Analyse mathématiques des signaux
Ressource R2.14

Cyrille SICLET, `cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr`
Cléo BARAS, `cleo.baras@univ-grenoble-alpes.fr`

Kévin KASPER, `kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr`

IUT Département Réseaux & Télécommunications

Version 2024-25

Ressource R214

Analyse mathématique des signaux

- Les Maths en RT

Objectif

Maitriser les outils mathématiques utiles pour les réseaux et les télécoms.

Les ressources

- R1.13 (S1) : Mathématiques du signal
- R1.14 (S1) : Mathématiques des transmissions
- R2.13 (S2) : Mathématiques des systèmes numériques
- R2.14 (S2) : Analyse mathématique des signaux
- R3.14 (S3) : Mathématiques : Analyse de Fourier

- Ressource R2.14 : Analyse mathématique des signaux

- **Volume horaire :**
  - 29h30
  - 14 séances de cours/travaux dirigés (14×2h),
  - 1 devoir surveillé (1×1h30)
- **Évaluation**
  - Contrôle continu : coeff 1
    - ☞ évaluations en début de cours, l'évaluation n'est pas de QCM
    - ☞ 1 évaluation sur la dérivation
    - ☞ 1 évaluation sur le calcul de limites
    - ☞ 1 évaluation sur le calcul intégral
  - Devoir surveillé final : coeff 2

1. - Table des matières

1.1.1. - Notion de continuité

Notion de continuité

La continuité est le fait de pouvoir « *tracer le graphe géométrique d'une fonction sans lever le stylo* » ; la courbe représentative « *ne saute pas* » d'un point à un autre.
La continuité indique l'absence de discontinuité ou de rupture dans le graphe.

Exemple 1 (Des fonctions continues et non continues)

- Les polynômes, les log, les expo sont continues sur leur domaine de définition
- L'échelon, la porte ne sont pas continus

1.1.2. - Continuité en un point (PE)

Définition 2 (Continuité en un point)

Soit f une fonction de la variable réelle et a un point de son domaine de définition D_f.

1. f est **continue en** a si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. f est **continue à droite de** a ssi $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
3. f est **continue à gauche de** a ssi $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Remarques

- Une fonction f, qui n'est pas définie en un point a (autrement dit pour laquelle $f(a)$ n'existe pas), n'est jamais continue en a.
- On se reportera à la partie 3 et 4 pour la définition et le calcul des limites.

1.1.2. - Continuité sur un intervalle (PE)

Définition 3 (Continuité sur un intervalle I)

Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point a de l'intervalle I.

Théorème 4 (Image d'un intervalle)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

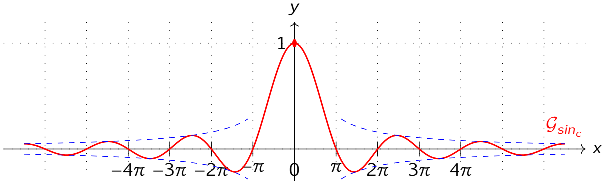
1.1.3. - Exemples : le sinus cardinal

Définition 5 (Sinus cardinal)

Le **sinus cardinal** noté sinc est défini par :

$$\boxed{\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$$

. C'est une fonction prolongée par continuité en 0.



Remarque : En dehors du lobe central, sinc est un signal pseudo-périodique, de pseudo période 2π et d'enveloppes $\pm\dfrac{1}{x}$.

1.1.4. - Domaine de continuité (PE)

Définition 6 (Domaine de continuité)

Le **domaine de continuité** d'une fonction f, noté C_f, est l'ensemble formé par les réels $x \in D_f$ en lesquels la fonction f est continue.

1.1.5. - Exercices (PE)

➔ Exercice 1. *Etude de continuité* : On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{|x-a|}{x-a}$ pour un paramètre a réel quelconque. **1** Donner le domaine de continuité de h. **2** Peut-on prolonger la fonction h par continuité en a ?

➔ Exercice 2. *Continuité en un point* : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$ est-elle continue en 0 ?

1.1.5. - Exercices (PE)

Exercice 3. *Ensemble de continuité d'une fonction produit :*

Soient f et g les fonctions définies par : $\begin{cases} f(x) = x+2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 1-x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et

$\begin{cases} g(x) = 1-x & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x+2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

1. Étudier la continuité des fonctions f et g et représenter graphiquement chacune d'elles.
2. Déterminer la fonction $h = fg$. Représenter graphiquement h en traçant plusieurs points caractéristiques.
3. h est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$? Quelle conclusion peut-on en déduire ?

1.1.5. - Exercices (PE)

Exercice 4. *Ensemble de continuité* :

Donner l'ensemble de continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$
2. $f(x) = \dfrac{2x+|2x+5|}{5x-1}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

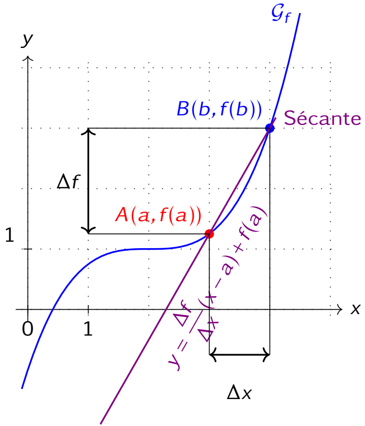
1.2.1. - Dérivabilité en un point a

Définition 7 (Nombre dérivé de f en a)

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en a est le **nombre réel** noté $\boxed{f'(a)}$ ou $\boxed{\frac{df}{dx}(a)}$ égal à la **pente de la tangente** à $\mathcal{G}_f$ au point $M\big(a, f(a)\big)$.

Théorème 8 (Équation de la tangente en a)

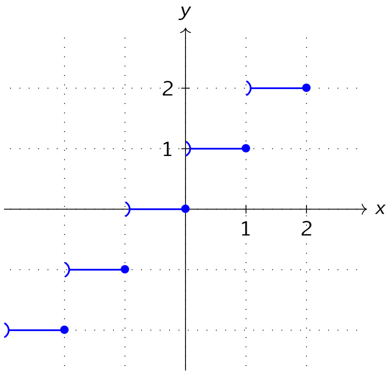
$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$.



1.2.1. - Exemples de non dérivabilité

Exemple 12 (Partie supérieure)

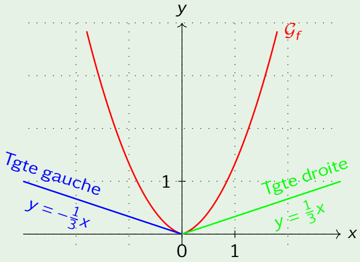
C'est la fonction $x \mapsto \lceil x \rceil$, où $\lceil x \rceil$ est l'entier directement supérieur ou égal à x ; en informatique, elle s'appelle *ceil*. Elle n'est pas continue en tout point a entier (c'est-à-dire $a = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$), donc n'y est pas non plus dérivable.



1.2.1. - Exemples de non dérivabilité

Exemple 13 (Non dérivabilité suite à une inflexion)

La fonction $f(x) = \frac{1}{3}|x| + x^2$ est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0, car elle présente une inflexion en 0 à cause de la valeur absolue : il y a donc une tangente à droite et une tangente à gauche.



Remarque : Les triangle, dent de scie ne sont pas dérivables car ces signaux présentent des inflexions.

1.2.1. - Exercices (PE)

Exercice 5. *Dérivabilité en* 0 : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x|}$ est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0.

1.2.2. - Ensemble de dérivabilité

Définition 14 (Ensemble de dérivabilité B_f)

L'**ensemble de dérivabilité** B_f d'une fonction f est l'ensemble des points x de D_f en lesquels f est dérivable. B_f donne le domaine de définition de la dérivée de f, autrement dit $D_{f'}$.

Théorème 15 (De la dérivabilité à la continuité)

Une fonction dérivable sur l'ensemble B_f est forcément continue sur B_f, autrement dit $B_f \subset C_f$.

Remarques : La continuité n'implique pas nécessairement la dérivabilité (cf. exemple 13)

1.2.2. - Dérivée

Définition 16 (Fonction dérivée ou Dérivée)

La **dérivée** de f, notée f' ou $\dfrac{df}{dx}$, est la **fonction** qui à tout $x \in B_f$ associe le nombre dérivé en x. Elle est définie par :

$$\boxed{f' : \left\{ \begin{array}{ccc} B_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.}$$

ou avec la **notation différentielle**

$$\boxed{\frac{df}{dx} : \left\{ \begin{array}{ccc} B_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{df}{dx}(x) \end{array} \right.}.$$

Remarque : La notation différentielle $\dfrac{df}{dx}$ a l'avantage d'indiquer la variable de dérivation x (via le dx) ; tout ce qui ne dépend pas de cette variable est constant pour (vue de) x.

1.2.2. - Fonctions dérivables usuelles

	f	$f(x)$	B_f	**Dérivée** $f'(x)$
	Constante	c	$\mathbb{R}$	0
	Monôme	$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
	Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_*^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	Inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
Trigonométrie	**Sinus**	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
	Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
	Tangente	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
	ArcSinus	$\arcsin(x) = \arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	ArcCosinus	$\arccos(x) = \arccos(x)$	$]-1;1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	ArcTangente	$\arctan(x) = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
	Racine n**-ième**	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \ (n \in N^*)$	$\mathbb{R}_*^+$ (n paire) ou $\mathbb{R}^*$ (n impaire)	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
	Logarithme népérien	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_*^+$	$\frac{1}{x}$
	Exponentielle	$\exp(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
	Puissances réelles	x^α	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

1.2.2. - Domaine de dérivabilité et dérivée d'un assemblage de fonctions

Fonction	h	B_h	$h'(x)$
Somme	$f+g$	$B_f \cap B_g$	$f'(x)+g'(x)$
Amplification	$\lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R})$	B_f	$\lambda f'(x)$
Produit	$f.g$	$B_f \cap B_g$	$f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$
Inverse	$\dfrac{1}{f}$	$\{x \in B_f / f(x) \neq 0\}$	$-\dfrac{f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$
Quotient	$\dfrac{f}{g}$	$\left\{x \in B_f \cap B_g / g(x) \neq 0\right\}$	$\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$
Puissance	f^n	B_f	$nf'(x)f^{n-1}(x)$
Dilatation de λ	$h(x)=f(\lambda x)$	B_f	$\lambda f'(\lambda x)$
Retard de r	$h(x)=f(x-r)$	B_f	$f'(x-r)$
Composée	$g \circ f$	$\left\{x \in B_f / f(x) \in B_g\right\}$	$f'(x)g'\left(f(x)\right)$

Remarque : Les règles pour déterminer l'ensemble de dérivabilité sont les mêmes que celles pour déterminer l'ensemble de définition.

1.2.2. - Exercices types

➔ Exercice 6. *Exercice type : Ensemble de dérivabilité et calcul de dérivée* :
Calculer l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^3 + \dfrac{1}{x}$
2. $f(x) = 5\cos(2x) - 3\sin(2x)$
3. $f(t) = \dfrac{1}{1 + \omega_0 t}$
4. $f(t) = a\cos(2\pi f_0 t) + b\sin(\omega_1 t)$
5. $f(t) = 3e^{-6t} + 2e^{4t}$
6. $f(t) = \cos(\omega t)e^{-\alpha t}$

1.2.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 7. *Tangente en 0 :* Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe d'équation $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

➔ Exercice 8. *Systèmes dynamiques :* L'étude des systèmes dynamiques du 1^er^ ordre amène souvent à travailler avec la fonction de la variable réelle t : $V(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$, où τ est la constante de temps fixée. Montrer que la tangente à la courbe de $V(t)$ en un point M_0 d'abcisse t_0 quelconque coupe l'axe des temps au point $t_0 + \tau$.

1.2.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 9. *Ensemble de dérivabilité et calcul de dérivée* : Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1 $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$	2 $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$	3 $\phi(s) = \frac{3}{s}$
4 $h(z) = (1-z)^3(1+2z)$	5 $p(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$	6 $s(t) = \frac{(t+1)^2}{t^2+1}$
7 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$	8 $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$	9 $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
10 $f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$	11 $f(x) = \tan\left(\sin(x)\right)$	12 $f(x) = \frac{1}{\cos\left(\sqrt{x}\right)}$
13 $f(x) = 2(2-x) + \frac{1}{4}\frac{x}{x+2}$	14 $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}$	15 $f(x) = \tan^2\left(x^3\right)$
16 $y(x) = x^x$	17 $f_a(x) = x^{x^a}$	18 $g(x) = \ln(\log_{10}(x))$
19 $f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2+3}{1-x}$	20 $g(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{1+x} + (x-2)(x+3)$	21 $h(x) = \ln(1 - e^{-x})$

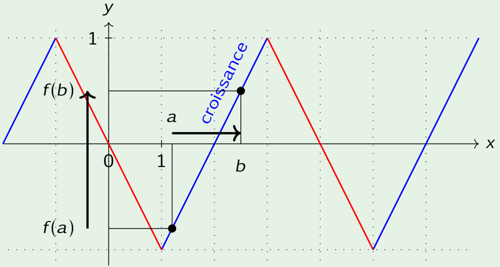
1.2.4. - Sens de variation

Définition 17 (Sens de variation)

Soient deux réels a et b d'un intervalle I de D_f avec $a < b$. f est :

- **croissante sur** I ssi $f(a) \leq f(b)$
- **strictement croissante sur** I ssi $f(a) < f(b)$

Exemple 18 (Dent de scie)



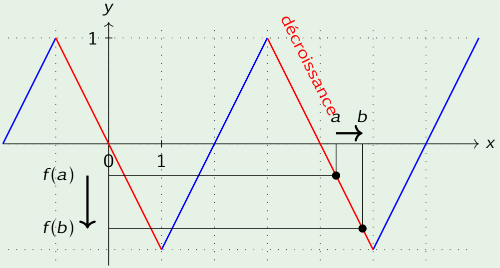
1.2.4. - Sens de variation

Définition 17 (Sens de variation)

Soient deux réels a et b d'un intervalle I de D_f avec $a < b$. f est :

- **décroissante sur** I ssi $f(a) \geq f(b)$
- **strictement décroissante sur** I ssi $f(a) > f(b)$

Exemple 18 (Dent de scie)



1.2.4. - Formule des accroissements finis

Théorème 19 (Formule des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Il existe au moins un réel $c \in]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Corollaire 20 (Sens de variation et dérivée)

Le sens de variation d'une fonction f est donné par ***signe de la dérivée*** *:*

- *Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I*
- *Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \leq 0$, f est décroissante sur I*

1.2.4. - Extremums

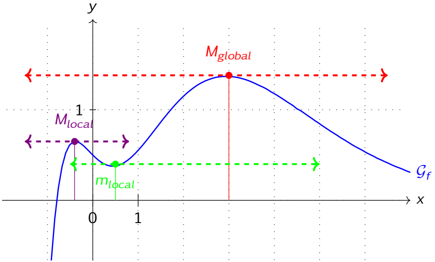
Définition 21 (Extremum)

Pour un intervalle I donné, la fonction f admet :

- un **minimum** m sur I ssi pour tout x de I, $f(x) \geq m$: on le note $m = \arg\min\limits_{x \in I} f(x)$;
- un **maximum** M sur I ssi pour tout x de I, $f(x) \leq M$: on le note $M = \arg\max\limits_{x \in I} f(x)$.

Définition 22 (Extremum absolu/local)

Si $I = D_f$, l'extremum est **absolu** ; sinon, il est **local**.



Exemple 23 ($f(x) = e^{-x}(\frac{1}{2} + x^3)$)

1.2.4. - Extrêma

Théorème 24 (Extrêma)

Une fonction f, dérivable au voisinage d'un point a, admet un extremum valable sur un voisinage de a si sa dérivée f' s'annule en a (c'est-à-dire $f'(a) = 0$) et change de signe au voisinage de a ; la nature de l'extremum dépend des sens de variation.

Remarques :

- Si f est décroissante pour $x < a$ et f est croissante pour $x > a$, l'extremum est un minimum.
- Si f est croissante pour $x < a$ et f est décroissante pour $x > a$, l'extremum est un maximum.

1.2.4. - Exercices types

Exercice 11. *Exercice type : Sens de variation* : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes, en précisant s'il y a lieu les extrêma :

1. $f(x) = 2x - 1 - \ln(x)$
2. $g(x) = 12(x-6)\exp\left(-\dfrac{1}{4}x\right)$

1.2.4. - Exercices

➔ Exercice 12. *Étude de fonctions* : Étudier le sens de variation des fonctions de la variable réelle x définies par :

1 $f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x + 5|}$

2 $g(x) = \dfrac{3x}{x+3}$

3 $y(x) = x^x$

4 $y(x) = x^{(x/a)}$

➔ Exercice 13. *Bac S 1996, et oui!* :

1. On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\phi(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Montrer que ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire le signe de $\phi(x)$ pour tout $x \geq 0$.
2. Soit la fonction f définie par $f(t) = e^{-t}\ln(1+e^t)$. Étudier à l'aide de la fonction ϕ les variations de f.

1.2.4. - Exercices de TD

➔ Exercice 14. *Deux nombres* : On considère deux nombres a et b dont la somme vaut 12. Trouver ces deux nombres pour que : 1 la somme de leur carré soit minimale, 2 le produit de l'un et du carré de l'autre soit maximal, 3 le produit de l'un et du cube de l'autre soit maximal.

➔ Exercice 15. *Proximité de deux voitures* : Deux rues se coupent à angle droit en un point P. L'une à la direction nord-sud, l'autre est-ouest. Une voiture venant de l'ouest passe en P à 10h à la vitesse constante de 20 km/h. Au même instant, une autre voiture, situé à 2 km au nord du croisement, se dirige vers le sud à 50 km/h. À quel moment ces deux voitures sont-elles les plus proches l'une de l'autre (à vol d'oiseau) et quelle est cette distance minimale ?

1.2.4. - Exercices de TD

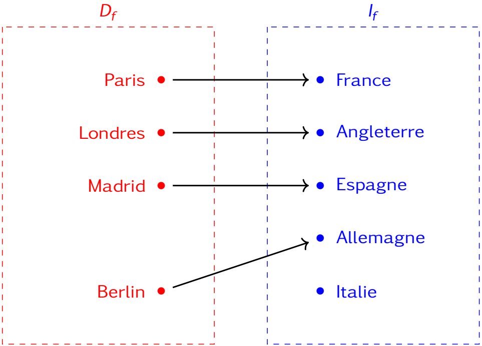
➔ Exercice 16. *Cuisine* : On considère une boîte de conserve cylindrique de hauteur h et de rayon R.

1. On dispose d'une surface de métal S limitée pour construire la boîte de conserve de taille $S = 400\pi$ cm^2. Comment choisir le rayon R et la hauteur h de la boîte pour que son volume V soit maximal ?
2. On souhaite maintenant construire une boîte de volume V_0 donné et fixé. Comment choisir le rayon R et la hauteur h pour que la surface de métal à utiliser soit minimale ? On exprimera la solution en fonction du rapport $\dfrac{h}{R}$.

Mêmes questions avec une casserole.

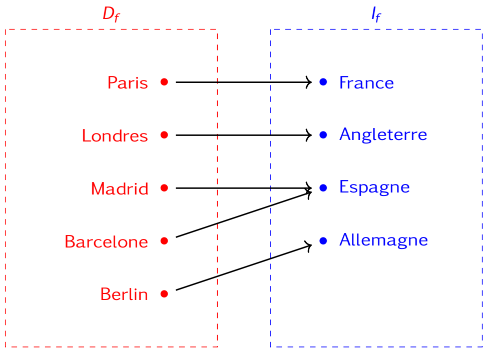
1.2.5. - Notion d'injection (PE)

Une fonction f est injective SSI les images de 2 éléments différents de D_f sont différentes.



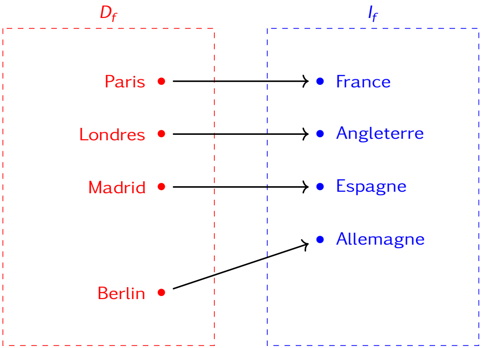
1.2.5. - Notion de surjection (PE)

Une fonction g est surjective ssi tout élément de l'ensemble image I_g possède au moins un antécédent par g (dans D_g).



1.2.5. - Notion de bijection (PE)

Une fonction h est bijective SSI tout élément de l'ensemble image I_h possède un **unique** antécédent par h. Dans ce cas, h admet une **fonction réciproque** h^{-1} qui réalise la transformation inverse de h.



1.2.5. - Bijection (PE)

Définition 25 (Bijection)

Une fonction f est une **bijection** (ou est **bijective**) de l'intervalle I (sous-ensemble de D_f) vers l'intervalle J (sous-ensemble de I_f) ssi pour tout $y \in J$, l'eq. $y = f(x)$ admet une unique solution x.
Cela signifie que : pour tout $x \in I$, il existe un unique élément $y \in J$ ($\exists! y \in J$) tel que $y = f(x)$

Théorème 26 (Condition nécessaire et suffisante)

*Pour être une bijection sur l'intervalle I, f doit être **continue** et **strictement monotone** sur I.*

1.2.5. - Intervalle (PE)

Théorème 27 (Image d'un intervalle par une fonction bijective)

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I vers l'intervalle $J = \{f(x)/x \in I\} = f(I)$. En particulier,

- *si f est strictement croissante, et $I = [a,b]$ alors $J = f([a,b]) = [f(a), f(b)]$;*
- *si f est strictement décroissante, et $I = [a,b]$ alors $J = f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.*

Exemple 28 (La fonction carré)

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$, continue sur $\mathbb{R}$, est strct. $\searrow$ sur $\mathbb{R}^- =]-\infty;0]$ et strct. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers $f(\mathbb{R}^-)$, avec $f(\mathbb{R}^-) = \left[f(0), \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)\right[= [0;+\infty[$ et f est une autre bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $f(\mathbb{R}^+)$ avec $f(\mathbb{R}^+) = \left[f(0); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= [0;+\infty[$. Il existe donc deux solutions à l'équation $f(x) = a$ (avec a un réel positif et non nul quelconque). Comme $a \in [0;+\infty[= f(\mathbb{R}^-) = f(\mathbb{R}^+)$, la première solution appartient à $\mathbb{R}^-$ et la seconde appartient à $\mathbb{R}^+$.

1.2.6. - Fonction réciproque (PE)

Définition 29 (Fonction réciproque)

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J. g est la **fonction réciproque** (ou inverse) de f SSI g est définie en tout point de J **et** pour tout $x \in D_f$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. La réciproque g de f sur I est **unique**. Elle est notée $g = f^{-1}$.

Remarques :

- Une fonction f dont le sens de variation change sur $\mathbb{R}$ admet une réciproque sur chaque intervalle de variation !
- Ne pas confondre f^{-1} et $\dfrac{1}{f}$.

1.2.6. - Propriétés de la réciproque (PE)

Théorème 30 (Sens de variation)

f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et de même sens de variation que la fonction f.

Théorème 31 (Propriétés calculatoires)

- *La composée de f^{-1} et de f est l'identité :* $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.
- *La réciproque de la réciproque de f est f :* $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x) = f(x)$.

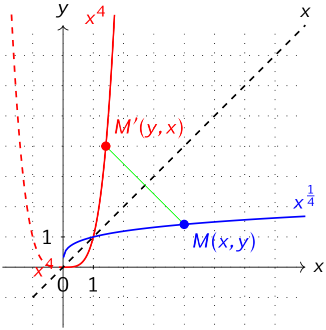
1.2.6. - Propriétés de la réciproque (PE)

Théorème 32 (Graphe)

Dans un repère orthonormé, les graphes $\mathcal{G}_f$ (de f) et $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ (de f^{-1}) sont symétriques par rapport à la 1ère bissectrice du plan, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Exemple 33 (Graphes de f et f^{-1})

$f(x) = x^4$ et sa réciproque sur $\mathbb{R}^+$ $f^{-1}(x) = x^{1/4}$



1.2.6. - Réciproques usuelles

Exemple 34 (Réciproques usuelles)

- ln et exp
- $x \mapsto x^2$ restreinte à $\mathbb{R}^+$ et $\sqrt{x}$. Attention : $\sqrt{x^2} = |x|$.
- sin restreinte à $[-\pi/2; \pi/2]$ et arcsin
- cos restreinte à $[0; \pi]$ et arccos
- tan restreinte à $]-\pi/2; \pi/2[$ et arctan

1.2.6. - Exercices types (PE)

Méthodologie 35 (Montrer qu'une fonction est la réciproque d'une autre)

Montrer que $g(f(x)) = f(g(x)) = x$.

Exercice 17. *Réciproque* : Montrer que $g(x) = 1 + x$ est la réciproque de $f(x) = x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Méthodologie 36 (Déterminer une réciproque)

1. *Étudier la continuité et le (ou les) sens de variation de* f.
2. *Poser* $y = f(x)$ *et inverser l'équation pour avoir* $x = g(y)$. *Alors* $g = f^{-1}$.

Exercice 18. *Réciproque* : Montrer que $f(x) = (x + 1)^{1/3} + 2$ admet une réciproque (sur un intervalle que l'on précisera) et donner l'expression de sa réciproque.

1.2.6. - Exercices types (PE)

➔ Exercice 19. *Composition de fonctions trigonométriques* : Simplifier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1 $x \mapsto \arccos(\cos(x))$
2 $x \mapsto \cos(\arccos x)$
3 $x \mapsto \arctan(\tan(x))$
4 $x \mapsto \tan(\arctan(x))$

➔ Exercice 20. *Réciproque* : Déterminer la (ou les) réciproques de $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

➔ Exercice 21. *Réciproque* : On considère la fonction f de la variable x, définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$. 1 Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $[1;+\infty[$. 2 Montrer que cette réciproque est la fonction $g(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$.

1.2.6. - Exercices types (PE)

➔ Exercice 22. *Réciproque* : On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle x définies par : $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Pour chacune de ces fonctions, 1 montrer qu'elle possède deux intervalles de monotonie, puis 2 expliciter la fonction inverse relative à chacun de ces intervalles.

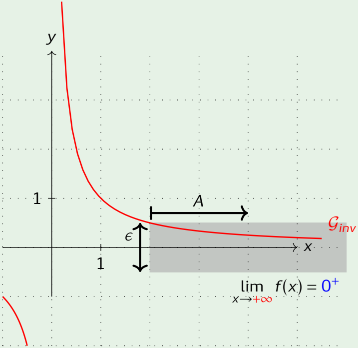
➔ Exercice 23. *Résolution d'équations avec des fonctions puissances* : Déterminer les racines de l'équation : $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

1.3.1. - Notion de comportements asymptotiques

Exemple 37 (La fonction inverse)

Table de valeurs

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
...	...
10^6	10^{-6}



Plus x augmente (autrement dit x tend vers $+\infty$), plus $f(x)$ se rapproche de 0 par valeurs supérieures ; on dit que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$

1.3.1. - Limites

Définitions 38 (Comportements asymptotiques)

- Le comportement asymptotique d'une fonction f de la variable x est la « direction » de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$
- Elle prend la forme d'une limite L qui peut être un nombre $\in \mathbb{R}$ (et on parle de limite finie) ou un infini $+\infty$ ou $-\infty$ (et on parle de limite infinie)
- La limite L peut être atteinte ou approchée par la fonction, en arrivant par valeurs inférieures (L^-) ou supérieures (L^+).

On la note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = L \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f = L$$

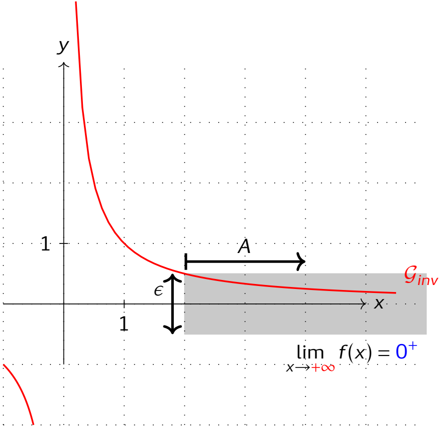
1.3.1. - Limite finie en $+\infty$

Cas d'une limite L réelle finie en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = L$$

Exemple 39 (Fonction inverse)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



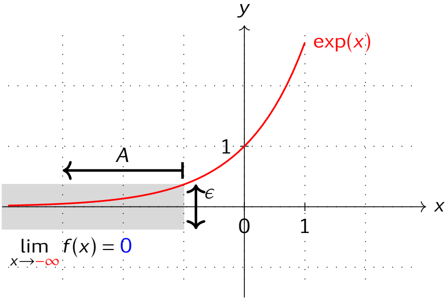
1.3.1. - Limite finie en $-\infty$

Cas d'une limite L réelle finie en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f = L$$

Exemple 40 (Exponentielle)

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$



1.3.1. - Limite finie en ∞ par valeurs supérieures ou inférieures

Cas d'une limite L par valeurs supérieures en ∞

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^+$ signifie que pour x proche de ∞, $f(x)$ tend vers L avec $f(x) \geq L$

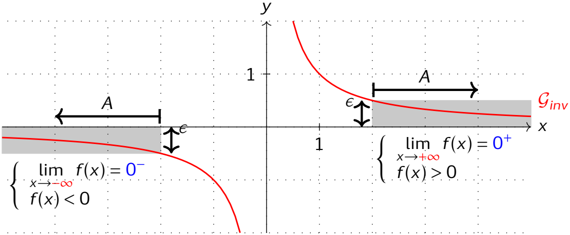
Cas d'une limite L par valeurs inférieures en ∞

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L^-$ signifie que pour x proche de ∞, $f(x)$ tend vers L avec $f(x) \leq L$

Exemple 41 (Fonction inverse)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^- \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$



1.3.1. - Limite infinie en $+\infty$

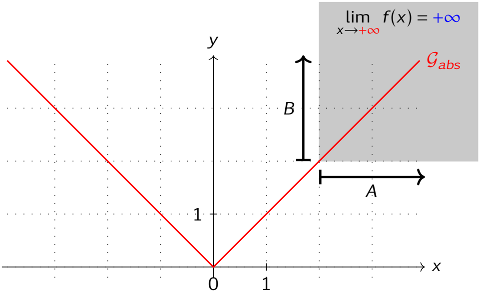
Cas d'une limite $+\infty$ en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, ce qui implique que $f(x) > 0$ pour x suffisamment grand

Exemple 42 (Valeur absolue)

$\lim\limits_{x \to +\infty} |x| = +\infty$

Remarque : Idem pour une limite en $-\infty$ et pour une limite $-\infty$



1.3.2. - Limites des fonctions usuelles ♡

Fonction $f(x)$	Limite en $-\infty$	Limite en $+\infty$
Constante c	c	c
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	n.d. si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$
Inverse $\frac{1}{x}$	0^-	0^+
$\ln(x)$	n.d.	$+\infty$
$\exp(x)$	0^+	$+\infty$
$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$	p.d.l.	p.d.l.
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}^+$	$\frac{\pi}{2}^-$

1.3.2. - Opérations algébriques sur les limites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et s un signe (égal à $+1$ ou -1),

	$\lim\limits_{+\infty} u$	$\lim\limits_{+\infty} v$	$\lim\limits_{+\infty} \lambda u$	$\lim\limits_{+\infty} u+v$	$\lim\limits_{+\infty} u.v$	$\lim\limits_{+\infty} \frac{u}{v}$
Finie-Finie	L_u	L_v	λL_u	$L_u + L_v$	$L_u L_v$	$\frac{L_u}{L_v}$
	L_u	0^+	λL_u	L_u	0	$\text{sign}(L_u)\infty$
	L_u	0^-	λL_u	L_u	0	$-\text{sign}(L_u)\infty$
	0	0	0	0	0	FI
Finie-Infinie	$s\infty$	L_v	$\text{sign}(s\lambda)\infty$	$s\infty$	$\text{sign}(sL_v)\infty$ si $L_v \neq 0$ FI si $L_v = 0$	$\text{sign}\left(\frac{s}{L_v}\right)\infty$
	L_u	$s\infty$	λL_u	$s\infty$	$\text{sign}(sL_u)\infty$ si $L_u \neq 0$ FI si $L_u = 0$	0
Infinie-Infinie	$+\infty$	$+\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
	$-\infty$	$-\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
	$+\infty$	$-\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI
	$-\infty$	$+\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI

Remarque : Résultats identiques lorsque la limite est asymptotique en $-\infty$

1.3.2. - Limites et composées

Théorème 46 (Limite d'une composée)

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = L$ *(avec* L *un réel ou* $+\infty$ *ou* $-\infty$*) alors*
$$\lim_{x \to +\infty} (v \circ u)(x) = \lim_{x \to +\infty} v(u(x)) = \lim_{y \to L} v(y)$$

Remarque : Le résultat est identique lorsque $x \longrightarrow -\infty$

1.3.2. - Bilan sur les formes indéterminées

Théorème 47 (Les classiques)

$\boxed{(+\infty)+(-\infty)}$ $\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}}$ $\boxed{0.\infty}$ $\boxed{\dfrac{0}{0}}$

Théorème 48 (Les nouvelles)

$\boxed{1^{\infty}}$ $\boxed{\infty^{0}}$ $\boxed{0^{0}}$

1.3.2. - Exercices types

Méthodologie 49 (Calcul de limites asymptotiques)

1. *Identifier les fonctions usuelles et donner leurs limites ;*
2. *Identifier le (ou les) assemblages de fonctions usuelles puis calculer la limite de proche en proche en utilisant les règles sur les limites ;*
3. *En cas de forme indéterminée :*
   - *Quelques astuces (cf TD);*
   - *Utiliser des outils plus puissants, comme l'équivalence ou les développements limités.*

Exercice 24. *Exercice type : Limites* : Déterminer les limites suivantes :

1 $\lim_{x \to +\infty} x^3 \ln(x)$ **2** $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x}$

1.3.2. - Exercices de TD

Exercice 25. *Limites* : Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes :

1. $f(x) = 2x^2 + x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{|x-3|}$
3. $f(x) = x^2 - x^3$

Exercice 26. *Limites avec forme indéterminée de type* ∞ - ∞ : Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et (si elle existe) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|+2} - \sqrt{|x|}}{|x|}$
4. $f(x) = \ln(x) - \ln(x+1)$
5. $f(x) = \ln(x^2+1) - 2\ln(x)$

1.3.2. - Relation d'ordre

Théorème 50 (Relation d'ordre en $+\infty$)

Soient deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout x suffisamment grand (i.e. tendant vers $+\infty$),

1. *si $u(x) \geq v(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} v = +\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} u = +\infty$,*
2. *si $u(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} v = -\infty$, alors $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$,*
3. *si $|u(x) - l| \leq v(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} v = 0$, alors $\lim\limits_{+\infty} u = l$.*

Théorème 51 (Relation d'ordre en $-\infty$)

Soient deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout x suffisamment proche de $-\infty$,

1. *si $u(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} v = -\infty$, alors $\lim\limits_{-\infty} u = -\infty$,*
2. *si $u(x) \geq v(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} v = +\infty$, alors $\lim\limits_{-\infty} u = +\infty$.*
3. *si $|u(x) - l| \leq v(x)$ et $\lim\limits_{-\infty} v = 0$, alors $\lim\limits_{-\infty} u = l$.*

1.3.2. - Relation d'ordre

Théorème 52 (Théorème du gendarme)

Soient trois fonctions u, v et w, définies sur $\mathbb{R}$ et a désignant indifféremment un réel fixé, $+\infty$ ou $-\infty$. Si $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ et $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} w$, alors $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} v = \lim\limits_{a} w$.

1.3.2. - Exercices

➔ Exercice 27. *Limites avec les relations d'ordre* : Calculer la limite de la fonction $f(x) = \big(2 + \cos(x)\big)x$ en $+\infty$.

Correction : Cette limite n'est pas immédiate car $\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Par contre, on sait que pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3$. Dès lors que x devient assez grand (notamment x devient positif), on déduit en multipliant l'inégalité précédente par x que $x \leq f(x) \leq 3x$. Comme les deux fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 3x$ tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, alors par relation d'ordre, $f(x)$ aussi : $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

1.3.2. - Équivalence en ∞ et limites

Définition 53 (Équivalence en ∞)

Deux fonctions f et g sont **équivalentes au voisinage de** a (avec $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) ssı $f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x))$ avec $\lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0$. On le note : $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$

Remarques :

- Deux fonctions équivalentes ont une même limite!
- Seule la fonction nulle est équivalente à 0.

Théorème 54 (Équivalence et limite)

Si $f \underset{a}{\sim} g$ *alors* $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$

1.3.2. - Équivalences usuelles en $\pm\infty$

Théorème 55 (Équivalent d'un polynôme)

Un polynôme $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$) est tel que $P(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_n x^n$

Exemple 56 (Équivalent de $P(x) = 3x^4 - 2x = 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x^1 + 0$)

$P(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 3x^4$ et $P(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} 3x^4$

1.3.2. - Équivalences usuelles en $\pm\infty$

Théorème 57 (Équivalent d'une fraction rationnelle)

Une fraction rationnelle $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *avec* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *de degré* n *et* $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$ *de degré* m *admet pour équivalent le quotient des équivalents de* $P(x)$ *et* $Q(x)$.

Exemple 58 (Équivalent de $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{3x^4 - 2x}{6x^3 + 4x^2 + 1} = \dfrac{3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x^1 + 0}{6x^3 + 4x^2 + 0x + 1}$)

$$F(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{3x^4}{6x^3} = \frac{x}{2}$$

1.3.2. - Opérations sur les équivalences

Opérations sur les équivalents

- On peut multiplier, inverser, diviser ou dilater des équivalents
- On ne peut pas ajouter, soustraire ou composer des équivalents, sauf cas très particulier

Théorème 59 (Opérations sur les équivalences)

Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre fonctions telles que $f_1 \underset{+\infty}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{+\infty}{\sim} g_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors :

- $\lambda f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \lambda f_2(x)$
- $\dfrac{1}{f_1(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{f_2(x)}$
- $\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$
- $f_1(\lambda x) \underset{x\to+\infty}{\sim} f_2(\lambda x)$

Remarque : Idem en $-\infty$

1.3.2. - Exercices types

➔ Exercice 28. *Exercice type : Équivalents :* Calculer $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x^2-1}{2x^2+1}$.

1.3.2. - Exercices de TD

Exercice 29. *Limites de fractions rationnelles* : Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f suivantes :

1 $f(x) = \dfrac{7x+3}{4x^2-3x+13}$

2 $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$

3 $f(x) = \dfrac{2x+|2x+5|}{5x-1}$

1.3.2. - Croissance comparée

Définition 60 (Fonction négligeable en l'infini)

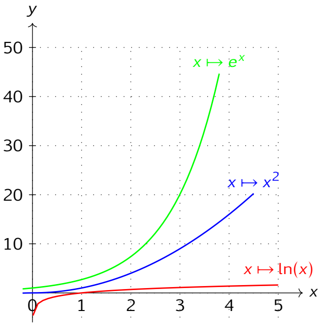
Une fonction f est **négligeable en** a devant une fonction g (avec $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) ssi $f(x) = \epsilon(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$. On le note : $f \underset{a}{\ll} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\ll} g(x)$

Théorème 61 (Règles de croissance comparée)

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ *(avec* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$*). On dit que :* $\ln(x) \ll x^\alpha \ll e^x$ ***en*** $+\infty$

1.3.2. - Croissance comparée

On dit que ln *croit moins vite que les puissances, qui croissent moins vite que l'expo vers* $+\infty$



➔ Exercice 30. *Exercice type : Limites asymptotiques* : Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x)\dfrac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}}$.

1.3.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 31. *Limites avec croissance comparée* : Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et lorsqu'elle existe, lorsque x tend vers $-\infty$, des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$
2. $f(x) = x^3 - 2^x$
3. $f(x) = (x+1)e^{-x}$
4. $f(x) = \dfrac{e^{2x} - x^2}{e^{2x+1}}$
5. $f(x) = \dfrac{3^x}{x^4}$
6. $f(x) = \sqrt{x+1}e^{-3x}$
7. $f(x) = \dfrac{e^{1+x^2}}{x^2\ln(x)}$

8*. $f(x) = \dfrac{10^x}{\sqrt{x^2+1}}$

1.3.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 32. *Accroissements finis (pour les poursuites d'études longues)* :
Cet exercice utilise la formule des accroissements finis donnée par : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, pour $h = b - a$, il existe un réel θ (avec $0 < \theta < 1$) tel que $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$.
Déterminer la valeur prise par θ lorsque la fonction f est définie par :

1. $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$
2. $f(x) = e^x$

Calculer, dans chacun des cas, la limite de θ quand l'écart h tend vers 0.

1.3.2. - Exercices de TD

Exercice 33. *Série harmonique (pour les poursuites d'études longues)* :
Cet exercice utilise la formule des accroissements finis donnée par : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, pour $h = b - a$, il existe un réel θ (avec $0 < \theta < 1$) tel que $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$.

1. Donner un encadrement de $\ln(a+h)$ et l'appliquer lorsque $a = 1$ et $h = \dfrac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire un encadrement de $\ln(n+1) - \ln(n)$, $\ln(n) - \ln(n-1)$, et ainsi de suite jusqu'à $\ln(2) - \ln(1)$.
3. Déduire aussi un encadrement de $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$.
4. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

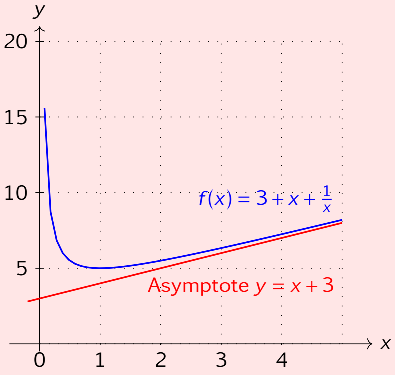
1.3.3. - Application : Asymptotes et branches paraboliques (PE)

Objectifs

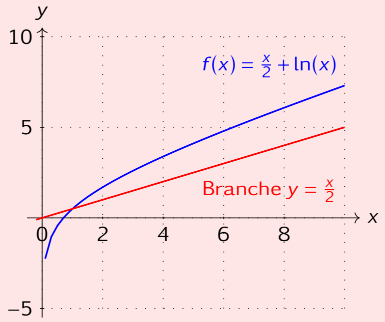
Évaluer « comment » une fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$, autrement dit quelle est sa direction dominante parmi : 1 les droites $(0x)$, $(0y)$, 2 les droites de la forme $y = ax + b$, 3 les branches de la forme $y = ax^2$ guidées par une droite.

1.3.3. - Application : Asymptotes et branches paraboliques (PE)

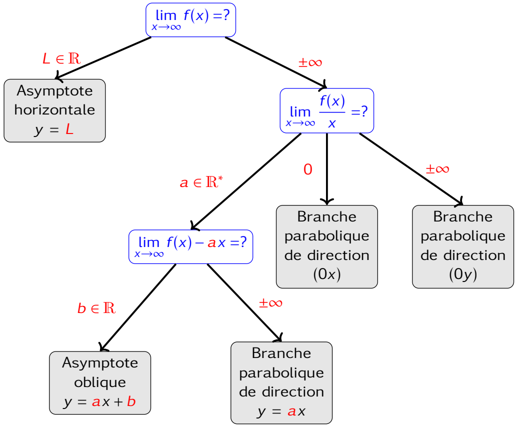
Asymptotes



Branches paraboliques



1.3.3. - Méthodologie (PE)



Remarque : Résultats identiques lorsque $x \to -\infty$

1.3.3. - Exercices types (PE)

➔ Exercice 34. *Asymptotes* : Déterminer la branche asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$: $g(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x-2}$.

1.3.3. - Exercices de TD (PE)

➔ Exercice 35. *Asymptotes* : Déterminer le comportement asymptotique de $f(x) = \dfrac{5x^2 + 3x - 2}{x + 2}$ en $+\infty$.

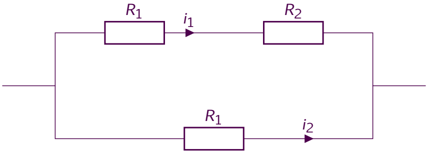
➔ Exercice 36. *Branches asymptotiques* : Déterminer les branches asymptotiques des fonctions suivantes :

1* $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 3}$ **2*** $f(x) = 2(2 - x) + \dfrac{1}{4}\dfrac{x}{x + 2}$

1.3.3. - Exercices de TD (PE)

Exercice 37. *Étude d'un schéma électronique* :

On considère le montage suivant :



où R_1 est une résistance de x Ohms et R_2 une de 3 Ohms.

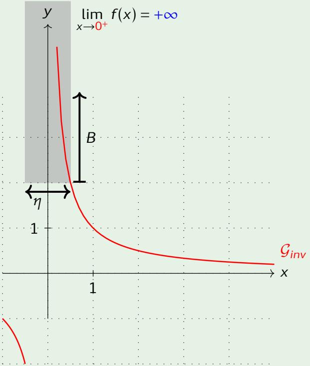
1. Exprimer la résistance équivalente du circuit, notée R, en fonction de x.
2. Étudier les variations de R en fonction de x, ainsi que les branches infinies (on envisagera la possibilité d'une asymptote en l'infinie). Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de R pour x variant entre 0 et 6 Ohms.
3. À partir de quelle valeur de x la différence $\left|R-\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\right|$ est-elle inférieure à 1/100 ? En déduire une valeur approchée de R lorsque $x = 120$ Ohms.

1.4.1. - Notion de limites en un point a (avec $a \in \mathbb{R}$)

Exemple 62 (Fonction inverse)

Table de valeurs

x	$f(x) = \dfrac{1}{x}$
1	1
0.1	10
0.01	100
...	...
1.10^{-6}	10^{6}



Lorsque $x \to 0$ (par valeurs supérieures), $f(x)$ croit indéfiniment ; on dit que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

1.4.1. - Définitions

Définitions 63 (Comportement local)

- Le comportement local d'une fonction f de la variable x est la « direction » de f lorsque x tend vers a, soit des deux côtés, soit par valeurs inférieures (a^-), soit par valeurs supérieures a^+.
- Elle prend la forme d'une limite L qui peut être un nombre $\in \mathbb{R}$ ou un infini $\pm\infty$.
- La limite L peut être atteinte ou approchée par la fonction, en arrivant par valeurs inférieures (L^-) ou supérieures (L^+).

On la note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = L$

Remarque

Très souvent $a = 0$.

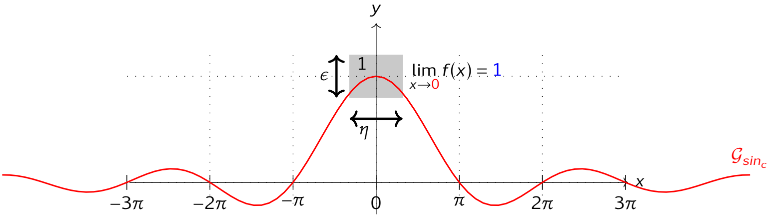
1.4.1. - Limite finie en un point a

Cas d'une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{a} f = L$$

Exemple 64 (Sinus cardinal)

$$\lim_{x \to 0} \text{sinc}(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



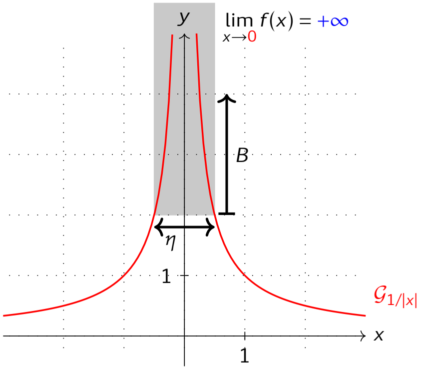
1.4.1. - Limite infinie en un point a

Cas d'une limite $+\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{a} f = +\infty$$

Exemple 65 ($f(x) = \dfrac{1}{|x|}$)

de limite $+\infty$ lorsque $x \to 0$



1.4.1. - Limites par valeurs supérieures ou inférieures

1. Si $x \to a^+$, alors $x \to a$ et $x \geq a$
2. Si $x \to a^-$, alors $x \to a$ et $x \leq a$

De même, pour $L \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L^+$, alors $f(x) \to L$ et $f(x) \geq L$
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L^-$, alors $f(x) \to L$ et $f(x) \leq L$

1.4.2. - Definition (PE)

Définition 66 (Limites en un point)

Soit f une fonction de la variable réelle x, $a \in \mathbb{R}$ un point et $L \in \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = L$, ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$ alors $|f(x) - L| < \epsilon$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = +\infty$, ssi pour tout $B > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$, alors $f(x) > B$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{a} f = -\infty$, ssi pour tout $B > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$, alors $f(x) < -B$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi petit que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a.

1.4.3. - Limites en 0 des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Limite en 0	Fonction $f(x)$	Limite en 0
Constante c	c	$\sin(x)$	0
Puissance x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	0	$\cos(x)$	1
Racine carrée $\sqrt{x}$	0^+	$\tan(x)$	0
Inverse $\frac{1}{x}$	$+\infty$ si $x \to 0^+$ $-\infty$ si $x \to 0^-$	$\arcsin(x)$	0
Log népérien $\ln(x)$	$-\infty$ pour $x \to 0^+$	$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$
Exponentielle e^x	1	$\arctan(x)$	0

1.4.3. - Opérations algébriques sur les limites

Remarque :

- Mêmes théorèmes que pour les comportements asymptotiques
- Mêmes formes indéterminées

1.4.3. - Exercices types

Exercice 38. *Exercice type : Limite locale* : Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{2 + \frac{1}{x}}$.

1.4.3. - Exercices de TD

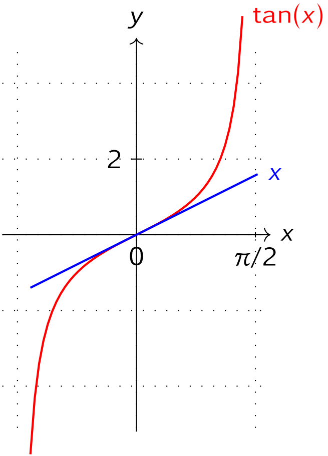
Exercice 39. *Limites en* 0 : Calculer les limites en 0 des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\arctan x}{|x-3|}$
2. $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+5}$
4. $f(x) = \dfrac{2x+|2x+5|}{5x-1}$
5. $f(x) = \dfrac{|x(x-1)|\ln(x)}{x^3}$

1.4.3. - Rappel sur la notion d'équivalence

Équivalence en 0

Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de 0 si elles sont égales au voisinage de 0 à un epsilon près : $f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x))$ avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$. Leurs graphes se tangentent et elles ont la même limite en 0. On le note : $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} g(x)$



Exemple 67 (Équivalent de tan)

$\tan(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$

1.4.3. - Équivalences usuelles en 0

Pour tout x au voisinage de 0 et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$	$(1-x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\alpha x$
$\dfrac{1}{(1-x)^\alpha} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$	$\dfrac{1}{(1+x)^\alpha} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\alpha x$
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$
$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ $a^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(a)$
$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \underset{x\to 0}{\sim}$ le monôme $a_i x^i$ de plus petit degré tel que a_i soit non nul	
$F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to 0}{\sim}$ le quotient des équivalents de $P(x)$ et $Q(x)$	

Remarque : Même application au calcul de limites que pour les comportements asymptotiques, même opérations licites

1.4.3. - Exercices types

➔ Exercice 40. *Exercice type : Limites via équivalences* : Calculer :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}}{x}$

1.4.3. - Limites en $a \neq 0$ d'une fonction f

Théorème 68 (Changement de variable (CV))

Étant donnée une variable x tendant vers a et une variable t choisie de sorte que $x = u(t)$ et $t = v(x)$ avec u et v deux fonctions, alors :
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to b} f(u(t))$ *avec* $b = \lim\limits_{x\to a} v(x)$

Méthodologie 69 (CV pour un calcul de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$)

1. *Poser le cv $x = u(t)$ et inverser le cv pour obtenir $t = v(x)$;*
2. *Réécrire l'expression de $f(x)$ en fonction de t en remplaçant, dans la règle de définition de f, tous les x par $v(t)$, pour obtenir $f(v(t))$;*
3. *Calculer $b = \lim\limits_{x\to a} v(x)$;*
4. *Conclure que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{t\to b} f(u(t))$.*

1.4.3. - Exercices types

➔ Exercice 41. *Exercice type : Changement de variable* : Calculer les limites suivantes en utilisant les changements de variables proposés :

1. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ $\quad \boxed{y = \frac{1}{x}}$

2. $\lim_{x \to -2} 2(2-x) + \frac{1}{4}\frac{x}{x+2}$ $\quad \boxed{y = x+2}$

1.4.3. - Changements de variable usuels

Théorème 70 (Changements de variable usuels)

Les CV usuels sont :

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(y+a)$ $\boxed{y = x - a}$ $\boxed{x = y + a}$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(a-y)$ $\boxed{y = a - x}$ $\boxed{x = a - y}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\boxed{y = \frac{1}{x}}$ $\boxed{x = \frac{1}{y}}$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{y \to -\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\boxed{y = \frac{1}{x}}$ $\boxed{x = \frac{1}{y}}$

1.4.3. - Exercices de TD

Exercice 42. *Changements de variable* : Déterminer les limites suivantes en faisant les changements de variables proposés :

1	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-x-1}$	$\boxed{u=x-1}$	2	$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)$	$\boxed{u=x-2}$
3	$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2}\ln(x-1)$	$\boxed{u=2-x}$	4	$\lim\limits_{x\to +\infty} x\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$\boxed{u=\dfrac{1}{x}}$
5	$\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$	$\boxed{u=\dfrac{1}{x}}$	6*	$\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$\boxed{u=\dfrac{1}{x}}$

1.5.1. - Principe des Développements Limités (DLs)

Principe

Les DLs permettent d'approcher **de plus en plus précisément** et **localement** (pour x autour de a) l'image $f(x)$ par un polynôme $P(x)$. Un DL aura un **ordre** qui indique le degré d'approximation de la fonction f.

Remarque

En général, $a = 0$; sinon, on effectue un changement de variable pour se ramener en 0.

1.5.1. - Principe des Développements Limités (DLs)

Exemple 71 (DLs de tan en 0)

- $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$: l'équivalent en 0 est aussi le DL à l'ordre 1
- $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$: DL à l'ordre 3 avec un polynôme de degré 3
- $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + x^5\epsilon(x)$: DL à l'ordre 5 avec un polynôme de degré 5

Remarque

Les DLs sont incrémentales avec l'ordre

1.5.1. - Développement limité (DL) à l'ordre n

Définition 72 (DL à l'ordre n)

Le **développement limité à l'ordre** n **au voisinage de** 0 d'une fonction f prend la forme d'un **polynôme** à coefficients réels $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ de degré au plus égal à n, de sorte que pour tout x proche de 0, il existe une fonction ϵ telle que $f(x) = P_n(x) + +x^n \epsilon(x)$ avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

1.5.1. - Formule de Taylor-Young

Théorème 73 (Formule de Taylor-Young pour les DLs en 0)

Une fonction f dérivable n fois au voisinage de 0 admet un DL unique, donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

*où la **factorielle** de n est définie par :*
$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n & , si\ n \neq 0 \\ 1 & , si\ n = 0 \end{cases}$ *et ϵ est une fonction telle que* $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$.

➔ Exercice 43. *Exercice type : DL avec Taylor-Young* : Donner le DL de e^x à l'ordre 5.

1.5.1. - Décrémenter l'ordre

Théorème 74 (Décrémenter l'ordre d'un DL)

Pour passer d'un DL à l'ordre n à un DL à un ordre m inférieur, il suffit de tronquer le polynôme à l'ordre m, c'est à dire d'effacer toutes les puissances de x de degré supérieur à m.

Exemple 75 (DL à l'ordre 3 de e^x)

Sachant $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$ (DL à l'ordre 5),

alors $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ à l'ordre 3

1.5.1. - Interprétation numérique

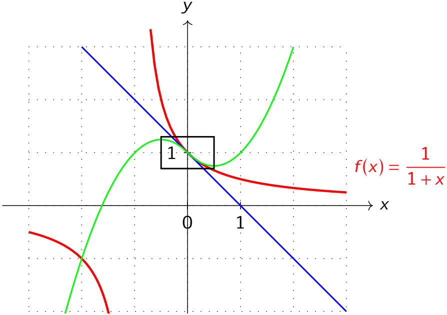
Exemple 85 (DL de e^x)

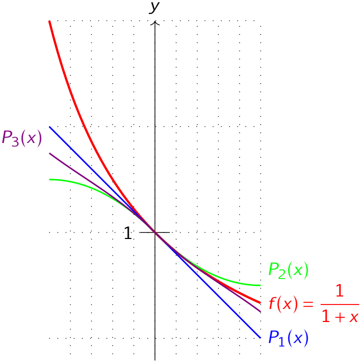
	x	0.1	0.01
Valeur exacte	e^x	1.10517091	1.010050167
DL à l'ordre 1	$1+x$	1.1	1.01
DL à l'ordre 2	$1+x+\frac{x^2}{2!}$	1.105	1.01005
DL à l'ordre 3	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$	1.105166	1.01005016
DL à l'ordre 4	$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}$	1.105170	1.0100501670

1.5.1. - Interprétation numérique et graphique

Exemple 86 ($f(x) = \dfrac{1}{1+x}$)

$f(x)$ admet pour DL à l'ordre n :
$f(x) = P_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$





1.5.2. - Développements limités usuels

$f(x)$	$\underset{0}{\sim}$	$P_n(x)$ du **DL à l'ordre** n
$(1+x)^\alpha$	$1+\alpha x$	$1+\alpha x+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\epsilon(x)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1-x$	$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+x^n\epsilon(x)$
$\ln(1+x)$	x	$x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+x^n\epsilon(x)$
e^x	$1+x$	$1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)$
$\sin(x)$	x	$x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\ldots+\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}+x^{2p+1}\epsilon(x)$
$\cos(x)$	1	$1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\ldots+\dfrac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p}+x^{2p}\epsilon(x)$
$\tan(x)$	x	$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+x^5\epsilon(x)$
$\arcsin(x)$	x	$x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{3x^5}{8}+x^5\epsilon(x)$
$\arctan(x)$	x	$x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{120}+x^5\epsilon(x)$

1.5.2. - DL d'une somme

Théorème 87 (DL d'une somme)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$. Alors $u(x) + v(x) = S_n(x)$ avec $S_n(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$ tronqué à l'ordre n.

Exercice 44. *Exercice type : DL d'une somme* : Déterminer le DL à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

1.5.2. - DLs d'un produit

Théorème 88 (DL d'un produit)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$ *et* $v(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon(x)$*. Alors* $u(x).v(x) = S_n(x) + x^n \epsilon(x)$ *avec* $S_n(x) = P_n(x).Q_n(x)$ *tronqué à l'ordre* n*.*

➔ Exercice 45. *Exercice type : DL d'un produit :* Déterminer le DL à à l'ordre 2 de $f(x) = e^x.\cos(x)$.

1.5.2. - DLs d'un quotient

Théorème 89 (DL d'un quotient)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon(x)$. Alors $\dfrac{u(x)}{v(x)} = S_n(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $S_n(x)$ obtenu par division polynômiale suivant les puissances croissantes de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ tronqué à l'ordre n.

➔ Exercice 46. *Exercice type : DL d'un quotient* : Déterminer le DL à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

1.5.2. - DLs d'une composée

Théorème 90 (DL d'une composée)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ *et* $v(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon(x)$. *Alors* $u\big(v(x)\big) = S_n(x) + x^n\epsilon(x)$ *avec* $S_n(x) = P_n(Q_n(x))$ *tronqué à l'ordre* n.

➔ Exercice 47. *Exercice type : DL d'une composée* : Déterminer le DL à l'ordre 2 de :

1. $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$
2. $g(x) = \ln(1 + 3x)$
3. $h(x) = \sin(-2x)$

1.5.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 48. *DL d'une somme* : Déterminer le DL à à l'ordre 3 de $u(x)+v(x)$ lorsque $u(x)=e^x$ et $v(x)=\sin(x)$.

➔ Exercice 49. *DL d'un produit* : Déterminer le DL à l'ordre 2 de $u(x).v(x)$ avec $u(x)=e^x$ et $v(x)=\sin(x)$.

➔ Exercice 50. *Calcul de DLs* : Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions de la variable x suivantes :

1. $\dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$
2. $\dfrac{1}{1+\sin(x)}$
3. $\tan^2(x)$
4. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
6. $\sin_c(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
7. xe^x
8. $\dfrac{x}{1-e^x}$

1.5.3. - DL et limites

Théorème 91 (DL et limite)

Si une fonction f admet un DL en 0 à l'ordre n de la forme $P_n(x)$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n, alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} P_n(x)$

Exercice 51. *Exercice type : Limite* : Calculer la limite en 0 de $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

1.5.3. - Exercices de TD

➔ Exercice 52. *Calcul de limites* : Calculer les limites quand x tend vers 0 des fonctions suivantes, en utilisant les DLs usuels :

1. $f(x) = \dfrac{x - \arcsin(x)}{x - \sin(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 \sin(x)}{x - \sin(x)}$
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$
4. $f(x) = \dfrac{1 - e^{-x^2}}{1 - \cos(x)}$
5. $f(x) = \dfrac{a^x - b^x}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs.

➔ Exercice 53. *Calcul de limites (DS 2008)* : Calculez les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - (1+x)$
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^2 3^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)$

1.5.3. - Exercices de TD

➔ Exercice 54. *Limites (pour les poursuites d'études longues)* :
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n}}{(1-x)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{x-1}$
5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(2^{1/x}-1\right)$
6. $\lim\limits_{x\to0^\pm} x\left(2^{1/x}-1\right)$
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}$
9. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$

2. - Table des matières

2.1.1. - Notion de primitive

Définition 92 (Primitive)

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, définie et continue sur l'intervalle $[a;b]$. Une **primitive de la fonction** f est une **fonction** F de la variable x définie de $[a;b]$ sur $\mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 93 (Primitives de la fonction inverse)

$F(x) = \dfrac{1}{x}$ est une primitive de $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Corollaire 94 ()

Une primitive F de f sur $[a;b]$ est nécessairement dérivable sur $[a;b]$ et de dérivée $F'(x) = f(x)$ sur $[a;b]$

2.1.1. - Primitive et dérivée, deux opérations inverses

Exercice 55. *Primitives* : Soit f une fonction. Donner une primitive F de f'.

Théorème 95 (Primitive et dérivée)

- *f est une primitive de la dérivée de f .*
- *f est la dérivée d'une primitive de f .*

2.1.1. - Condition d'existence d'une primitive

Théorème 96 (Existence d'une primitive)

Toute fonction f ***continue sur l'intervalle*** $[a;b]$ *possède une primitive sur cet intervalle.*

Rappel

Une fonction f dérivable sur $[a;b]$ est nécessairement continue ; elle admettra donc une primitive sur $[a;b]$.

2.1.1. - DES primitives ...

Théorème 97 (Ensemble des primitives de f)

*f possède une **infinité de primitives**, toutes définies à une constante c près, appelée **constante d'intégration**. Les primitives de f forment donc un ensemble des fonctions noté $\left\{x \mapsto F(x) + c / c \in \mathbb{R}\right\}$.*

Démonstration.

Soit F_1 une primitive de f sur $[a;b]$. Alors la fonction F_2 définie par $F_2(x) = F_1(x) + c$ (avec c constante réelle quelconque) est aussi une primitive de f sur $[a;b]$. $\square$

Exemple 98 (Primitives de l'exponentielle)

Toutes les primitives de la fonction $f(x) = e^x$ sont les fonctions $e^x + c$ avec c une constante réelle quelconque.

2.1.1. - ... qui peuvent devenir LA primitive QUI

Théorème 99 (Une seule primitive pour une condition de valeur donnée)

*Il n'existe qu'**une seule et unique** primitive de f dont la valeur en un point x_0 est y_0 : c'est la fonction F qui satisfait au système d'équations :* $\begin{cases} F' = f \\ F(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Trouver LA primitive QUI

Connaissant une primitive F_1 de f, trouver l'unique primitive F_2 de f dont la valeur en x_0 est y_0 consiste à trouver l'unique valeur de la constante d'intégration c telle que $y_0 = F_1(x_0) + c$. Cette unique valeur est $c_{opt} = y_0 - F_1(x_0)$. F_2 est donc définie pour tout $x \in [a, b]$ par $F_2(x) = F_1(x) + c_{opt} = F_1(x) + \big(y_0 - F_1(x_0)\big)$.

➔ Exercice 56. *La primitive* : Trouver la primitive de e^x qui s'annule en 2.

2.1.1. - Une question de vocabulaire

Une question de vocabulaire

Attention donc au vocabulaire employé : Pour une fonction f, admettant une primitive F :

- **Toutes les primitives** de f sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ avec c la constante d'intégration
- **La primitive de f qui vaut y_0 en x_0** est la seule fonction $F + \big(y_0 - F(x_0)\big)$
- **Une primitive de f** est par exemple $F + 2$

Ces primitives ne sont **valables** que sur un intervalle I où la fonction f est continue (ou au moins dérivable).

2.1.2. - Primitives des fonctions usuelles

	Fonction	$f(x)$	Primitives $F(x)$	Validité	
	Constante	k (avec $k \in \mathbb{R}$)	$kx + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Inverse	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$	$\mathbb{R}^*$	Term.
Puissance	Monôme	x^n (avec $n \in \mathbb{N}$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$	Term.
Puissance	Racine n-ième	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + c$	$\mathbb{R}^+$	
Puissance	Puissance d'inverse	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$)	$\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}^*$	Term.
Puissance	Puissance	x^α (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\mathbb{R}^{*+}$	
Expo	Exponentielle	e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$	Term.
Expo	Expo. à base a	$a^x = e^{x\ln(a)}$ (avec $a \in \mathbb{R}^+_*$)	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$	$\mathbb{R}$	

2.1.2. - Primitives des fonctions usuelles

	Fonction	$f(x)$	Primitives $F(x)$	Validité	
Trigonométrie	**Cosinus**	$\cos(x)$	$\sin(x)+c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Sinus	$\sin(x)$	$-\cos(x)+c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Tangente	$1+\tan^2(x)$	$\tan(x)+c$	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$	M1205
	ArcCosinus	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)+c$	$]-1;1[$	M1205
	ArcSinus	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)+c$	$]-1;1[$	M1205
	ArcTangente	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\arctan(x)+c$	$\mathbb{R}$	M1205

2.1.2. - Opérations sur les fonctions

Soient u une fonction de primitive U, v une fonction de primitive V et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Fonction	$f(x)$	Primitives
Somme	$f(x) = u(x) + v(x)$	$F(x) = U(x) + V(x) + c$
Difference	$f(x) = u(x) - v(x)$	$F(x) = U(x) - V(x) + c$
Amplification	$f(x) = \lambda u(x)$	$F(x) = \lambda U(x) + c$
Homothétie	$f(x) = u(\lambda x)$	$F(x) = \dfrac{1}{\lambda} U(\lambda x) + c$

➔ Exercice 57. *Exercice type : Primitives* : Trouver toutes les primitives de :

1 $f(x) = \dfrac{2}{x} + 3x$ 2 $g(x) = e^{3x} + \dfrac{1}{5}\cos(2x)$

2.1.2. - Opérations sur les fonctions

Si f peut s'écrire comme la dérivée d'un produit, d'un quotient ou d'une composée faisant intervenir les fonctions u et v, on peut aisément donner une primitive de f .

Dérivée	Fonction	$f(x)$	Primitives
d'un produit	$f=(u.v)'$	$f(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$F(x)=u(x).v(x)+c$
d'un quotient	$f=\left(\frac{u}{v}\right)'$	$f(x)=\dfrac{u(x)'v(x)-u(x)v(x)'}{v(x)^2}$	$F(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}+c$
d'une composée	$f=(u\circ v)'$	$f(x)=v'(x)u'\big(v(x)\big)$	$F(x)=u\big(v(x)\big)+c$

➔ Exercice 58. *Primitive de fractions rationnelles* : Donner toutes les primitives de $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

2.1.3. - Techniques d'intégration - Cas général

Méthodologie 100 (Recherche de primitives de f dans le cas général)

1. *Reconnaître les fonctions usuelles dans f et donner une de leur primitive*
2. *Reconnaître l'assemblage de fonctions utilisées (somme, dérivée, amplification, composée, ...)*
3. *Intégrer en utilisant les tables en n'oubliant pas la constante d'intégration*

➔ Exercice 59. *Exercice type : Primitives* : Donner toutes les primitives de :

$$\boxed{1}\ f(x) = 2x(1+x^2)^2$$

$$\boxed{2}\ P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$\boxed{3}\ f(x) = 2\cos(3x) + 5\sin(\frac{1}{5}x)$$

2.1.3. - Techniques d'intégration - Cas particulier 1

Méthodologie 101 (Recherche des primitives de f lorsque f contient des fonctions trigonométriques)

Linéariser la fonction en somme de $\cos$ *et de* $\sin$ *(à la puissance* 1*) puis appliquer la méthodologie 100 (cas général)*

➔ Exercice 60. *Primitives de fonctions trigonométriques* : Donner toutes les primitives de :

1. $f(x) = \sin^2(x)$
2. $g(x) = \cos^2(x)$
3. $h(x) = \cos(3x)\sin(2x)$

2.1.3. - Techniques d'intégration - Cas particulier 2

Méthodologie 102 (Recherche des primitives de f lorsque f est une fraction rationnelle)

1. *Si* $f = \dfrac{u'}{u}$, *alors* $F(x) = \ln|u(x)| + c$
2. *Si* $f = \dfrac{u'}{u^n}$ *(avec* $n \in \mathbb{N}^*$*), alors* $F(x) = \dfrac{1}{1-n}\,\dfrac{1}{u^{n-1}(x)} + c$
3. *Si* $f = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, *alors* $F(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$
4. *Sinon, décomposer* f *en éléments simples, pour obtenir*
   $f(x) = P(x) + \dfrac{A}{x-a} + B\,\dfrac{2x+b}{x^2+bx+c}$ *et intégrer :*
   - *le polynôme* $P(x)$
   - *les éléments* $\dfrac{A}{x-a}$ *ayant pour primitive* $A\ln\left|x-a\right|$
   - *les éléments* $B\,\dfrac{2x+b}{x^2+bx+c}$ *ayant pour primitive* $B\ln\left|x^2+bx+c\right|$

   puis ajouter toutes les primitives obtenues.

2.1.3. - Exercices

Exercice 61. *Primitives de fractions rationnelles* : Donner toutes les primitives de :

1 $f(x) = 5\dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ **2** $g(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$

2.1.3. - Exercices

➔ Exercice 62. *Calcul de primitive* : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner toutes les primitives $F(x)$ de f et l'ensemble de définition des primitives, en utilisant les règles d'opérations sur les fonctions :

1. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = 2x\left(x^2+1\right)^3$
4. $f(x) = \left(x^2+1\right)^3$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^5}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$
7. $f(x) = e^x(x+1)$
8. $f(x) = (x^2+1)\sin(x^3+3x-3)$
9. $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+7}}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^3+3x^2+6x+1}}$
11. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{9-\sin^2(x)}}$
12. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

2.1.3. - Exercices

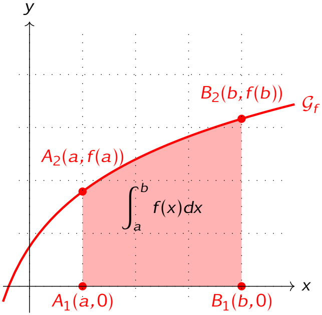
Exercice 63. *Primitives de fractions rationnelles* : Trouver une primitive des fractions rationnelles suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$
3. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2-3x+2)}$
5. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)}$
6. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$
7. $f(x) = \dfrac{5x-12}{x(x-4)}$

2.2.1. - L'intégrale comme aire algébrique

Définition 103 (Intégrale de f de a à b)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. L'intégrale de f de a à b est l'**aire algébrique (signée)** de la surface dite "sous" le graphe géométrique $\mathcal{G}_f$ de f entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On la note $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. f est alors appelé **intégrande**.

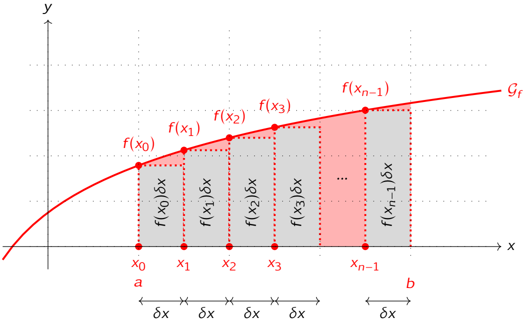


Remarques

- dx désigne la différentielle de x, autrement dit une petite variation de x.
- x est la **variable d'intégration**. C'est une variable muette

2.2.1. - Approximation de l'intégrale par une somme de rectangle

n mesures de la fonction : $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_{n-1})$ aux points x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} espacés d'une distance $\delta x = x_1 - x_0 \approx \frac{b-a}{n}$



$$f(x_0)\delta x + f(x_1)\delta x + f(x_2)\delta x + \ldots + f(x_{n-1})\delta x \approx \int_a^b f(x)dx$$

2.2.1. - Approximation de l'intégrale par une somme de rectangle

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta x \approx \int_a^b f(x)dx$$

Lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$ (et f intégrable), alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Conclusions

- Une intégrale est la **somme** de toutes les valeurs $f(x)$ que prend la fonction f entre $x = a$ et $x = b$ pondérées par la quantité infiniment petite dx.
- Dans le calcul d'une intégrale, il faudra systématiquement prendre en compte la règle de définition qui s'applique pour f dans l'intervalle d'intégration $[a; b]$.

2.2.1. - Exercices

➔ Exercice 64. *Exercice type : Intégrale d'une porte* : Calculer l'intégrale $\int_{-5}^{5} \Pi(t/2)dt$ où Π désigne la fonction porte normalisée.

2.2.1. - Intégrale (propre)

Définition 105 (Intégrale (propre))

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ ayant pour primitive la fonction F sur $[a;b]$. Alors f est **intégrable sur** $[a;b]$ et son intégrale entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la constante d'intégration c choisie pour F
- $\Big[F(x)\Big]_a^b$ est une expression/notation mathématique
- cette intégrale (par définition) est aussi la "somme" de toutes les valeurs $f(x)$ prises par f lorsque x varie entre a et b. La règle de définition utilisée pour $f(x)$ dans le calcul de l'intégrale est donc celle valable pour $x \in [a;b]$.

2.2.1. - Exercices

Exercice 65. *Exercice type : Intégrales* : Calculer :

1. $\displaystyle\int_1^2 \text{sign}(t)dt$
2. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} |t|dt$

Exercice 66. *Intégrale nulle* : Montrer que pour toute fonction f continue au voisinage d’un réel a, $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$

2.2.2. - Propriétés des intégrales propres

Théorème 109 (Relation de Chasles)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Théorème 110 (Inversion des bornes)

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

➔ Exercice 67. *Relation de Chasles :* Calculer $\displaystyle\int_0^2 (\Pi_2(x) + x)dx$.

2.2.2. - Propriétés de l'intégrale propre

Théorème 111 (Intégrale et symétrie graphique)

- *Si la fonction f est* ***paire****, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$
- *Si la fonction f est* ***impaire****, alors* $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$
- *Si la fonction f est* ***périodique de période*** *T, alors*
$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$$

Exercice 68. *Intégrale d'une fonction périodique* : Calculer $\displaystyle\int_{3\pi}^{5\pi} \cos(x)dx.$

2.2.3. - Techniques d'intégration

Méthodologies

1. Rechercher une **primitive** F de f puis calculer $F(b) - F(a)$.
2. Utiliser une **intégration par parties** pour se ramener à la méthodologie précédente.
3. Effectuer un **changement de variable** pour se ramener à la méthodologie précédente.

2.2.3. - Méthodologie : Recherche de primitives

Méthodologie 112 (Recherche de primitives)

$\int_a^b f(x)dx$ se calcule en trouvant une primitive F de f puis en évaluant $\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$. F est recherchée avec les méthodologies 100, 101 et 102, déjà vues pour le calcul de primitive et qui se résument de la sorte :

- *f = assemblage de fonctions usuelles $\Rightarrow$ tables des primitives usuelles et opérations sur les fonctions*
- *f = fonctions trigonométriques $\Rightarrow$ Linéarisation*
- *f = fraction rationnelle simple*

  $\rightarrow$ mettre f en relation avec du $\frac{u'}{u}$, du $\frac{u'}{u^n}$ ou du $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ puis intégrer

  $\rightarrow$ sinon, faire une DES[a] de f puis intégrer les $\frac{A}{x-a}$ et $\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$

a. Décomposition en éléments simples

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 69. *Intégrales* : Calculer :

1 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{1+t^2}$ 2 $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)}dx$

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 70. *BTS Groupement B 2003* : Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x+3)e^{-x}$.

1. Montrer que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par : $F(x) = -(2x+5)e^{-x}$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 5 - 6e^{-\frac{1}{2}}$.

2.2.3. - Exercices

Exercice 71. *Calcul d'intégrales* : Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 (6x^2-5)(2x^3-5x+1)dx$
2. $\displaystyle\int_{-2}^2 |x^2+2x-3|dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan(x)dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)dx$
5. $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(t)|dt$
6. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{t\ln(t)}dt$

2.2.3. - Exercices

Exercice 72. *BTS Groupement E 2002* : Soit f et h deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;5]$ par : $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 24x)$ et $h(x) = -x^2 + 6x$.

1. Etudier et représenter graphiquement les fonctions f et h sur l'intervalle $[0;5]$.
2. En notant $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_h$ les graphes géométriques de f et h, intuitez la position relative de $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_h$ dans le plan. Justifier ensuite votre réponse par le calcul.
3. Calculer l'aire $\mathcal{S}$ de la partie du plan comprise entre les deux graphes. On donnera une valeur exacte.

2.2.3. - L'Intégration Par Partie (IPP) pour le produit de fonctions

Théorème 113 (Intégration par parties)

Si la fonction f à intégrer s'écrit $f(x) = u'(x)v(x)$ avec u, v deux fonctions définies et dérivables sur $[a;b]$ et de dérivées respectives u' et v' elles-même continues sur $[a;b]$ alors la formule de l'intégration par parties consiste à écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \overset{u(x)}{\boxed{u'(x)}}\ \underset{v'(x)}{\boxed{v(x)}}\ dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

2.2.3. - Méthodologie : L'IPP

Méthodologie 114 (IPP)

1. *Chercher u' et v tels qu'on puisse écrire $f(x) = u'(x)v(x)$;*
2. *Déterminer une primitive u de u' ;*
3. *Calculer la dérivée v' de v ;*
4. *Appliquer la formule de l'IPP $\int_a^b f(x)dx = \left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$ et calculer $\left[u(x) \cdot v(x)\right]_a^b$ puis intégrer $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ avec les différentes méthodologies.*

2.2.3. - Choix des fonctions de l'IPP

Choix des fonctions u' et v de l'IPP

Ce choix est arbitraire et requiert de la pratique et de l'intuition.

Cependant, l'idée principale est que $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)dx$ soit plus facile à calculer que $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)dx$: on aura donc souvent tendance à choisir :

- comme terme $u'(x)$, les fonctions trigonométriques, les exponentielles ;
- comme terme $v(x)$, les polynômes, les logarithmes.

2.2.3. - Exercices

Exercice 73. *Exercice type : IPP* : Calculer avec une IPP :

1. $\displaystyle\int_1^2 (2x+1)e^x dx$
2. $\displaystyle\int_1^3 x\cos(x) dx$

2.2.3. - Exercices de TD

➔ Exercice 74. *IPP* : Calculer les intégrales suivantes en faisant une intégration par parties :

1. $\int_0^{\pi} x\sin(x)dx$
2. $\int_a^b x^{\alpha}\ln(x)dx$ avec $0 < a < b$ et $\alpha > 1$
3. $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$
4. $\int_a^0 xe^{-x}dx$ avec $a \in \mathbb{R}$

➔ Exercice 75. *IPP* : Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$ fixé. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une IPP :

1. $\int_0^t e^{2x}(3x^2+1)dx$
2. $\int_0^t e^{-x}(x^3+5x^2)dx$
3. $\int_0^t \ln(x^2+1)dx$
4. $\int_1^t x^2\ln(x)dx$
5. $\int_0^t \arctan(x)dx$

2.2.3. - Méthodologie : le Changement de Variable (CV)

Théorème 115 (Le changement de variable)

Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur $[a;b]$ et $I = \int_a^b f(x)dx$. On pose

$\boxed{x=u(t)}$ *où u est une fonction de la variable t qui est :*

- ***définie** et **dérivable** sur $[\alpha;\beta]$ de dérivée telle que $dx = u'(t)dt$;*
- ***monotone** sur $[\alpha;\beta]$ donc ayant une réciproque u^{-1} telle que $t = u^{-1}(x)$;*
- *telle que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$ et donc telle que $\alpha = u^{-1}(a)$ et $\beta = u^{-1}(b)$.*

Alors :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(u(t)\big)\,u'(t)dt$$

2.2.3. - Méthodologie du CV par l'exemple

Méthodologie 116 (CV)

1. *Poser le CV* $\boxed{x=u(t)}$ *et l'inverser pour avoir* $\boxed{t=u^{-1}(x)}$ *;*
2. ***Règle de définition** : réécrire la règle de définition de* $f(x)$ *en remplaçant l'ancienne variable* x *par la nouvelle* t *;*
3. ***Calcul des bornes*** $\boxed{\alpha}$ *et* $\boxed{\beta}$ *: calculer ce que vaut* t *lorsque* $x=a$*, puis lorsque* $x=b$ *;*
4. ***Calcul de la différentielle*** $\boxed{dx=u'(t)dt}$ *: en interprétant* x *comme une fonction de* t*, calculer* $u'(t)=\dfrac{dx}{dt}$ *autrement dit la dérivée* x' *de* x *par rapport à* t *; en déduire* dx *en fonction de* dt *;*
5. *Appliquer la formule du CV, puis continuer le calcul de l'intégrale avec les méthodologies du cours.*

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 76. *CV* : Calculer $\int_0^1 \exp(\sqrt{x})dx$ en faisant le CV $\boxed{t = \sqrt{x}}$.

2.2.3. - Choix du CV

Choix du CV

En général, le CV est suggéré par l'énoncé ; sinon

$f(x)$ de la forme	Changement de variable (CV)
$\sqrt{1-x^2}$	$x = \cos(t)$ ou $x = \sin(t)$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$x = \tan(t)$
$\dfrac{e^x+\alpha}{e^x+\beta}$	$x = \ln(t)$
$\sqrt{a^2-b^2(x+\alpha)^2}$	$x = \dfrac{a}{b}\cos(t)-\alpha$ ou $x = \dfrac{a}{b}\sin(t)-\alpha$

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 77. *CV* : Calculer à l'aide d'un CV les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ avec $\boxed{x=\cos(t)}$
2. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}\,dx$ avec $\boxed{t=\frac{1}{x}}$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1/2}\,dx$ avec $\boxed{t=x+\frac{1}{2}}$ puis $\boxed{u=2t}$

2.2.3. - Exercices

Exercice 78. *CV* : Calculer les intégrales suivantes en faisant le changement de variable suggéré :

1. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ avec $\boxed{x = \sin(u)}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{3x^2+2}\,dx$ avec $\boxed{u = \sqrt{\frac{3}{2}}x}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3x-1}{x^2-2x+5}\,dx$ avec $\boxed{u = \frac{1}{2}(x-1)}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$ avec $\boxed{u = e^x}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x+1}{e^{2x}+1}\,dx$ avec $\boxed{u = e^x}$
6. $\displaystyle\int_{1/4}^{1} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$ avec $\boxed{u = \sqrt{x}}$
7. $\displaystyle\int_{1/4}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$ avec $\boxed{u = \sqrt{x}}$
8. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$ avec $\boxed{u = \ln x}$
9. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{3+e^{-x}}\,dx$ avec $\boxed{u = e^x}$ et $a \in \mathbb{R}_*^+$
10. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ avec $\boxed{u = \sqrt{1+e^x}}$ et $a \in \mathbb{R}_*^+$

2.2.3. - Application de l'intégration à la physique

Définition 117 (Grandeurs physiques en électronique)

Soit une tension $U(t)$ fonction du temps t.

- La **valeur moyenne** de $U(t)$ entre l'instant $t = a$ et l'instant $t = b$ est :
$$U_{moy} = \frac{1}{b-a} \int_a^b U(t)dt$$
- La **valeur efficace** [a] de $U(t)$ entre l'instant $t = a$ et l'instant $t = b$ est :
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b U^2(t)dt}$$

---

a. valeur de la tension continue qui provoquerait une même dissipation de puissance que $U(t)$ si elle était appliquée aux bornes d'une résistance

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 79. *Exercice type : Tension en électronique* :
Calculer les valeurs moyennes des tensions suivantes sur l'intervalle de temps spécifié :

1. $U_1(t) = 2\cos(2t-1)$ sur $[1,2]$,
2. $U_2(t) = 3\sin(20\pi t + \pi/4)$ sur $[0,1]$,
3. $U_3(t) = -2\cos(4t+1)$ sur $[0,\pi]$.

Indice : effectuer les changements de variables suivants :

1. $x = 2t-1$,
2. $x = 20\pi t + \pi/4$,
3. $x = 4t+1$.

2.3.1. - Introduction aux intégrales impropres

On cherche à calculer $\int_a^b f(x)dx$ lorsque :

1. f n'est pas définie ou continue sur tous les points de $[a;b]$
2. f n'est définie que sur $]a;b]$ avec f non définie en a
3. f n'est définie que sur $[a;b[$ avec f non définie en b
4. l'intervalle d'intégration est $[a;+\infty[$ ou est $]-\infty;b]$

Exemple 118 (Des intégrales impropres)

- $\int_{-1}^{1} \mathrm{sinc}(x)dx$ alors que sinc n'est pas définie en 0
- $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}dx$ alors que $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini lorsque $t \to 0$ et donc que l'aire sous la courbe est intuitivement infinie
- En Télécommunications, TEB $= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_b^2}\right)dx$

2.3.1. - Intégrale impropre

Définition 119 (Intégrale impropre ou généralisée)

Soient a un réel, b un réel ou un infini ($+\infty$ ou $-\infty$) et f une fonction définie et continue sur $[a;b[$.

- Si $\lim_{T \to b} \int_a^T f(x)dx$ existe et vaut une valeur réelle finie I (c'est à dire une valeur $\neq \infty$), on dit que la fonction f est **intégrable** de a à b. Alors l'**intégrale impropre (ou généralisée)** notée $\int_a^b f(x)dx$ existe et vaut I.
- Si $\lim_{T \to b} \int_a^T f(x)dx$ n'a pas de valeur réelle finie (par exemple vaut $+\infty$), alors on dit que f n'est pas intégrable. Alors l'**intégrale impropre (ou généralisée)** notée $\int_a^b f(x)dx$ n'existe pas et n'a pas de valeur.
- b est appelé la **borne à risque**

2.3.1. - Bornes à risques

Méthodologie 120 (Comment identifier la (ou les) borne(s) à risque ?)

Dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$,

1. *Etudier la dérivabilité (continuité) de* f *sur l'intervalle d'intégration* $([a;b])$ *: si* f *n'est pas dérivable (continue) en différents points de l'intervalle d'intégration, ces points sont des bornes à risque.*
2. *Si l'intervalle d'intégration inclut un infini* $(-\infty, +\infty)$*, cet infini est une borne à risque.*
3. *Dans tous les autres cas, l'intégrale ne présente pas de borne à risque. Ce n'est pas une intégrale généralisée mais une intégrale propre.*

2.3.1. - Exercices

Exercice 80. *Bornes à risque d'intégrales impropres* : Identifier la ou les bornes à risques dans les intégrales suivantes :

1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+x+1} dx$

2.3.1. - Exercices

➔ Exercice 81. *Bornes à risques* : Pour chacune des intégrales suivantes, préciser (si elles existent) les bornes à risques :

1. $\displaystyle\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$
4. $\displaystyle\int_{-1}^{+1} \frac{\exp(\arctan(x))}{x}dx$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t^2}dt$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+x+1)^n}dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

2.3.3. - Calcul de l'intégrale impropre

Méthodologie 129 (Calcul d'une intégrale impropre $\int f(x)dx$)

1. *Déterminer la (ou les) borne(s) à risques dans l'intervalle d'intégration*
2. *Découper l'intégrale en somme d'intégrales* $\int_a^b f(x)dx$ *avec b une des bornes à risques*
3. *Calculer* $\int_a^b f(x)dx$ *en :*
   - *Posant* T *un réel quelconque dans* $[a;b[$*, puis calculer* $F(T) = \int_a^T f(x)dx$
   - *Calculant la limite quand* $T \to b$ *de* $F(T)$
   - *La limite trouvée est* $\int_a^b f(x)dx$ *: elle doit être réelle si l'intégrale existe, sinon elle sera* ∞
4. *Ajouter tous les résultats d'intégrales pour obtenir* $\int f(x)dx$

2.3.3. - Exercices

➔ Exercice 85. *Exercice type : Intégrales impropres :* Calculer :

1 $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{10^x} dx$ **2** $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$

2.3.3. - Exercices

➔ Exercice 86. *Calcul d'intégrales généralisées* : Calculer en suivant les indications proposées :

1 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}dx$

2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

3 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx$ IPP

4 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$ IPP

5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(|x|+1)^3}dx$

6 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}dx$ $\boxed{u = x^6}$

7 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$ $\boxed{u = x+1}$

8 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}dx$ $\boxed{u = e^x}$

9 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2}dx$

10 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3}dx$ IPP