac{1}{|x|}$). de limite $+\infty$ lorsque $x \to 0$ (cf. graphe donné figure 21)

T.75

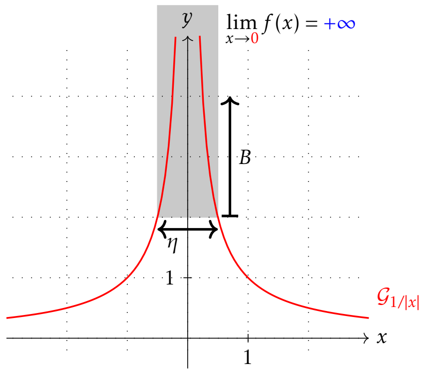


Figure 21 – La fonction valeur absolue, de limite 0 en 0.

1.4.1.A.d Valeurs supérieures ou inférieures

1. Si $x \to a^+$, alors $x \to a$ et $x \geq a$
2. Si $x \to a^-$, alors $x \to a$ et $x \leq a$

De même, pour $L \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L^+$, alors $f(x) \to L$ et $f(x) \geq L$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L^-$, alors $f(x) \to L$ et $f(x) \leq L$

T.76

1.4.2 Définitions (PE)

Définition 66 (Limites en un point)**.** Soit f une fonction de la variable réelle x, $a \in \mathbb{R}$ un point et $L \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = L$, si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$ alors $|f(x) - L| < \epsilon$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = +\infty$, si et seulement si pour tout $B > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$, alors $f(x) > B$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = -\infty$, si et seulement si pour tout $B > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$, alors $f(x) < -B$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi petit que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a.

T.77

Interprétation graphique de la définition des limites
Prenons l'exemple d'une limite finie L en un point a (cf. graphe du sinus cardinal figure 20). On est assuré que tous les points du graphe G_f, c'est-à-dire les points $M(x, f(x))$ au voisinage du point (a, L) se trouvent à l'intersection de deux tuyaux :

- ▶ le premier, vertical, représente les points du plan dont l'abscisse x est distante de a d'au plus η (à gauche comme à droite de a), c'est-à-dire tel que $0 < |x - a| < \eta$,
- ▶ le second, horizontal, représente les points du plan dont l'ordonnée y est distante de l d'au plus ϵ (en dessous comme au dessus de l), dès que l'on a pu trouver un η satisfaisant, c'est-à-dire tel que $|f(x) - l| < \epsilon$.

Valeurs supérieures ou inférieures
Dans les définitions précédentes, on fait tendre x vers a indifféremment par valeurs supérieures à a (à droite de a) ou par valeurs inférieures à a (à gauche de a). On peut limiter la façon de faire tendre x vers a :

- ▶ soit aux valeurs supérieures de a (à la partie à droite de a dans le tuyau) ; on parlera alors de **limite par valeur supérieure**, notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, et dont les définitions effectives sont :

— $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$ si $0 < x - a < \eta$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$
— $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall B > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$ si $0 < x - a < \eta$ alors $f(x) > B$
— $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ si et seulement si $\forall B > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$ si $0 < x - a < \eta$ alors $f(x) < -B$

▸ soit aux valeurs inférieures de a (à la partie à gauche a dans le tuyau) ; on parlera alors de **limite par valeur inférieure**, notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ et définie par :

— $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$ si $0 < a - x < \eta$ alors $|f(x) - l| < \epsilon$
— $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall B > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$ si $0 < a - x < \eta$ alors $f(x) > B$
— $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ si et seulement si $\forall B > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f$ si $0 < a - x < \eta$ alors $f(x) < -B$

Ces définitions étant relativement complexes et donc peu utilisables en pratique, nous allons être amenés à définir un ensemble d'outils pour pouvoir calculer la limite des fonctions.

1.4.3 Calcul de limites

Le calcul des limites locales utilise plusieurs théorèmes dans lesquels le point d'étude a est quasi systématiquement 0. Pour étudier la fonction en un point autre que 0 on procède en général à un changement de variable.

1.4.3.A Limites locales en 0 des fonctions usuelles en 0

Les limites des fonctions usuelles $f(x)$ lorsque x tend vers 0 sont données table 5.

Fonction $f(x)$	**Limite en** 0	**Fonction** $f(x)$	**Limite en** 0
Constante c	c	$\sin(x)$	0
Puissance x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	0	$\cos(x)$	1
Racine carrée $\sqrt{x}$	0^+	$\tan(x)$	0
Inverse $\frac{1}{x}$	$+\infty$ si $x \to 0^+$ $-\infty$ si $x \to 0^-$	$\arcsin(x)$	0
Log népérien $\ln(x)$	$-\infty$ pour $x \to 0^+$	$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$
Exponentielle e^x	1	$\arctan(x)$	0

TABLE 5 – Limites des fonctions usuelles en 0

T.78

1.4.3.B Opérations sur les limites

Remarque :

- Mêmes théorèmes que pour les comportements asymptotiques (cf section 1.3.2.B)
- Mêmes formes indéterminées

T.79

1.4.3.C Exercices

1.4.3.C.a Exercices types

➜ Exercice 38. *Exercice type : Limite locale* : Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{2 + \frac{1}{x}}$.

T.80

1.4.3.C.b Exercices de TD

Exercice 39. *Limites en 0 :* Calculer les limites en 0 des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{|x-3|}$
2. $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$
4. $f(x) = \dfrac{2x+|2x+5|}{5x-1}$
5. $f(x) = \dfrac{|x(x-1)|\ln(x)}{x^3}$

T.81

1.4.3.D Équivalence en 0

1.4.3.D.a Rappel

Équivalence en 0
Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de 0 si elles sont égales au voisinage de 0 à un epsilon près : $f(x) = g(x)(1+\epsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. Leurs graphes se tangentent et elles ont la même limite en 0. On le note : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$

Exemple 67 (Équivalent de tan). $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$: on voit bien sur la figure 22 que la fonction $x \mapsto x$ tangente la fonction tan au voisinage de 0 ; par contre, plus x s'éloigne de 0, moins $\tan(x)$ et x sont proches.

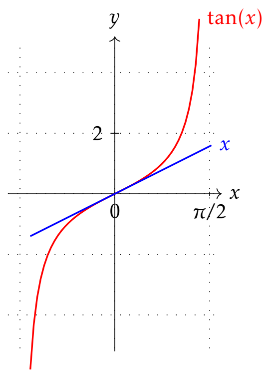


Figure 22 – Équivalence de tangente et l'identité au voisinage de 0.

T.82

1.4.3.D.b Équivalences usuelles en 0

Les équivalences usuelles au voisinage de 0 sont données pour un $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ table 6.
Remarque : Même application au calcul de limites que pour les comportements asymptotiques, même opérations licites T.83

1.4.3.D.c Exercices types

Exercice 40. *Exercice type : Limites via équivalences :* Calculer :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}}{x}$

T.84

1.4.3.E Calcul de limite en a réel non nul

$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$	$(1-x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\alpha x$
$\dfrac{1}{(1-x)^\alpha} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$	$\dfrac{1}{(1+x)^\alpha} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\alpha x$
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$
$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ $a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(a)$
$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \underset{x\to 0}{\sim}$ le monôme $a_i x^i$ de plus petit degré tel que a_i soit non nul	
$F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to 0}{\sim}$ le quotient des équivalents de $P(x)$ et $Q(x)$	

Table 6 – Équivalents usuels lorsque x au voisinage de 0 et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

1.4.3.E.a Changement de variable

Partant de n'importe quel réel a, on peut toujours se ramener en 0 en utilisant un changement de variable (en abrégé CV [4]).

Théorème 68 (Changement de variable (CV))**.** *Étant donnée une variable x tendant vers a et une variable t choisie de sorte que $x = u(t)$ et $t = v(x)$ avec u et v deux fonctions, alors :* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to b} f(u(t))$ *avec* $b = \lim\limits_{x\to a} v(x)$

Remarque : v n'est autre que la réciproque de u ($v = u^{-1}$) vu section 1.2.5.

Méthodologie 69 (CV pour un calcul de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$)**.**

1. *Poser le cv $x = u(t)$ et inverser le cv pour obtenir $t = v(x)$;*
2. *Réécrire l'expression de $f(x)$ en fonction de t en remplaçant, dans la règle de définition de f, tous les x par $v(t)$, pour obtenir $f(v(t))$;*
3. *Calculer $b = \lim\limits_{x\to a} v(x)$;*
4. *Conclure que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to b} f(u(t))$.*

T.85

Exercice 41. *Exercice type : Changement de variable* : Calculer les limites suivantes en utilisant les changements de variables proposés :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ $\boxed{y = \dfrac{1}{x}}$ **2** $\lim\limits_{x\to-2} 2(2-x) + \dfrac{1}{4}\dfrac{x}{x+2}$ $\boxed{y = x + 2}$

T.86

1.4.3.E.b Changements de variable usuels

Théorème 70 (Changements de variable usuels)**.** *Les CV usuels sont :*

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{y\to 0} f(y+a)$ $\boxed{y = x - a}$ $\boxed{x = y + a}$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{y\to 0} f(a-y)$ $\boxed{y = a - x}$ $\boxed{x = a - y}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{y}\right)$ $\boxed{y = \dfrac{1}{x}}$ $\boxed{x = \dfrac{1}{y}}$

4. Attention : ne pas le confondre avec l'abréviation de convergence aussi noté CV mais dans un autre contexte

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{y\to-\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\boxed{y = \frac{1}{x}}$ $\boxed{x = \frac{1}{y}}$

T.87

1.4.3.E.c Exercices de TD

Exercice 42. *Changements de variable* : Déterminer les limites suivantes en faisant les changements de variables proposés :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{2x^2-x-1}$ $\boxed{u = x-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}\ln\left(1+\frac{1}{x-2}\right)$ $\boxed{u = x-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}\ln(x-1)$ $\boxed{u = 2-x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\tan\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{u = \frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ $\boxed{u = \frac{1}{x}}$
6. * $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{u = \frac{1}{x}}$

T.88

1.5 Développements limités (PE)

Le développement limité (en abrégé DL) d'une fonction f au voisinage d'un point a est une réécriture de l'expression $f(x)$ lorsque x est au voisinage de a (c'est à dire $x \approx a$) sous la forme d'un polynôme et d'un reste.
Ce DL est très utile pour le physicien lorsqu'il veut faire l'approximation d'une fonction : il remplace la fonction par le polynôme et omet le reste (à condition que l'erreur commise par cette approximation soit négligeable/tolérable).
On peut définir le DL d'une fonction en n'importe quel point a de son domaine de définition. Néanmoins, dans la pratique, on utilise généralement le DL au point 0 (puisque partant d'un point a, on peut toujours effectuer un changement de variable pour se ramener en 0 en utilisant le même principe que pour les limites). Nous nous limiterons donc à ce cas de figure.

1.5.1 Définitions

1.5.1.A Principe

Principe
Les DLs permettent d'approcher **de plus en plus précisément** et **localement** (pour x autour de a) l'image $f(x)$ par un polynôme $P(x)$.
Un DL aura un **ordre** qui indique le degré d'approximation de la fonction f.

Remarque
En général, $a = 0$; sinon, on effectue un changement de variable pour se ramener en 0.

Exemple 71 (DLs de tan en 0).

- $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$: l'équivalent en 0 est aussi le DL à l'ordre 1
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$: DL à l'ordre 3 avec un polynôme de degré 3
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x)$: DL à l'ordre 5 avec un polynôme de degré 5

Remarque
Les DLs sont incrémentales avec l'ordre

T.89

Définition 72 (DL à l'ordre n)**.** Le **développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** 0 d'une fonction f prend la forme d'un **polynôme** à coefficients réels $P_n(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ de degré au plus égal à n, de sorte que pour tout x proche de 0, il existe une fonction ϵ telle que $f(x) = P_n(x) + +x^n\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

T.90

1.5.1.B Formule de Taylor-Young

Théorème 73 (Formule de Taylor-Young pour les DLs en 0)**.** *Une fonction f dérivable n fois au voisinage de 0 admet un DL unique, donné par :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

*où la **factorielle** de n est définie par :* $n! = \begin{cases} 1\times 2\times \dots \times (n-1)\times n & , si\ n\neq 0 \\ 1 & , si\ n = 0 \end{cases}$ *et ϵ est une fonction telle que* $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

T.91 ➔ Exercice 43. *Exercice type : DL avec Taylor-Young* : Donner le DL de e^x à l'ordre 5.

Théorème 74 (Décrémenter l'ordre d'un DL)**.** *Pour passer d'un DL à l'ordre n à un DL à un ordre m inférieur, il suffit de tronquer le polynôme à l'ordre m, c'est à dire d'effacer toutes les puissances de x de degré supérieur à m.*

Exemple 75 (DL à l'ordre 3 de e^x). Sachant $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$ (DL à l'ordre 5), alors $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ à l'ordre 3

T.92

1.5.1.C Négligeabilité (PE)

Les DLs utilisent en réalité la notion de négligeabilité et de fonction négligeable ainsi définie :

Définition 76 (Négligeabilité)**.** Une fonction f est dite **négligeable** devant le monôme x^n (avec $n \in \mathbb{N}$) **au voisinage de** 0 (noté $\mathcal{V}_0$) si f est définie sur $\mathcal{V}_0$ et si $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n} = 0$. On note alors : $\forall x \in \mathcal{V}_0, f(x) = o(x^n)$, avec $o(x^n)$ se lisant "petit 'o' de x^n".

Dans le DL, $o(x^n) = +x^n\epsilon(x)$.
Les $o(x^n)$ ont des propriétés cruciales pour comprendre comment se manipulent les DLs :

Théorème 77. *Au voisinage de 0, tout **monôme** de type $f(x) = x^m$ (avec $m \in \mathbb{N}^*$) est **négligleable devant** x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) à condition que $m > n$. Autrement dit : $x^m = o(x^n)$ avec $m \geq n$*

Théorème 78. *La **somme** d'une fonction f négligeable devant x^m (avec $m \in \mathbb{N}^*$) et d'une fonction g négligeable devant x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq n$) est négligeable devant x^n, autrement dit $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$*

Démonstration. En effet, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x^n} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x^m}\frac{x^m}{x^n} + \frac{g(x)}{x^n}\right)$. Or $\frac{f(x)}{x^m}$ tend vers 0 (par négligence de f devant x^m, $\frac{x^m}{x^n}$ tend vers 0 car $m > n$ et $\frac{g(x)}{x^n}$ tend vers 0 par négligence de g devant x^n. Donc $\frac{f(x)+g(x)}{x^n}$ tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0. □

Théorème 79. *Plus généralement, pour m et n entier positif non nul, $o(x^m) + o(x^n) = o(x^p)$ avec $p = min(m,n)$*

Théorème 80. *Dire qu'une fonction f est telle que $f(x) = o(1)$ (autrement dit des f négligeables devant le monôme constant $x^0 = 1$) signifie simplement que la fonction $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition de la négligence, qui dit que $f(x) = o(1)$ si et seulement si $\lim \frac{f(x)}{1} = 0$ □

Théorème 81. *Si f est une fonction négligeable devant le monôme x^m (i.e. $f(x) = o(x^m)$), alors $f(x)x^n$ (avec $m \geq n$) est négligeable devant x^{m+n} : $(x)x^n = o(x^m)x^n = o(x^{m+n})$*

Théorème 82. *Si f est une fonction négligeable devant le monôme x^m (i.e. $f(x) = o(x^m)$), alors $\frac{f(x)}{x^n}$ (avec $m \geq n$) est négligeable devant x^{m-n} (et devant 1 si $n = m$) :* $\frac{f(x)}{x^n} = \frac{o(x^m)}{x^n} = o(x^{m-n})$

Théorème 83. *Si une fonction f est négligeable devant x^n, alors $-f$ est aussi négligeable devant x^n, de sorte que : $o(x^n) = -o(x^n)$*

L'information de signe pour un $o()$ n'a donc pas d'importance ! Attention donc à ne pas écrire que $o(x^n) - o(x^n)$ est égal à 0 ; bien au contraire, $o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$!

Définition 84 (Développement limité à l'ordre n au voisinage de 0)**.** Une fonction f admet un **développement limité à l'ordre n au voisinage de** 0 s'il existe un polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ de degré au plus égal à n (avec $a_0, a_1, ..., a_n$ des coefficients réels) tel que : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ où $o(x^n)$ désigne une fonction (non spécifiée ici) négligeable devant x^n. S'il existe **ce DL est unique** et est donné par la formule de Taylor-Young.

1.5.1.D Interprétations (numériques et graphiques)

1.5.1.D.a Interprétation numérique Approximer la valeur de la fonction $f(x)$ par le polynôme $P_n(x)$ à l'ordre n revient à commettre une erreur sur $f(x)$, cette erreur étant plus petite que (négligeable devant) x^n. Autrement dit, l'erreur commise en approximant $f(x)$ est d'autant plus petite que x est proche de 0 et que l'ordre n est grand, comme l'illustre la table 7.

Exemple 85 (DL de e^x). cf. table 7.

	x	0.1	0.01
Valeur exacte	e^x	1.10517091	1.010050167
DL à l'ordre 1	$1+x$	1.1	1.01
DL à l'ordre 2	$1+x+\frac{x^2}{2!}$	1.105	1.01005
DL à l'ordre 3	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$	1.105166	1.01005016
DL à l'ordre 4	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$	1.105170	1.0100501670

Table 7 – Erreur commise sur l'approximant de e^x par son DL en fonction de l'ordre du DL et de la valeur de x

T.93

1.5.1.D.b Interprétation graphique

Exemple 86 ($f(x) = \frac{1}{1+x}$). $f(x)$ admet pour DL à l'ordre n :
$f(x) = P_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$ avec :

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = 1 - x$
- $P_2(x) = 1 - x + x^2$
- $P_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3$

représenté figure 23.

T.94

1.5.2 Calculs de DL

1.5.2.A DLs usuels

Les développements limités usuels sont données table 8. T.95

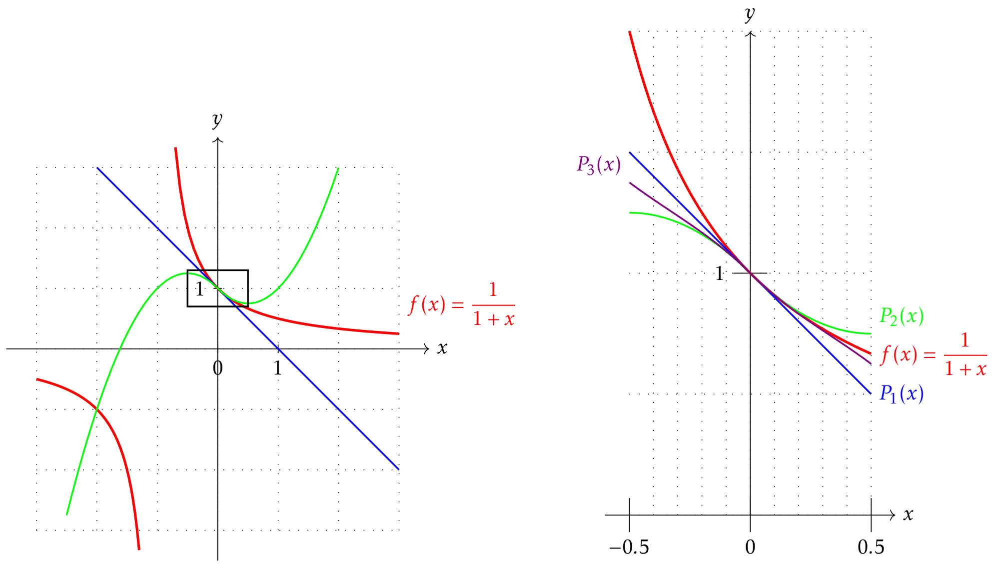


FIGURE 23 – Comparaison graphique d'une fonction et de ses DLs : dès que x s'approche de 0, les DLs tangentent de mieux en mieux la courbe de f

1.5.2.B Opérations sur les DLs

Considérons deux fonctions u et v dont on connaît les DL en 0 à l'ordre n, on peut déduire les DLs de toutes combinaisons des fonctions u et v en appliquant des règles précises présentées ci-dessous.

1.5.2.B.a DL d'une somme

Théorème 87 (DL d'une somme)**.** *Soient $u(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$. Alors $u(x) + v(x) = S_n(x)$ avec $S_n(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$ tronqué à l'ordre n.*

T.96 ➔ Exercice 44. *Exercice type : DL d'une somme :* Déterminer le DL à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

1.5.2.B.b DL d'un produit

Théorème 88 (DL d'un produit)**.** *Soient $u(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$. Alors $u(x).v(x) = S_n(x) + x^n\epsilon(x)$ avec $S_n(x) = P_n(x).Q_n(x)$ tronqué à l'ordre n.*

T.97 ➔ Exercice 45. *Exercice type : DL d'un produit :* Déterminer le DL à à l'ordre 2 de $f(x) = e^x.\cos(x)$.

1.5.2.B.c DL d'un quotient

Théorème 89 (DL d'un quotient)**.** *Soient $u(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$. Alors $\frac{u(x)}{v(x)} = S_n(x) + x^n\epsilon(x)$ avec $S_n(x)$ obtenu par division polynômiale suivant les puissances croissantes de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ tronqué à l'ordre n.*

T.98 ➔ Exercice 46. *Exercice type : DL d'un quotient :* Déterminer le DL à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

1.5.2.B.d DL d'une composée

Théorème 90 (DL d'une composée)**.** *Soient $u(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$. Alors $u\big(v(x)\big) = S_n(x) + x^n\epsilon(x)$ avec $S_n(x) = P_n(Q_n(x))$ tronqué à l'ordre n.*

➔ Exercice 47. *Exercice type : DL d'une composée :* Déterminer le DL à l'ordre 2 de :

1 $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$ **2** $g(x) = \ln(1 + 3x)$ **3** $h(x) = \sin(-2x)$

T.99

$f(x)$	$\underset{0}{\sim}$	$P_n(x)$ du **DL à l'ordre** n
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x$	$1+\alpha x+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\epsilon(x)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x$	$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\epsilon(x)$
$\ln(1+x)$	x	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+x^n\epsilon(x)$
e^x	$1+x$	$1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)$
$\sin(x)$	x	$x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\ldots+\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}+x^{2p+1}\epsilon(x)$
$\cos(x)$	1	$1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\ldots+\dfrac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p}+x^{2p}\epsilon(x)$
$\tan(x)$	x	$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+x^5\epsilon(x)$
$\arcsin(x)$	x	$x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{8}+x^5\epsilon(x)$
$\arctan(x)$	x	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\epsilon(x)$

Table 8 – DLs usuels

1.5.2.C Exercices de TD

➔ Exercice 48. *DL d'une somme* : Déterminer le DL à à l'ordre 3 de $u(x)+v(x)$ lorsque $u(x)=e^x$ et $v(x)=\sin(x)$.

➔ Exercice 49. *DL d'un produit* : Déterminer le DL à l'ordre 2 de $u(x).v(x)$ avec $u(x)=e^x$ et $v(x)=\sin(x)$.

➔ Exercice 50. *Calcul de DLs* : Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions de la variable x suivantes :

1 $\dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$ 2 $\dfrac{1}{1+\sin(x)}$ 3 $\tan^2(x)$ 4 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ 5 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ T.100

6 $\sin_c(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ 7 xe^x 8 $\dfrac{x}{1-e^x}$

1.5.3 Applications : Limites

1.5.3.A DL et limites

Théorème 91 (DL et limite)**.** *Si une fonction f admet un DL en 0 à l'ordre n de la forme $P_n(x)$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n, alors :* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} P_n(x)$

➔ Exercice 51. *Exercice type : Limite* : Calculer la limite en 0 de $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. T.101

1.5.3.B Exercices de TD

➔ Exercice 52. *Calcul de limites* : Calculer les limites quand x tend vers 0 des fonctions suivantes, en utilisant les DLs usuels :

1 $f(x)=\dfrac{x-\arcsin(x)}{x-\sin(x)}$ 2 $f(x)=\dfrac{x^2\sin(x)}{x-\sin(x)}$ 3 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{x}$

4 $f(x)=\dfrac{1-e^{-x^2}}{1-\cos(x)}$ 5 $f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{x}$ 6 $f(x)=\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs.

➔ Exercice 53. *Calcul de limites (DS 2008)* : Calculez les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1+x^3}-(1+x)$ 2 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 3^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$ 3 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

T.102

Exercice 54. *Limites (pour les poursuites d'études longues)* :
Calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ 2 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$ 3 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$

4 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{x-1}$ 5 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(2^{1/x}-1\right)$ 6 $\lim\limits_{x\to 0^\pm} x\left(2^{1/x}-1\right)$

7 $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ 8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}$ 9 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$

T.103

2 Calcul intégral

Le processus d'intégration est en quelque sorte l'étape inverse de la dérivation. Il permet d'accumuler les valeurs d'une fonction (ou d'un signal) sur un intervalle donné ; il est très souvent utilisé en électronique ou en télécommunications pour des calculs d'énergie.

2.1 Primitive

2.1.1 Définitions

2.1.1.A Primitives

Définition 92 (Primitive)**.** Soit f une fonction réelle de la variable réelle, définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$. Une **primitive de la fonction** f est une **fonction** F de la variable x définie de $[a;b]$ sur $\mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 93 (Primitives de la fonction inverse). $F(x) = \dfrac{1}{x}$ est une primitive de la fonction $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Corollaire 94. *Une primitive F de f sur $[a;b]$ est nécessairement dérivable sur $[a;b]$ et de dérivée $F'(x) = f(x)$ sur $[a;b]$*

T.106

Notation (pour les poursuites d'études longues) : Une primitive de f est notée $F = \int f = \int f(t)dt$ ou $F(x) = \int^x f(t)dt$ où t est une **variable muette** appelée **variable d'intégration**. Il faut bien faire attention à ne pas utiliser le même nom pour la variable définissant F (ici x) et pour la variable d'intégration (ici t), au risque de faire des erreurs dans les calculs.
➔ Exercice 55. *Primitives* : Soit f une fonction. Donner une primitive F de f'.

Théorème 95 (Primitive et dérivée)**.**
- *f est une primitive de la dérivée de f autrement dit f est une primitive de f'.*
- *f est la dérivée d'une primitive de f autrement dit $F' = f$.*

T.107

2.1.1.B Condition d'existence d'une primitive

Théorème 96 (Existence d'une primitive)**.** *Toute fonction f **continue sur l'intervalle** $[a;b]$ possède une primitive sur cet intervalle.*

Rappel
Une fonction f dérivable sur $[a;b]$ est nécessairement continue ; elle admettra donc une primitive sur $[a;b]$.

T.108

2.1.1.C Une infinité de primitives
Dans la suite, f désigne une fonction réelle de la variable réelle continue sur un intervalle $[a;b]$.

Théorème 97 (Ensemble des primitives de f)**.** *f possède en fait une **infinité de primitives**, toutes définies à une constante c près, appelée **constante d'intégration**. Les primitives de f forment donc un ensemble des fonctions noté $\left\{x \mapsto F(x) + c / c \in \mathbb{R}\right\}$. Cet ensemble se lit "l'ensemble des fonctions qui à x associe $F(x) + c$ tel que c soit une constante réelle".*

Démonstration. Soit F_1 une primitive de f sur $[a;b]$. Alors la fonction F_2 définie par $F_2(x) = F_1(x) + c$ (avec c constante réelle quelconque) est aussi une primitive de f sur $[a;b]$. En effet, par définition d'une primitive, F_1 est dérivable sur $[a,b]$ avec $F_1'(x) = f(x)$. Or F_2 est dérivable sur $[a,b]$ (comme somme de F_1 et de la fonction constante c toutes deux dérivables sur $[a,b]$) et pour tout x de $[a,b]$, $F_2'(x) = (F_1(x) + c)' = F_1'(x) = f(x)$ (car une constante est de dérivée nulle). Donc, comme $F_2'(x) = f(x)$, F_2 vérifie bien la définition d'une primitive de f. □

Exemple 98 (Primitives de l'exponentielle). Toutes les primitives de la fonction $f(x) = e^x$ sont les fonctions $e^x + c$ avec c une constante réelle quelconque.

T.109

2.1.1.D Une unique primitive dont le graphe passe par un point donné

Théorème 99 (Une seule primitive pour une condition de valeur donnée)**.** *Il n'existe qu'**une seule et unique** primitive de f dont la valeur en un point x_0 est y_0 : c'est la fonction F qui satisfait au système d'équations :* $\begin{cases} F' = f \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Trouver LA primitive QUI
Connaissant une primitive F_1 de f, trouver l'unique primitive F_2 de f dont la valeur en x_0 est y_0 consiste à trouver l'unique valeur de la constante d'intégration c telle que $y_0 = F_1(x_0) + c$. Cette unique valeur est $c_{opt} = y_0 - F_1(x_0)$. F_2 est donc définie pour tout $x \in [a, b]$ par
$F_2(x) = F_1(x) + c_{opt} = F_1(x) + \big(y_0 - F_1(x_0)\big)$.

T.110 ➔ Exercice 56. *La primitive* : Trouver la primitive de e^x qui s'annule en 2.

2.1.1.E Résumé

Une question de vocabulaire
Attention donc au vocabulaire employé : Pour une fonction f, admettant une primitive F :

- **Toutes les primitives** de f sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ avec c la constante d'intégration
- **La primitive de f qui vaut y_0 en x_0** est la seule fonction $F + \big(y_0 - F(x_0)\big)$
- **Une primitive de f** est par exemple $F + 2$

Ces primitives ne sont **valables** que sur un intervalle I où la fonction f est continue (ou au moins dérivable).

T.111

2.1.2 Calcul de primitives

Calculer une primitive est une opération délicate ; elle consiste en premier lieu à utiliser des tables de primitives usuelles qu'il faut connaître par cœur puis à exploiter des règles d'assemblage de fonctions.

2.1.2.A Primitives des fonctions usuelles

Les primitives des fonctions usuelles sont listées table 9 . Elles s'obtiennent simplement en relisant le tableau des dérivées usuelles à l'envers.

Rappel : Notation ensembliste
$\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ signifie l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N}$) privé des valeurs 0 et 1 : c'est donc l'ensemble $\{2, 3, 4, 5, ..., +\infty\}$. De même, $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ est l'ensemble des réels ($\mathbb{R}$) privés de la valeur -1.

T.112

2.1.2.B Opérations sur les fonctions

Comme pour les dérivées, on peut déduire la primitive d'une fonction f en l'écrivant d'abord comme un assemblage de deux fonctions (plus simples) u et v, dont on connait les primitives (respectivement) U et V, puis en utilisant les règles de calcul pour les assemblages de fonctions. Attention tout de même au fait que les règles pour les primitives ne sont pas les mêmes que pour les dérivées (il y en a moins). Soient u une fonction de primitive U, v une fonction de primitive V et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. La table 10 donne les règles de calcul d'une primitive de f lorsque f est un assemblage simple des fonctions u et v.

	Fonction	$f(x)$	Primitives $F(x)$	Validité	
	Constante	k (avec $k \in \mathbb{R}$)	$kx + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Inverse	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + c$	$\mathbb{R}^*$	Term.
Puissance	**Monôme**	x^n (avec $n \in \mathbb{N}$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Racine n-ième	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + c$	$\mathbb{R}^+$	
	Puissance d'inverse	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$)	$\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}^*$	Term.
	Puissance	x^α (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\mathbb{R}^{*+}$	
Expo	**Exponentielle**	e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Expo. à base a	$a^x = e^{x\ln(a)}$ (avec $a \in \mathbb{R}_*^+$)	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$	$\mathbb{R}$	
Trigonométrie	**Cosinus**	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Sinus	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Tangente	$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	
	ArcCosinus	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$	$]-1;1[$	
	ArcSinus	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$]-1;1[$	
	ArcTangente	$\frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$	

TABLE 9 – Primitives des fonctions usuelles.

Exercice 57. *Exercice type : Primitives* : Trouver toutes les primitives de :

1 $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$ 2 $g(x) = e^{3x} + \frac{1}{5}\cos(2x)$

Si f peut s'écrire comme la dérivée d'un produit, d'un quotient ou d'une composée faisant intervenir les fonctions u et v, on peut aisément donner une primitive de f grâce au théorème 95. Ce procédé est donné table 11. T.113

Exercice 58. *Primitive de fractions rationnelles* : Donner toutes les primitives de $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$. T.114

2.1.3 Techniques pour le calcul de primitives

2.1.3.A Cas général

Méthodologie 100 (Recherche de primitives de f dans le cas général).

1. *Reconnaître les fonctions usuelles dans f et donner une de leur primitive*
2. *Reconnaître l'assemblage de fonctions utilisées (somme, dérivée, amplification, composée, ...)*
3. *Intégrer en utilisant les tables en n'oubliant pas la constante d'intégration*

Exercice 59. *Exercice type : Primitives* : Donner toutes les primitives de :

1 $f(x) = 2x(1+x^2)^2$ 2 $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ 3 $f(x) = 2\cos(3x) + 5\sin(\frac{1}{5}x)$ T.115

Fonction	$f(x)$	**Primitives**
Somme	$f(x)=u(x)+v(x)$	$F(x)=U(x)+V(x)+c$
Difference	$f(x)=u(x)-v(x)$	$F(x)=U(x)-V(x)+c$
Amplification	$f(x)=\lambda u(x)$	$F(x)=\lambda U(x)+c$
Homothétie	$f(x)=u(\lambda x)$	$F(x)=\frac{1}{\lambda}U(\lambda x)+c$

Table 10 – Primitives pour un assemblage usuel f de fonctions u et v dont les primitives sont respectivement U et V, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Dérivée	**Fonction**	$f(x)$	**Primitives**
d'un produit	$f=(u.v)'$	$f(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$F(x)=u(x).v(x)+c$
d'un quotient	$f=\left(\frac{u}{v}\right)'$	$f(x)=\frac{u(x)'v(x)-u(x)v(x)'}{v(x)^2}$	$F(x)=\frac{u(x)}{v(x)}+c$
d'une composée	$f=(u\circ v)'$	$f(x)=v'(x)u'\big(v(x)\big)$	$F(x)=u\big(v(x)\big)+c$

Table 11 – Primitives d'une fonction f lorsqu'elle s'écrit comme une dérivée faisant intervenir les fonctions u et v.

2.1.3.B Cas particulier où f contient des fonctions trigonométriques

Méthodologie 101 (Recherche des primitives de f lorsque f contient des fonctions trigonométriques)**.** *Linéariser la fonction en somme de* cos *et de* sin *(à la puissance* 1*) puis appliquer la méthodologie 100 (cas général)*

➔ Exercice 60. *Primitives de fonctions trigonométriques* : Donner toutes les primitives de :

1 $f(x)=\sin^2(x)$ 2 $g(x)=\cos^2(x)$ 3 $h(x)=\cos(3x)\sin(2x)$

T.116

2.1.3.C Cas particulier où f est une fraction rationnelle

Méthodologie 102 (Recherche des primitives de f lorsque f est une fraction rationnelle)**.**

1. *Si* $f=\frac{u'}{u}$, *alors* $F(x)=\ln|u(x)|+c$
2. *Si* $f=\frac{u'}{u^n}$ *(avec* $n\in\mathbb{N}^*$*), alors* $F(x)=\frac{1}{1-n}\frac{1}{u^{n-1}(x)}+c$
3. *Si* $f=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, *alors* $F(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$
4. *Sinon, autrement dit dans tous les autres cas, décomposer* f *en éléments simples, pour obtenir une expression de la forme :* $f(x)=P(x)+\frac{A}{x-a}+B\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$ *avec* $P(x)$ *un polynôme. Trouver ensuite une primitive de chacun des termes :*
   - *le polynôme* $P(x)$ *en utilisant la méthodologie 100 (cas général)*
   - *les éléments simples de type* $\frac{A}{x-a}$ *ayant pour primitive* $A\ln|x-a|$
   - *les éléments simples de type* $B\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$ *ayant pour primitive* $B\ln\left|x^2+bx+c\right|$

puis ajouter toutes les primitives obtenues.

T.117

2.1.3.D Exercices

➔ Exercice 61. *Primitives de fractions rationnelles* : Donner toutes les primitives de :

1 $f(x) = 5\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ **2** $g(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$

T.118

➔ Exercice 62. *Calcul de primitive* : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner toutes les primitives $F(x)$ de f et l'ensemble de définition des primitives, en utilisant les règles d'opérations sur les fonctions :

1 $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$ **2** $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ **3** $f(x) = 2x\left(x^2+1\right)^3$

4 $f(x) = \left(x^2+1\right)^3$ **5** $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^5}$ **6** $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

7 $f(x) = e^x(x+1)$ **8** $f(x) = (x^2+1)\sin(x^3+3x-3)$ **9** $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+7}}$

10 $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^3+3x^2+6x+1}}$ **11** $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{9-\sin^2(x)}}$ **12** $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

T.119

➔ Exercice 63. *Primitives de fractions rationnelles* : Trouver une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1 $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ **2** $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$ **3** $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$

4 $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2-3x+2)}$ **5** $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$ **6** $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

7 $f(x) = \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$

T.120

2.2 Intégrales propres dites intégrales de Riemann

2.2.1 Intégrales (propres)

2.2.1.A Définitions

2.2.1.A.a Une aire algébrique

Définition 103 (Intégrale de f de a à b)**.** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. L'intégrale de f de a à b est l'**aire algébrique (signée)** de la surface dite "sous" le graphe géométrique $\mathcal{G}_f$ de f entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Elle correspond à l'aire de la surface délimitée par les 4 points : $A_1(a,0)$, $A_2(a,f(a))$, $B_2(b,f(b))$ et $B_1(b,0)$ illustrée figure 24. Lorsque cette surface est balayée dans le sens horaire, l'intégrale est positive ; sinon, elle est négative. On la note $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. f est alors appelé **intégrande**.

Remarques

Dans la notation $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$,

- dx désigne la différentielle de x, autrement dit une petite variation de x. dx est un symbole mathématique à part entière et n'est pas $d \times x$.
- x est la **variable d'intégration**. C'est une variable muette qu'on peut remplacer par n'importe quel autre nom de variable, par exemple t ou u : on a donc $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$.

T.121

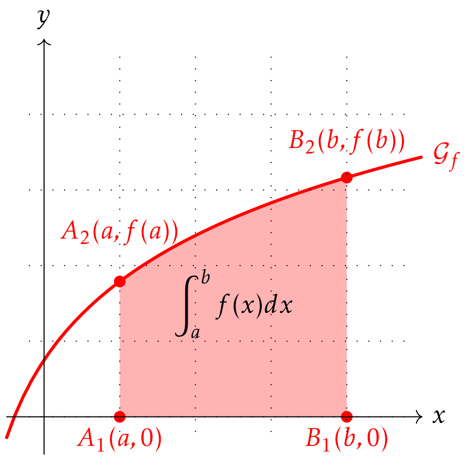


FIGURE 24 – Intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ comme aire sous la courbe.

2.2.1.A.b Approximation de l'intégrale par une somme de rectangles

Supposons qu'on dispose de n mesures de la fonction : $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{n-1})$ aux points x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} régulièrement espacés d'une distance $\delta x = x_1 - x_0 \approx \frac{b-a}{n}$ dans l'intervalle $[a;b]$. En électronique et en télécommunications, on parle d'un échantillonnage de la fonction à la période δx (ou à la fréquence $\dfrac{1}{\delta x}$) : les points x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} sont les instants d'échantillonnage tandis que les valeurs $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{n-1})$ sont les échantillons. En mathématiques, l'ensemble $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}\}$ est appelé subdivision de l'intervalle $[a;b]$.

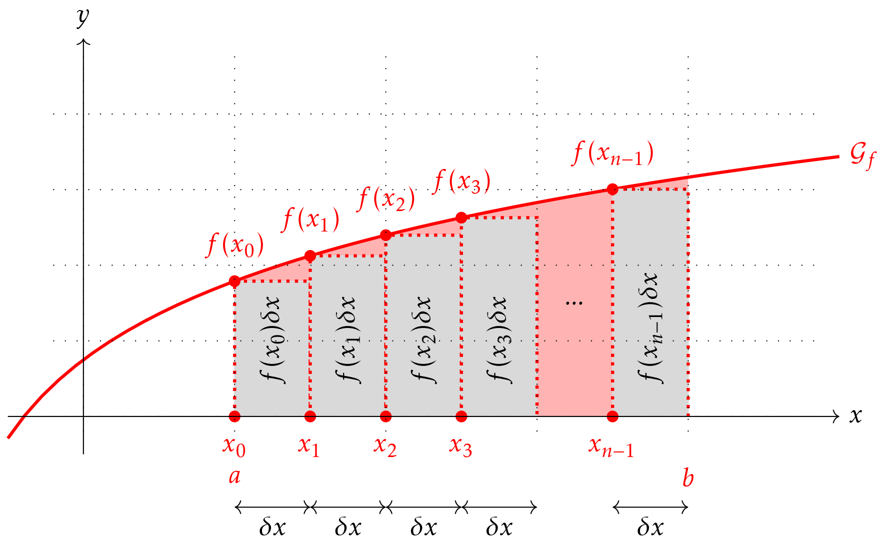


FIGURE 25 – L'intégrale approchée (par valeur inférieure) par l'aire de n rectangles.

On peut alors approcher ce qu'illustre la figure 25 l'aire sous la courbe $\mathcal{G}_f$ entre $x = a$ et $x = b$ ou autrement dit $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, par l'aire de n rectangles, chacun étant de largeur δx et de hauteur l'une des mesures de la fonction :

$$f(x_0)\delta x + f(x_1)\delta x + f(x_2)\delta x + ... + f(x_{n-1})\delta x \approx \int_a^b f(x)dx$$

T.122

On peut même parler d'approximation par valeur inférieure car l'aire grise des rectangles est plus

petite que l'aire rouge de l'intégrale : pour être mathématiquement précis, on pourrait remplacer le symbole $\approx$ par $\leq$.
En utilisant le **symbole mathématique de sommation**, et qui se lit *somme pour i variant de 0 à $n-1$ des termes $f(x_i)\delta x$*, cette équation se réécrit :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta x \approx \int_a^b f(x)dx$$

Lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$ (et lorsque la fonction f est intégrable), alors :

- le nombre de mesures de la fonction $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_{n-1})$ devient infini, autrement dit, on exploite **toutes** les valeurs $f(x)$ prises par la fonction f dans l'intervalle $[a;b]$
- l'intervalle séparant les points de mesures δx devient très petit et tend vers 0 : la différence δx tend vers la différentielle dx (variation infiniment petite sur x)
- l'erreur commise dans l'approximation de l'aire $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ par la somme de rectangles devient de plus en plus petite et tend vers 0 : on dit que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta x$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Conclusions

- Une intégrale est la **somme** de toutes les valeurs $f(x)$ que prend la fonction f entre $x=a$ et $x=b$ pondérées par la quantité infiniment petite dx.
- Dans le calcul d'une intégrale, il faudra systématiquement prendre en compte la règle de définition qui s'applique pour f dans l'intervalle d'intégration $[a;b]$.

T.123

➔ Exercice 64. *Exercice type : Intégrale d'une porte :* Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-5}^{5} \Pi(t/2)dt$ où Π désigne la fonction porte normalisée.

T.124

2.2.1.A.c Intégrabilité au sens de Riemann (PE) L'approximation précédente, faite par valeur inférieure car les rectangles sont placés sous la courbe, peut aussi se faire par valeur supérieure comme l'illustre la figure 26 : il s'agit cette fois de considérer les n mesures de la fonctions $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{n-1})$, $f(x_n)$ aux points x_1, x_2, ... x_n distants les uns des autres de δx puis les n rectangles de largeur δx et de hauteur l'une des mesures de la fonction. On a alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq f(x_1)\delta x + f(x_2)\delta x + ... + f(x_{n-1})\delta x + f(x_n)\delta x$$

En utilisant le symbole de sommation, on obtient le résultat suivant :

Définition 104 (Intégrabilité au sens de Riemann)**.** En utilisant les approximations par valeur inférieure et supérieure d'une intégrale, on a pour toutes fonctions f :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta x \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x$$

f est dite **intégrable au sens de Riemann** sur $[a;b]$ si et seulement si lorsque $n\to+\infty$ les sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta x$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta x$ convergent vers la même limite L. Cette limite L est $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

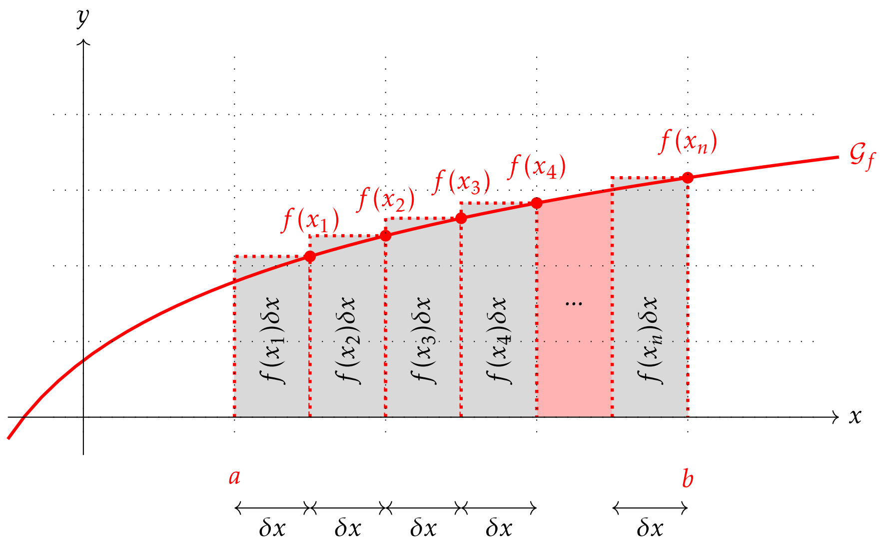


FIGURE 26 – L'intégrale approchée (par valeur supérieure) par l'aire de n rectangles.

2.2.1.B Calcul d'intégrales

Définition 105 (Intégrale (propre))**.** Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ ayant pour primitive la fonction F sur $[a;b]$. Alors f est **intégrable sur** $[a;b]$ et son intégrale entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la constante d'intégration c choisie pour définir une primitive F de f.
- Le terme $\left[F(x)\right]_a^b$ est une expression/notation mathématique désignant la différence $F(b)-F(a)$; cette expression représente un nombre réel.
- On peut facilement calculer l'intégrale de f entre a et b si on dispose d'une primitive F de f. N'oubliez pas cependant que cette intégrale (par définition) est aussi la "somme" de toutes les valeurs $f(x)$ prises par f lorsque x varie entre a et b. La règle de définition utilisée pour $f(x)$ dans le calcul de l'intégrale est donc celle valable pour $x \in [a;b]$.

T.125
➲ Exercice 65. *Exercice type : Intégrales* : Calculer :

1 $\displaystyle\int_1^2 \text{sign}(t)dt$ **2** $\displaystyle\int_{-2}^{-1} |t|dt$

➲ Exercice 66. *Intégrale nulle* : Montrer que pour toute fonction f continue au voisinage d'un réel a,
T.126 $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$

2.2.1.C Fonctions intégrales (pour les poursuites d'études longues)

Les primitives $F(x)$ d'une fonction f peuvent se définir directement à partir des intégrales en choisissant pour borne d'intégrale la variable x les définissant. C'est la notion de **fonction intégrale**. Cette fonction permet aussi de mesurer les variations de l'intégrale (donc de l'aire sous la courbe $\mathcal{G}_f$) en fonction de l'une de ces bornes.

Définition 106 (Fonction intégrale)**.** Soit f une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in [a;b]$. La **fonction intégrale** est la fonction définie par :

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} [a;b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^x f = \int_{x_0}^x f(t)dt \end{array} \right.$$

F est l'**unique** primitive de f qui s'annule en x_0. Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $[a;b]$, avec pour tout $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 107 (Fonction intégrale de la fonction inverse). $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ pour $x > 0$ est **LA** primitive ou de manière équivalente la **fonction intégrable** de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^+$ qui s'annule en 1.

Théorème 108 (Sens de variation de la fonction intégrale)**.** *Soit I un intervalle de $[a;b]$. Le sens de variation de F est donné par le signe de f :*

- *si, pour tout $x \in I$ $f(x) \geq 0$, alors F est croissante ;*
- *si, pour tout $x \in I$ $f(x) \leq 0$, alors F est décroissante.*

Démonstration. C'est l'application directe de la formule des accroissements finis. □

2.2.2 Propriétés des intégrales propres

Soient trois points a, b, c réels (fixés ou variables) et f une fonction intégrable sur un intervalle incluant a, b et c.

Théorème 109 (Relation de Chasles). $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *autrement dit, l'aire sous la courbe $\mathcal{G}_f$ de a à b est la somme de l'aire sous la courbe de a et c plus celle de c à b.*

Remarque : La relation de Chasles est valable même si $c < a$ ou $c > b$

Théorème 110 (Inversion des bornes). $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

➔ Exercice 67. *Relation de Chasles* : Calculer $\int_0^2 (\Pi_2(x) + x)dx$. T.127

Théorème 111 (Intégrale et symétrie graphique).

- *Si la fonction f est **paire**, alors* $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- *Si la fonction f est **impaire**, alors* $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.
- *Si la fonction f est **périodique de période** T, alors* $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$.

➔ Exercice 68. *Intégrale d'une fonction périodique* : Calculer $\int_{3\pi}^{5\pi} \cos(x)dx$.

T.128

2.2.3 Techniques d'intégration

Dans cette section, on s'intéresse aux méthodes qui, connaissant une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$ permettent de calculer $I = \int_a^b f(x)dx$, avec a, b deux réels fixés ou variables.

Méthodologies

1. Rechercher une **primitive** F de f puis calculer $F(b) - F(a)$.
2. Utiliser une **intégration par parties** pour se ramener à la méthodologie précédente.
3. Effectuer un **changement de variable** pour se ramener à la méthodologie précédente.

T.129

2.2.3.A Recherche de primitives

Méthodologie 112 (Recherche de primitives). *$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se calcule en trouvant une primitive F de f puis en évaluant $\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$. F est recherchée avec les méthodologies 100, 101 et 102, déjà vues pour le calcul de primitive et qui se résument de la sorte :*

- *f = assemblage de fonctions usuelles $\Rightarrow$ tables des primitives usuelles et opérations sur les fonctions*
- *f = fonctions trigonométriques $\Rightarrow$ Linéarisation*
- *f = fraction rationnelle simple*

  $\rightarrow$ mettre f en relation avec du $\dfrac{u'}{u}$, du $\dfrac{u'}{u^n}$ ou du $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ puis intégrer

  $\rightarrow$ sinon, faire une DES[5] de f puis intégrer les $\dfrac{A}{x-a}$ et $\dfrac{2x+b}{x^2+bx+c}$

T.130 **Exercice 69.** *Intégrales* : Calculer :

$$\boxed{1}\ \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} \qquad \boxed{2}\ \int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)}dx$$

T.131 **Exercice 70.** *BTS Groupement B 2003* : Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x+3)e^{-x}$.

1. Montrer que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : $F(x) = -(2x+5)e^{-x}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 5-6e^{-\frac{1}{2}}$.

T.132 **Exercice 71.** *Calcul d'intégrales* : Calculer les intégrales suivantes :

$$\boxed{1}\ \int_0^1 (6x^2-5)(2x^3-5x+1)dx \qquad \boxed{2}\ \int_{-2}^2 |x^2+2x-3|dx \qquad \boxed{3}\ \int_0^{\pi/4} \tan(x)dx$$

$$\boxed{4}\ \int_0^{\pi/4} \tan^2(x)dx \qquad \boxed{5}\ \int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(t)|dt \qquad \boxed{6}\ \int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}dt$$

T.133 **Exercice 72.** *BTS Groupement E 2002* : Soit f et h deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;5]$ par : $f(x) = \dfrac{1}{4}(x^3-9x^2+24x)$ et $h(x) = -x^2+6x$.

1. Etudier et représenter graphiquement les fonctions f et h sur l'intervalle $[0;5]$.
2. En notant $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_h$ les graphes géométriques de f et h, intuitez la position relative de $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_h$ dans le plan. Justifier ensuite votre réponse par le calcul.
3. Calculer l'aire $\mathcal{S}$ de la partie du plan comprise entre les deux graphes. On donnera une valeur exacte.

T.134

2.2.3.B Intégration Par Parties (IPP)

L'intégration par parties est une technique particulièrement utile lorsqu'on cherche à intégrer un **produit** de deux fonctions qui ne serait pas une composée.

Théorème 113 (Intégration par parties). *Si la fonction f à intégrer s'écrit $f(x) = u'(x)v(x)$ avec u, v deux fonctions définies et dérivables sur $[a;b]$ et de dérivées respectives u' et v' elles-même continues sur $[a;b]$ alors la formule de l'intégration par parties consiste à écrire :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \overset{u(x)}{\boxed{u'(x)}}\ \underset{v'(x)}{\boxed{v(x)}}\ dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

T.135

[5] Décomposition en éléments simples

Méthodologie 114 (IPP).

1. *Chercher u' et v tels qu'on puisse écrire $f(x) = u'(x)v(x)$;*
2. *Déterminer une primitive u de u' ;*
3. *Calculer la dérivée v' de v ;*
4. *Appliquer la formule de l'IPP $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$ et calculer $\Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b$ puis intégrer $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx$ avec les différentes méthodologies.*

T.136

Choix des fonctions u' et v de l'IPP

Ce choix est arbitraire et requiert de la pratique et de l'intuition. Cependant, l'idée principale est que $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx$ soit plus facile à calculer que $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx$: on aura donc souvent tendance à choisir :

- comme terme $u'(x)$, les fonctions trigonométriques, les exponentielles ;
- comme terme $v(x)$, les polynômes, les logarithmes.

T.137

2.2.3.B.a Exercices

➔ Exercice 73. *Exercice type : IPP* : Calculer avec une IPP :

1 $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)e^x dx$ **2** $\displaystyle\int_1^3 x\cos(x)dx$

T.138

➔ Exercice 74. *IPP* : Calculer les intégrales suivantes en faisant une intégration par parties :

1 $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx$ **2** $\displaystyle\int_a^b x^\alpha \ln(x)dx$ avec $0 < a < b$ et $\alpha > 1$

3 $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)dx$ **4** $\displaystyle\int_a^0 xe^{-x}dx$ avec $a \in \mathbb{R}$

➔ Exercice 75. *IPP* : Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$ fixé. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une IPP :

1 $\displaystyle\int_0^t e^{2x}(3x^2+1)dx$ **2** $\displaystyle\int_0^t e^{-x}(x^3+5x^2)dx$ **3** $\displaystyle\int_0^t \ln(x^2+1)dx$

4 $\displaystyle\int_1^t x^2\ln(x)dx$ **5** $\displaystyle\int_0^t \arctan(x)dx$

T.139

2.2.3.C Le Changement de Variable (CV)

Théorème 115 (Le changement de variable). *Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur $[a;b]$ et l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. On pose $\boxed{x=u(t)}$ où u est une fonction de la variable t qui est :*

- ***définie** et **dérivable** sur $[\alpha;\beta]$ de dérivée $u'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ telle que $dx = u'(t)dt$;*
- ***monotone** sur $[\alpha;\beta]$ donc ayant une réciproque u^{-1} telle que $t = u^{-1}(x)$;*
- *telle que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$ et donc telle que $\alpha = u^{-1}(a)$ et $\beta = u^{-1}(b)$.*

Alors :

$$I = \int_{a}^{b} f(\boxed{x})\, \boxed{dx} = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(\boxed{u(t)}\right) \boxed{u'(t)dt}$$

T.140

Méthodologie 116 (CV).

1. *Poser le CV* $\boxed{x=u(t)}$ *et l'inverser pour avoir* $\boxed{t = u^{-1}(x)}$*;*
2. ***Règle de définition*** *: réécrire la règle de définition de* $f(x)$ *en remplaçant l'ancienne variable* x *par la nouvelle* t*;*
3. ***Calcul des bornes*** $\boxed{\alpha}$ *et* $\boxed{\beta}$ *: calculer ce que vaut* t *lorsque* $x = a$*, puis lorsque* $x = b$*;*
4. ***Calcul de la différentielle*** $\boxed{dx = u'(t)dt}$ *: en interprétant* x *comme une fonction de* t*, calculer* $u'(t) = \dfrac{dx}{dt}$ *autrement dit la dérivée* x' *de* x *par rapport à* t*; en déduire* dx *en fonction de* dt*;*
5. *Appliquer la formule du CV, puis continuer le calcul de l'intégrale avec les méthodologies du cours.*

T.141

T.142 Exercice 76. *CV* : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \exp(\sqrt{x})dx$ en faisant le CV $\boxed{t = \sqrt{x}}$.

Choix du CV

En général, le CV est suggéré par l'énoncé ; sinon , la table 12 donne les CVs usuels pour le calcul de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ en fonction de l'expression de $f(x)$.

$f(x)$ **de la forme**	**Changement de variable (CV)**
$\sqrt{1-x^2}$	$x = \cos(t)$ ou $x = \sin(t)$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$x = \tan(t)$
$\dfrac{e^x+\alpha}{e^x+\beta}$	$x = \ln(t)$
$\sqrt{a^2 - b^2(x+\alpha)^2}$	$x = \frac{a}{b}\cos(t) - \alpha$ ou $x = \frac{a}{b}\sin(t) - \alpha$

Table 12 – Changements de variable usuels.

T.143

2.2.3.C.a Exercices

Exercice 77. *CV* : Calculer à l'aide d'un CV les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ avec $\boxed{x = \cos(t)}$
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx$ avec $\boxed{t = \frac{1}{x}}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1/2}dx$ avec $\boxed{t = x + \frac{1}{2}}$ puis $\boxed{u = 2t}$

T.144 Exercice 78. *CV* : Calculer les intégrales suivantes en faisant le changement de variable suggéré :

1 $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ avec $\boxed{x=\sin(u)}$
2 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{3x^2+2}dx$ avec $\boxed{u=\sqrt{\frac{3}{2}}x}$
3 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3x-1}{x^2-2x+5}dx$ avec $\boxed{u=\frac{1}{2}(x-1)}$
4 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$ avec $\boxed{u=e^x}$
5 $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}dx$ avec $\boxed{u=e^x}$
6 $\displaystyle\int_{1/4}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}dx$ avec $\boxed{u=\sqrt{x}}$
7 $\displaystyle\int_{1/4}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ avec $\boxed{u=\sqrt{x}}$
8 $\displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ avec $\boxed{u=\ln x}$
9 $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{3+e^{-x}}dx$ avec $\boxed{u=e^x}$ et $a\in\mathbb{R}_*^+$
10 $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$ avec $\boxed{u=\sqrt{1+e^x}}$ et $a\in\mathbb{R}_*^+$

T.145

2.2.3.D Applications

Définition 117 (Grandeurs physiques en électronique)**.** Soit une tension $U(t)$ fonction du temps t.

- La **valeur moyenne** de $U(t)$ entre l'instant $t=a$ et l'instant $t=b$ est : $U_{moy}=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b U(t)dt$
- La **valeur efficace** [6] de $U(t)$ entre l'instant $t=a$ et l'instant $t=b$ est : $U_{eff}=\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b U^2(t)dt}$

T.146

➔ Exercice 79. *Exercice type : Tension en électronique* :
Calculer les valeurs moyennes des tensions suivantes sur l'intervalle de temps spécifié :
1 $U_1(t)=2\cos(2t-1)$ sur $[1,2]$, 2 $U_2(t)=3\sin(20\pi t+\pi/4)$ sur $[0,1]$, 3 $U_3(t)=-2\cos(4t+1)$ sur $[0,\pi]$.
Indice : effectuer les changements de variables suivants :
1 $x=2t-1$, 2 $x=20\pi t+\pi/4$, 3 $x=4t+1$.

T.147

2.3 Intégrales (impropres) généralisées

2.3.1 Définitions

2.3.1.A Problématique

On cherche à calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ lorsque :

1. f n'est pas définie ou continue sur tous les points de $[a;b]$
2. f n'est définie que sur $]a;b]$ avec f non définie en a
3. f n'est définie que sur $[a;b[$ avec f non définie en b
4. l'intervalle d'intégration est $[a;+\infty[$ ou est $]-\infty;b]$

Exemple 118 (Des intégrales impropres).

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \text{sinc}(x)dx$ alors que sinc n'est pas définie en 0
- $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}dx$ alors que $\dfrac{1}{x}$ tend vers l'infini lorsque $t\to 0$ et donc que l'aire sous la courbe est intuitivement infinie
- En Télécommunications, TEB $=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_b^2}\right)dx$, le TEB étant le taux d'erreur binaire, autrement dit le nombre de bits erronés sur le nombre de bits total transmis sur une ligne de transmission bruité

T.148

2.3.1.B Intégrale impropre

Définition 119 (Intégrale impropre ou généralisée)**.** Soient a un réel, b un réel ou un infini ($+\infty$ ou $-\infty$) et f une fonction définie et continue sur $[a;b[$.

6. valeur de la tension continue qui provoquerait une même dissipation de puissance que $U(t)$ si elle était appliquée aux bornes d'une résistance

- Si $\lim_{T \to b} \int_a^T f(x)dx$ existe et vaut une valeur réelle finie I (c'est à dire une valeur $\neq \infty$), on dit que la fonction f est **intégrable** de a à b. Alors l'**intégrale impropre (ou généralisée)** notée $\int_a^b f(x)dx$ existe et vaut I.
- Si $\lim_{T \to b} \int_a^T f(x)dx$ n'a pas de valeur réelle finie (par exemple vaut $+\infty$), alors on dit que f n'est pas intégrable. Alors l'**intégrale impropre (ou généralisée)** notée $\int_a^b f(x)dx$ n'existe pas et n'a pas de valeur.
- b est appelé la **borne à risque**

T.149

2.3.1.C Bornes à risques

Méthodologie 120 (Comment identifier la (ou les) borne(s) à risque ?). *Dans l'intégrale* $\int_a^b f(x)dx$,

1. *Etudier la dérivabilité (continuité) de f sur l'intervalle d'intégration ($[a;b]$) : si f n'est pas dérivable (continue) en différents points de l'intervalle d'intégration, ces points sont des bornes à risque.*
2. *Si l'intervalle d'intégration inclut un infini ($-\infty$, $+\infty$), cet infini est une borne à risque.*
3. *Dans tous les autres cas, l'intégrale ne présente pas de borne à risque. Ce n'est pas une intégrale généralisée mais une intégrale propre. On se reportera alors la section 2.2 pour le calcul de l'intégrale.*

T.150

2.3.1.D Exercices

2.3.1.D.a Exercices

➔ Exercice 80. *Bornes à risque d'intégrales impropres* : Identifier la ou les bornes à risques dans les intégrales suivantes :

1 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 2 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+x+1} dx$

T.151

➔ Exercice 81. *Bornes à risques* : Pour chacune des intégrales suivantes, préciser (si elles existent) les bornes à risques :

1 $\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 2 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 3 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$

4 $\int_{-1}^{+1} \frac{\exp(\arctan(x))}{x} dx$ 5 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ 7 $\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t^2} dt$

8 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+x+1)^n} dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

T.152

2.3.2 Existence d'intégrales impropres (pour les poursuites d'études longues)

Dans toute la suite, on supposera qu'il n'y a qu'une borne à risque, la borne supérieure b (quitte à utiliser Chasles et le théorème d'inversion des bornes).

2.3.2.A Conditions d'existence lorsque la borne à risque est un réel

Théorème 121 (Condition nécessaire d'existence d'une intégrale impropre lorsque la borne à risque b est un réel). *Soit f une fonction définie et continue sur $[a;b[$ avec b un réel. Si $\lim_{x \to b} f(x)$ existe et vaut une valeur réelle finie (autrement dit si f est prolongeable par continuité en b), alors f est intégrable sur $[a;b[$.*

Remarque : Il existe des fonctions telles que $\lim_{x \to b} f(x) = \infty$ et telles que f est intégrable sur $[a;b[$. Pour démontrer l'intégrabilité de es fonctions, il faut utiliser des théorèmes plus puissants que nous verrons par la suite.

2.3.2.B Conditions nécessaires et suffisantes d'existence lorsque la borne à risque est ∞

Théorème 122 (Condition nécessaire d'existence d'une intégrale impropre lorsque la borne à risque est ∞)**.** *Soit f une fonction définie et continue sur son intervalle d'intégration.*

- *Pour que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *existe,* ***il faut que*** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
- *Pour que* $\displaystyle\int_a^{-\infty} f(x)dx$ *existe,* ***il faut que*** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Dans la pratique, ce théorème s'utilise avec sa contre-apposée, c'est à dire dans "l'autre sens" : si l'on peut montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$, alors on déduit tout de suite que $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ n'existe pas. Il n'est alors pas nécessaire de calculer $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$.

Exemple 123 (Des intégrales généralisées qui n'existent pas). $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\,dx$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} 2dx$ n'existent pas car la fonction $x \mapsto x$ et la fonction constante $x \mapsto 2$ ne tendent pas vers 0 lorsque x tend vers la borne à risque $+\infty$.

Remarque : Attention ce théorème n'est pas valable lorsque la borne à risque est un réel fini, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 124 (Contre-exemple). $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (de borne à risque 0) existe alors que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = +\infty \neq 0$

2.3.2.C Conditions d'existence lorsque la borne à risque est un réel ou un ∞

2.3.2.C.a Théorème de comparaison

Théorème 125 (Comparaison)**.** *Soit $a \in \mathbb{R}$ et b la borne à risque réelle finie ou $\pm\infty$. Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature, c'est à dire soit toutes deux divergentes, soit toutes deux convergentes.*

Grâce à ce théorème, il suffit de comparer (au sens de l'équivalence), au voisinage de la borne à risque, la fonction $f(x)$ à intégrer à une fonction usuelle dont on connait les propriétés d'intégrabilité. Trois intégrales (Riemann, Bertrand, exponentielle) sont usuellement utilisées dans ce contexte :

2.3.2.C.b Intégrales de Riemann

Théorème 126 (Intégrales de Riemann)**.** *Les intégrales de Riemann consistent à intégrer les fonctions de la forme $\dfrac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et existent dans les configurations résumées table 13.*

	Borne à risque 0 : $\displaystyle\int_0 \frac{1}{x^\alpha}dx$	**Borne à risque** $+\infty$: $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$
si $\alpha < 1$	existe	n'existe pas
si $\alpha = 1$	n'existe pas	n'existe pas
si $\alpha > 1$	n'existe pas	existe

Table 13 – Intégrales de Riemann et conditions d'existence en fonction de la borne à risque.

Exercice 82. *Existence d'intégrales impropres* : Analyser l'existence de :

1 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4}dx$ 2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$

Correction : 1 La fonction $f(x) = \dfrac{x^2+3x+1}{x^4}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ donc en tout point de l'intervalle d'intégration $[2;+\infty[$. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4}dx$ est donc une intégrale généralisée de borne à risque, la borne supérieure $b=+\infty$. Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}$, alors $f(x)$ est équivalente au voisinage de la borne à risque $b=+\infty$ à l'intégrande d'une intégrale de Riemann de la forme $\dfrac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha=2$. Puisque $\alpha=2$ et $b=+\infty$, l'intégrale de Riemann existe ; donc par comparaison, $\displaystyle\int_2^b f(x)dx$ existe.

2 La fonction $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ est définie et continue sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$ donc sur l'intervalle d'intégration $]0;2]$ sauf en le réel 0. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx$ est donc une intégrale généralisée de borne à risque, la borne inférieure $b=0$. Comme $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, alors $f(x)$ est équivalente au voisinage de la borne à risque $b=0$ à l'intégrande d'une intégrale de Riemann de la forme $\dfrac{1}{x^\alpha}$ avec $\alpha=1$. Puisque $\alpha=1$ et $b=0$, l'intégrale de Riemann n'existe pas ; donc par comparaison, $\displaystyle\int_b^2 f(x)dx$ n'existe pas.

2.3.2.C.c Intégrales de Bertrand

Théorème 127 (Intégrales de Bertrand)**.** *Les intégrales de Bertrand consistent à intégrer les fonctions de la forme* $\dfrac{1}{x^\alpha \log^\beta(x)}$ *avec* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *entre un réel positif non nul et* $+\infty$. $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \log^\beta(x)}dx$ *existe si et seulement si* $\alpha>1$ *ou* $(\alpha=1$ *et* $\beta>1)$*.*

2.3.2.C.d Intégrales exponentielles

Théorème 128 (Intégrales exponentielles)**.** *Les intégrales exponentielles consistent à intégrer les fonctions de la forme* $\displaystyle\int e^{\lambda x}dx$ *avec* $\lambda\in\mathbb{R}$ *entre un réel et la borne à risque* $+\infty$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda x}dx$ *existe si et seulement si* $\lambda<0$.

➔ Exercice 83. *Existence d'intégrales impropres* : Analyser l'existence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} a^x dx$ avec $a>0$.

Les différentes étapes pour analyser l'existence d'une intégrale impropre sont résumées figure 27.

2.3.2.D Exercices

➔ Exercice 84. *Existence d'intégrales généralisées* : Analyser l'existence des intégrales généralisées de l'exercice 81.

2.3.3 Calcul d'intégrales impropres

2.3.3.A Méthodologie

Méthodologie 129 (Calcul d'une intégrale impropre $\displaystyle\int f(x)dx$)**.**

1. *Déterminer la (ou les) borne(s) à risques dans l'intervalle d'intégration avec la méthodologie 120.*
2. *Découper l'intégrale (avec Chasles et le théorème d'inversion des bornes) en somme d'intégrales ayant une seule borne à risque de la forme* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *avec* b *une des bornes à risques, puis analyser chaque terme* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *comme suit :*
3. *(Pour les poursuites d'études longues) Montrer l'existence de* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *et en cas d'existence :*

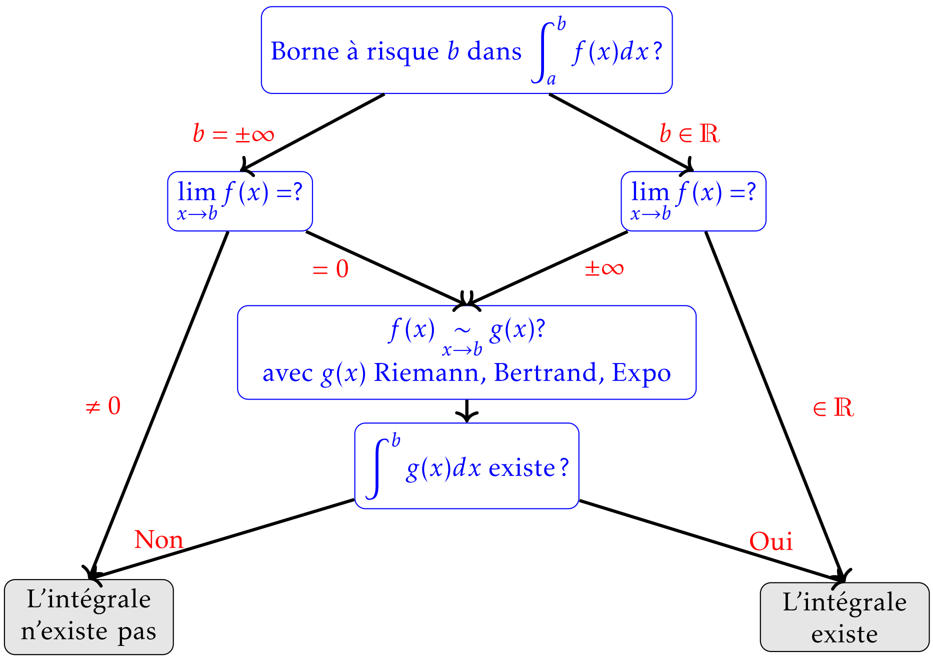


Figure 27 – Synthèse des étapes pour montrer l'existence d'une intégrale généralisée.

4. *Calculer* $\int_a^b f(x)dx$ *en :*
   - *Posant* T *un réel quelconque dans* $[a;b[$, *puis calculer* $F(T) = \int_a^T f(x)dx$ *avec les outils classiques sur les intégrales propres (méthodologies 112, 114, 116)*
   - *Calculant la limite quand* $T \to b$ *de* $F(T)$
   - *La limite trouvée est* $\int_a^b f(x)dx$ *: elle doit être réelle si l'intégrale existe, sinon elle sera* ∞
5. *Ajouter tous les résultats d'intégrales pour obtenir* $\int f(x)dx$

T.153

2.3.3.B Exercices

2.3.3.B.a Exercices

Exercice 85. *Exercice type : Intégrales impropres :* Calculer :

1 $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{10^x}dx$ **2** $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$

T.154

Exercice 86. *Calcul d'intégrales généralisées :* Calculer en suivant les indications proposées :

1 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$

2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

3 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx$ IPP

4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$ IPP

5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(|x|+1)^3}dx$

6 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}dx$ $u = x^6$

7 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ $u = x+1$

8 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}dx$ $u = e^x$

9 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

10 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3}dx$ IPP

T.155

2.3.3.B.b Exercices (pour les poursuites d'études longues)

➔ Exercice 87. *Concours DUT-BTS 2010 : QCM* : On veut calculer : pour tout $u > 0$ $F(u) = \displaystyle\int_u^1 \frac{2x\ln(x)}{(x^2+1)^2}dx$ (en faisant une IPP et en décomposant la fraction obtenue), puis $\lim\limits_{u\to 0} F(u)$. On pose $G(u) = \displaystyle\int_u^1 \frac{dx}{x(x^2+1)}$. Quelles sont les affirmations vraies parmi :

1 $F(u) = \dfrac{\ln(u)}{(u^2+1)^2} + G(u)$

2 $\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{1}{x(x^2+1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1}$

3 $G(u) = \dfrac{1}{2}\ln(u^2+1) - \ln(u) - \dfrac{\ln(2)}{2}$

4 $F(u) = \dfrac{u^2\ln(u)}{u^2+1} + \dfrac{1}{2}\ln(u^2+1) - \dfrac{\ln(2)}{2}$

5 $\lim\limits_{u\to 0} F(u) = -\dfrac{\ln(2)}{2}$

➔ Exercice 88. *Concours DUT-BUT 2009 : QCM* :

Question 1 : Soient $X \in]-2,1[$ et l'intégrale $I(X) = \displaystyle\int_{2/3}^X \frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{2+x}\right)^{1/3} dx$. En faisant le changement de variable $t = \left(\dfrac{1-x}{2+x}\right)^{1/3}$, on obtient l'intégrale $I(X) = J(T) = \displaystyle\int_{t_1}^T g(t)dt$où t_1 et T sont deux réels à déterminer. Quelles affirmations sont vraies parmi :

1 $x = \dfrac{1-2t^3}{1+t^3}$

2 $dx = \dfrac{-6t^2}{(1+t^3)^2}dt$

3 $t_1 = \dfrac{1}{2}$

4 $T = \left(\dfrac{1-X}{2+X}\right)^{1/3}$

5 $g(t) = \dfrac{1}{1+t^3}$

6 $g(t) = -\dfrac{1}{t+1} + \dfrac{t-2}{t^2-t+1}$

Question 2 : On se propose maintenant de calculer, par les techniques d'intégration classiques, la quantité $J(T)$ puis d'en déduire $\lim\limits_{X\to 2} I(X) = A$ et $\lim\limits_{X\to 1} I(X) = B$. Quelles affirmations sont vraies parmi :

1 Une primitive de $\dfrac{1}{t^2-t+1}$ est $\arctan\left(\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$

2 Une primitive de $\dfrac{\ln(t-2)}{t^2-t+1}$ est $\dfrac{1}{2}\ln(t^2-t+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$

3 On a $J(T) = \dfrac{1}{2}\ln\left(2\dfrac{T^2-T+1}{(T+1)^2}\right) - \sqrt{3}\arctan\left(\dfrac{2T-1}{\sqrt{3}}\right)$

4 A existe et vaut $\dfrac{\ln(3)}{2} - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$

5 A existe et vaut $\dfrac{\ln(3)}{2} + \dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$

➔ Exercice 89. *Concours ATS 2010* : Soient deux réels positifs a et p avec $p > 0$.

1. Sachant que $\sin(ax) = Im(e^{iax})$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\sin(ax)dx = \frac{a}{a^2+p^2}$.
2. On pose $f(a,p) = \dfrac{a}{a^2+p^2}$.
   (a) Soit $F(p) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f\big(\sin(\theta), p\big)\mathrm{d}\theta$. En posant $t = \dfrac{\cos(\theta)}{\sqrt{1+p^2}}$, montrer que $F(p) = G(p)\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{A-t^2}$ en précisant $G(p)$ et les bornes a, b de l'intégrale.
   (b) Déterminer A et B tels que pour tout réel différent de $+1$ et -1, $\dfrac{1}{1-t^2} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{1+t}$
   (c) En déduire par intégration la valeur de $F(p)$.