

Analyse mathématiques des signaux

Ressource R2.14

Cyrille SICLET, `cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr`

Cléo BARAS, `cleo.baras@univ-grenoble-alpes.fr`

Kévin KASPER, `kevin.kasper@univ-grenoble-alpes.fr`

Bruno TISSERAND, `bruno.tisserand@univ-grenoble-alpes.fr`

IUT Département Réseaux & Télécommunications

Version 2025-26

Ressource R214

Analyse mathématique des signaux

- Les Maths en RT

Objectif

Maîtriser les outils mathématiques utiles pour les réseaux et les télécoms.

Les ressources

- R1.13 (S1) : Mathématiques du signal
- R1.14 (S1) : Mathématiques des transmissions
- R2.13 (S2) : Mathématiques des systèmes numériques
- **R2.14 (S2) : Analyse mathématique des signaux**
- R3.14 (S3) : Mathématiques : Analyse de Fourier

- Ressource R2.14 : Analyse mathématique des signaux

- **Volume horaire :**

- 35h30
- 17 séances de cours/travaux dirigés ($17 \times 2h$),
- 1 devoir surveillé ($1 \times 1h30$)

- **Évaluation**

- Contrôle continu : coeff 1
 - 📖 évaluations en début de cours, l'évaluation n'est pas de QCM
 - 📖 1 évaluation sur la dérivation
 - 📖 1 évaluation sur le calcul de limites
 - 📖 1 évaluation sur le calcul intégral
- Devoir surveillé final : coeff 3

1. - Table des matières

- ① Outils d'analyse de signaux
 - Continuité
 - Dérivation
 - Comportements asymptotiques
 - Comportements locaux
 - Développements limités (PE)

1.1.1. - Notion de continuité

Notion de continuité

La continuité est le fait de pouvoir « *tracer le graphe géométrique d'une fonction sans lever le stylo* » ; la courbe représentative « *ne saute pas* » d'un point à un autre.

La continuité indique l'absence de discontinuité ou de rupture dans le graphe.

Exemple 1 (Des fonctions continues et non continues)

- Les polynômes, les log, les expo sont continues sur leur domaine de définition
- L'échelon, la porte ne sont pas continus

1.1.2. - Continuité en un point (PE)

Définition 2 (Continuité en un point)

Soit f une fonction de la variable réelle et a un point de son domaine de définition D_f .

- ❶ f est **continue en a** si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- ❷ f est **continue à droite de a** ssi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- ❸ f est **continue à gauche de a** ssi $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Remarques

- ❶ Une fonction f , qui n'est pas définie en un point a (autrement dit pour laquelle $f(a)$ n'existe pas), n'est jamais continue en a .
- ❷ On se reportera à la partie 3 et 4 pour la définition et le calcul des limites.

1.1.2. - Continuité sur un intervalle (PE)

Définition 3 (Continuité sur un intervalle I)

Une fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point a de l'intervalle I .

Théorème 4 (Image d'un intervalle)

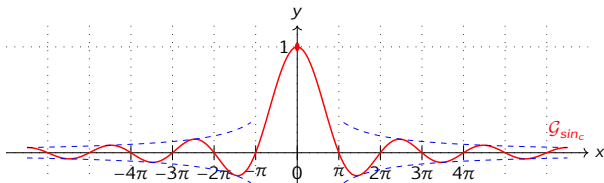
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

1.1.3. - Exemples : le sinus cardinal

Définition 5 (Sinus cardinal)

Le **sinus cardinal** noté **sinc** est défini par :

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}. \text{ C'est une fonction prolongée par continuité en } 0.$$



Remarque : En dehors du lobe central, sinc est un signal pseudo-périodique, de pseudo période 2π et d'enveloppes $\pm \frac{1}{x}$.

1.1.4. - Domaine de continuité (PE)

Définition 6 (Domaine de continuité)

Le **domaine de continuité** d'une fonction f , noté C_f , est l'ensemble formé par les réels $x \in D_f$ en lesquels la fonction f est continue.

1.1.5. - Exercices (PE)

➡ Exercice 1. *Etude de continuité* : On considère la fonction h définie par $h(x) = \frac{|x-a|}{x-a}$ pour un paramètre a réel quelconque. **1** Donner le domaine de continuité de h . **2** Peut-on prolonger la fonction h par continuité en a ?

➡ Exercice 2. *Continuité en un point* : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}}$ est-elle continue en 0 ?

1.1.5. - Exercices (PE)

➡ Exercice 3. *Ensemble de continuité d'une fonction produit :*

Soient f et g les fonctions définies par : $\begin{cases} f(x) = x + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et

$$\begin{cases} g(x) = 1 - x & \text{si } x \geq 0 \\ g(x) = x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

- ➊ Étudier la continuité des fonctions f et g et représenter graphiquement chacune d'elles.
- ➋ Déterminer la fonction $h = fg$. Représenter graphiquement h en traçant plusieurs points caractéristiques.
- ➌ h est-elle continue en tout point de $\mathbb{R}$? Quelle conclusion peut-on en déduire ?

1.1.5. - Exercices (PE)

➡ Exercice 4. *Ensemble de continuité :*

Donner l'ensemble de continuité des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad f(x) &= \frac{2x-3}{x+5} \\ 3 \quad f(x) &= \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{2x + |2x+5|}{5x-1}$$

1.2.1. - Dérivabilité en un point a

Définition 7 (Nombre dérivé de f en a)

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en a est le **nombre réel** noté

$f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ égal à la **pente**

de la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point $M(a, f(a))$.

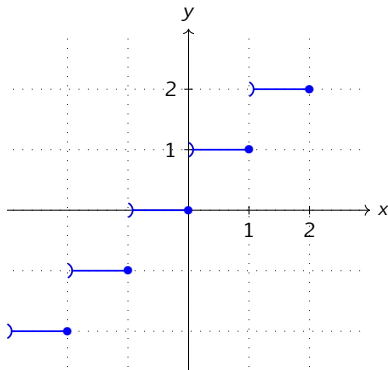
Théorème 8 (Équation de la tangente en a)

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

1.2.1. - Exemples de non dérivabilité

Exemple 12 (Partie supérieure)

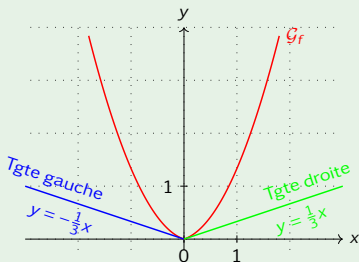
C'est la fonction $x \mapsto \lceil x \rceil$, où $\lceil x \rceil$ est l'entier directement supérieur ou égal à x ; en informatique, elle s'appelle *ceil*. Elle n'est pas continue en tout point a entier (c'est-à-dire $a = k$ avec $k \in \mathbb{Z}$), donc n'y est pas non plus dérivable.



1.2.1. - Exemples de non dérivabilité

Exemple 13 (Non dérivabilité suite à une inflexion)

La fonction $f(x) = \frac{1}{3}|x| + x^2$ est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0, car elle présente une inflexion en 0 à cause de la valeur absolue : il y a donc une tangente à droite et une tangente à gauche.



Remarque : Les triangle, dent de scie ne sont pas dérivables car ces signaux présentent des inflexions.

1.2.1. - Exercices (PE)

➡ Exercice 5. *Dérivabilité en 0* : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x|}$ est dérivable en 0 et calculer son nombre dérivé en 0.

1.2.2. - Ensemble de dérivabilité

Définition 14 (Ensemble de dérivabilité B_f)

L'ensemble de dérivabilité B_f d'une fonction f est l'ensemble des points x de D_f en lesquels f est dérivable. B_f donne le domaine de définition de la dérivée de f , autrement dit $D_{f'}$.

Théorème 15 (De la dérivabilité à la continuité)

Une fonction dérivable sur l'ensemble B_f est forcément continue sur B_f , autrement dit $B_f \subset C_f$.

Remarques : La continuité n'implique pas nécessairement la dérivabilité (cf. exemple 13)

1.2.2. - Dérivée

Définition 16 (Fonction dérivée ou Dérivée)

La **dérivée** de f , notée f' ou $\frac{df}{dx}$, est la **fonction** qui à tout $x \in B_f$ associe le nombre dérivé en x . Elle est définie par :

$$f' : \begin{cases} B_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases} \quad \text{ou avec la notation différentielle}$$

$$\frac{df}{dx} : \begin{cases} B_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{df}{dx}(x) \end{cases}.$$

Remarque : La notation différentielle $\frac{df}{dx}$ a l'avantage d'indiquer la variable de dérivation x (via le dx); tout ce qui ne dépend pas de cette variable est constant pour (vue de) x .

1.2.2. - Fonctions dérivables usuelles

	f	$f(x)$	B_f	Dérivée $f'(x)$
	Constante	c	$\mathbb{R}$	0
	Monôme	$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
	Racine carrée	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	Inverse	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$
Trigonométrie	Sinus	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
	Cosinus	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
	Tangente	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
	ArcSinus	$\arcsin(x) = \arcsin(x)$	$] -1; 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	ArcCosinus	$\arccos(x) = \arccos(x)$	$] -1; 1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	ArcTangente	$\arctan(x) = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
	Racine n -ième	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$ (n paire) ou $\mathbb{R}^*$ (n impaire)	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
	Logarithme népérien	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
	Exponentielle	$\exp(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
	Puissances réelles	x^α	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$

1.2.2. - Domaine de dérivabilité et dérivée d'un assemblage de fonctions

Fonction	h	B_h	$h'(x)$
Somme	$f + g$	$B_f \cap B_g$	$f'(x) + g'(x)$
Amplification	$\lambda f \ (\lambda \in \mathbb{R})$	B_f	$\lambda f'(x)$
Produit	$f \cdot g$	$B_f \cap B_g$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Inverse	$\frac{1}{f}$	$\{x \in B_f / f(x) \neq 0\}$	$-\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$
Quotient	$\frac{f}{g}$	$\{x \in B_f \cap B_g / g(x) \neq 0\}$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Puissance	f^n	B_f	$nf'(x)f^{n-1}(x)$
Dilatation de λ	$h(x) = f(\lambda x)$	B_f	$\lambda f'(\lambda x)$
Retard de r	$h(x) = f(x - r)$	B_f	$f'(x - r)$
Composée	$g \circ f$	$\{x \in B_f / f(x) \in B_g\}$	$f'(x)g'(f(x))$

Remarque : Les règles pour déterminer l'ensemble de dérivabilité sont les mêmes que celles pour déterminer l'ensemble de définition.

1.2.2. - Exercices types

➡ Exercice 6. *Exercice type : Ensemble de dérivabilité et calcul de dérivée :*
Calculer l'ensemble de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

$$1 \quad f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x}$$

$$3 \quad f(t) = \frac{1}{1 + \omega_0 t}$$

$$5 \quad f(t) = 3e^{-6t} + 2e^{4t}$$

$$2 \quad f(x) = 5\cos(2x) - 3\sin(2x)$$

$$4 \quad f(t) = a\cos(2\pi f_0 t) + b\sin(\omega_1 t)$$

$$6 \quad f(t) = \cos(\omega t)e^{-\alpha t}$$

1.2.2. - Exercices de TD

➡ Exercice 7. *Tangente en 0* : Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe d'équation $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

➡ Exercice 8. *Systèmes dynamiques* : L'étude des systèmes dynamiques du 1^{er} ordre amène souvent à travailler avec la fonction de la variable réelle t : $V(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$, où τ est la constante de temps fixée. Montrer que la tangente à la courbe de $V(t)$ en un point M_0 d'abscisse t_0 quelconque coupe l'axe des temps au point $t_0 + \tau$.

1.2.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 9. *Ensemble de dérivabilité et calcul de dérivée* : Déterminer l'ensemble de dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1 \quad f(x) = 4x^3 - 3x - 1$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{3}$$

$$3 \quad \phi(s) = \frac{3}{s}$$

$$4 \quad h(z) = (1-z)^3(1+2z)$$

$$5 \quad p(x) = 2x - 3 - \frac{1}{x}$$

$$6 \quad s(t) = \frac{(t+1)^2}{t^2+1}$$

$$7 \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$8 \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

$$9 \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$10 \quad f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$$

$$11 \quad f(x) = \tan(\sin(x))$$

$$12 \quad f(x) = \frac{1}{\cos(\sqrt{x})}$$

$$13 \quad f(x) = 2(2-x) + \frac{1}{4} \frac{x}{x+2}$$

$$14 \quad f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x^2}}$$

$$15 \quad f(x) = \tan^2(x^3)$$

$$16 \quad y(x) = x^x$$

$$17 \quad f_a(x) = x^{x^a}$$

$$18 \quad g(x) = \ln(\log_{10}(x))$$

$$19 \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2+3}{1-x}$$

$$20 \quad g(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{1+x} + (x-2)(x+3)$$

$$21 \quad h(x) = \ln(1 - e^{-x})$$

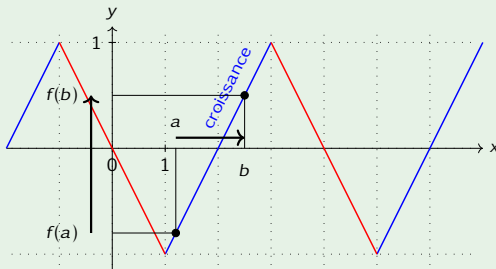
1.2.4. - Sens de variation

Définition 17 (Sens de variation)

Soient deux réels a et b d'un intervalle I de D_f avec $a < b$. f est :

- croissante sur I ssi $f(a) \leq f(b)$
- strictement croissante sur I ssi $f(a) < f(b)$

Exemple 18 (Dent de scie)



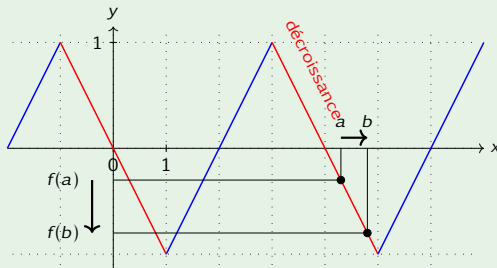
1.2.4. - Sens de variation

Définition 17 (Sens de variation)

Soient deux réels a et b d'un intervalle I de D_f avec $a < b$. f est :

- décroissante sur I ssi $f(a) \geq f(b)$
- strictement décroissante sur I ssi $f(a) > f(b)$

Exemple 18 (Dent de scie)



1.2.4. - Formule des accroissements finis

Théorème 19 (Formule des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Il existe au moins un réel $c \in]a; b[$ tel que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Corollaire 20 (Sens de variation et dérivée)

Le sens de variation d'une fonction f est donné par le **signe de la dérivée** :

- Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I
- Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \leq 0$, f est décroissante sur I

1.2.4. - Extremums

Définition 21 (Extremum)

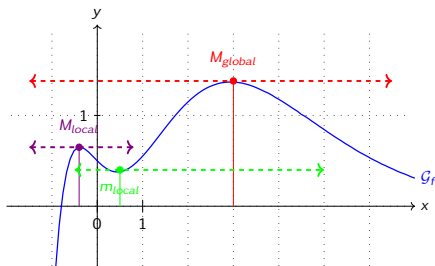
Pour un intervalle I donné, la fonction f admet :

- un **minimum** m sur I ssi pour tout x de I , $f(x) \geq m$: on le note $m = \arg \min_{x \in I} f(x)$;
- un **maximum** M sur I ssi pour tout x de I , $f(x) \leq M$: on le note $M = \arg \max_{x \in I} f(x)$.

Définition 22 (Extremum absolu/local)

Si $I = D_f$, l'extremum est **absolu**; sinon, il est **local**.

Exemple 23 ($f(x) = e^{-x}(\frac{1}{2} + x^3)$)



Analyse mathématiques des signaux, Ressource R2.14

1.2.4. - Extrêma

Théorème 24 (Extrêma)

Une fonction f , dérivable au voisinage d'un point a , admet un extremum valable sur un voisinage de a si sa dérivée f' s'annule en a (c'est-à-dire $f'(a) = 0$) et change de signe au voisinage de a ; la nature de l'extremum dépend des sens de variation.

Remarques :

- Si f est décroissante pour $x < a$ et f est croissante pour $x > a$, l'extremum est un minimum.
- Si f est croissante pour $x < a$ et f est décroissante pour $x > a$, l'extremum est un maximum.

1.2.4. - Exercices types

➡ Exercice 11. *Exercice type : Sens de variation* : Étudier le sens de variation des fonctions suivantes, en précisant s'il y a lieu les extrêma :

$$\boxed{1} \quad f(x) = 2x - 1 - \ln(x) \qquad \boxed{2} \quad g(x) = 12(x - 6) \exp\left(-\frac{1}{4}x\right)$$

1.2.4. - Exercices

➔ Exercice 12. *Étude de fonctions* : Étudier le sens de variation des fonctions de la variable réelle x définies par :

$$1 \quad f(x) = \sqrt{|x^2 + 4x + 5|}$$

$$2 \quad g(x) = \frac{3x}{x+3}$$

$$3 \quad y(x) = x^x$$

$$4 \quad y(x) = x^{(x/a)}$$

➔ Exercice 13. *Bac S 1996, et oui!* :

- 1 On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\phi(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.
Montrer que ϕ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire le signe de $\phi(x)$ pour tout $x \geq 0$.
- 2 Soit la fonction f définie par $f(t) = e^{-t} \ln(1 + e^t)$. Étudier à l'aide de la fonction ϕ les variations de f .

1.2.4. - Exercices de TD

➡ Exercice 14. *Deux nombres* : On considère deux nombres a et b dont la somme vaut 12. Trouver ces deux nombres pour que : **1** la somme de leur carré soit minimale, **2** le produit de l'un et du carré de l'autre soit maximal, **3** le produit de l'un et du cube de l'autre soit maximal.

➡ Exercice 15. *Proximité de deux voitures* : Deux rues se coupent à angle droit en un point P . L'une à la direction nord-sud, l'autre est-ouest. Une voiture venant de l'ouest passe en P à 10h à la vitesse constante de 20 km/h. Au même instant, une autre voiture, situé à 2 km au nord du croisement, se dirige vers le sud à 50 km/h. À quel moment ces deux voitures sont-elles les plus proches l'une de l'autre (à vol d'oiseau) et quelle est cette distance minimale ?

1.2.4. - Exercices de TD

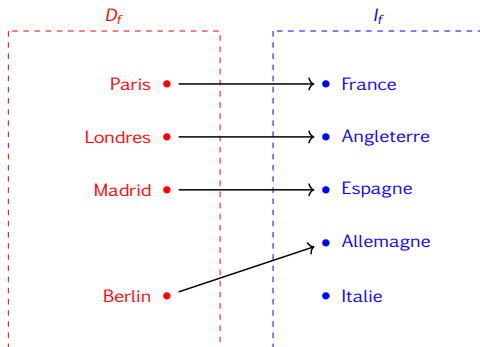
➡ Exercice 16. *Cuisine* : On considère une boîte de conserve cylindrique de hauteur h et de rayon R .

- ❶ On dispose d'une surface de métal S limitée pour construire la boîte de conserve de taille $S = 400\pi \text{ cm}^2$. Comment choisir le rayon R et la hauteur h de la boîte pour que son volume V soit maximal ?
- ❷ On souhaite maintenant construire une boîte de volume V_0 donné et fixé. Comment choisir le rayon R et la hauteur h pour que la surface de métal à utiliser soit minimale ? On exprimera la solution en fonction du rapport $\frac{h}{R}$.

Mêmes questions avec une casserole.

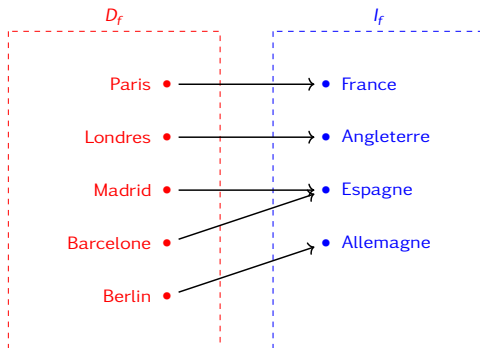
1.2.5. - Notion d'injection (PE)

Une fonction f est injective ssi les images de 2 éléments différents de D_f sont différentes.



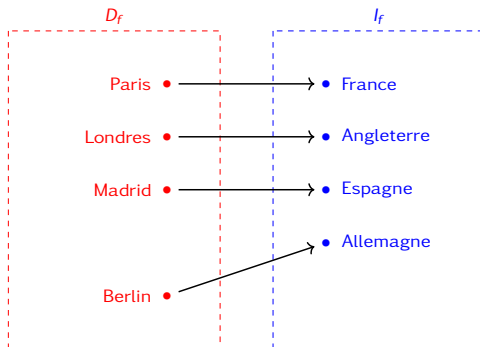
1.2.5. - Notion de surjection (PE)

Une fonction g est surjective ssi tout élément de l'ensemble image I_g possède au moins un antécédent par g (dans D_g).



1.2.5. - Notion de bijection (PE)

Une fonction h est bijective ssi tout élément de l'ensemble image I_h possède un **unique** antécédent par h . Dans ce cas, h admet une **fonction réciproque** h^{-1} qui réalise la transformation inverse de h .



1.2.5. - Bijection (PE)

Définition 25 (Bijection)

Une fonction f est une **bijection** (ou est **bijective**) de l'intervalle I (sous-ensemble de D_f) vers l'intervalle J (sous-ensemble de I_f) ssi pour tout $y \in J$, l'éq. $y = f(x)$ admet une unique solution x . Cela signifie que : pour tout $x \in I$, il existe un unique élément $y \in J$ ($\exists! y \in J$) tel que $y = f(x)$

Théorème 26 (Condition nécessaire et suffisante)

*Pour être une bijection sur l'intervalle I , f doit être **continue** et **strictement monotone** sur I .*

1.2.5. - Intervalle (PE)

Théorème 27 (Image d'un intervalle par une fonction bijective)

Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f est une bijection de I vers l'intervalle $J = \{f(x)/x \in I\} = f(I)$. En particulier,

- si f est strictement croissante, et $I = [a, b]$ alors $J = f([a, b]) = [f(a), f(b)]$;
- si f est strictement décroissante, et $I = [a, b]$ alors $J = f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Exemple 28 (La fonction carré)

La fonction carré $f : x \mapsto x^2$, continue sur $\mathbb{R}$, est strct. $\searrow$ sur $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$ et strct. $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}^-$ vers $f(\mathbb{R}^-)$, avec $f(\mathbb{R}^-) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[$ et f est une autre bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $f(\mathbb{R}^+)$ avec $f(\mathbb{R}^+) = \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[= [0; +\infty[$. Il existe donc deux solutions à l'équation $f(x) = a$ (avec a un réel positif et non nul quelconque). Comme $a \in [0; +\infty[= f(\mathbb{R}^-) = f(\mathbb{R}^+)$, la première solution appartient à $\mathbb{R}^-$ et la seconde appartient à $\mathbb{R}^+$.

1.2.6. - Fonction réciproque (PE)

Définition 29 (Fonction réciproque)

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J . g est la **fonction réciproque** (ou inverse) de f ssi g est définie en tout point de J et pour tout $x \in D_f$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$. La réciproque g de f sur I est **unique**. Elle est notée $g = f^{-1}$.

Remarques :

- Une fonction f dont le sens de variation change sur $\mathbb{R}$ admet une réciproque sur chaque intervalle de variation !
- Ne pas confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$.

1.2.6. - Propriétés de la réciproque (PE)

Théorème 30 (Sens de variation)

f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et de même sens de variation que la fonction f .

Théorème 31 (Propriétés calculatoires)

- La composée de f^{-1} et de f est l'identité : $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.
- La réciproque de la réciproque de f est f : $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$.

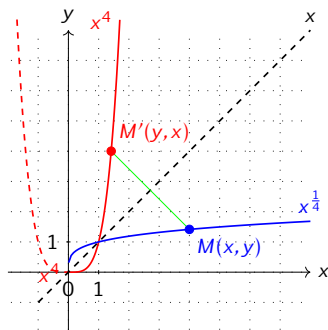
1.2.6. - Propriétés de la réciproque (PE)

Théorème 32 (Graphe)

Dans un repère orthonormé, les graphes $\mathcal{G}_f$ (de f) et $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ (de f^{-1}) sont symétriques par rapport à la 1^{ère} bissectrice du plan, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.

Exemple 33 (Graphes de f et f^{-1})

$f(x) = x^4$ et sa réciproque
sur $\mathbb{R}^+$ $f^{-1}(x) = x^{1/4}$



1.2.6. - Réciproques usuelles

Exemple 34 (Réciproques usuelles)

- $\ln$ et $\exp$
- $x \mapsto x^2$ restreinte à $\mathbb{R}^+$ et $\sqrt{x}$. Attention : $\sqrt{x^2} = |x|$.
- $\sin$ restreinte à $[-\pi/2; \pi/2]$ et $\arcsin$
- $\cos$ restreinte à $[0; \pi]$ et $\arccos$
- $\tan$ restreinte à $] -\pi/2; \pi/2[$ et $\arctan$

1.2.6. - Exercices types (PE)

Méthodologie 35 (Montrer qu'une fonction est la réciproque d'une autre)

Montrer que $g(f(x)) = f(g(x)) = x$.

➡ Exercice 17. *Réciproque* : Montrer que $g(x) = 1 + x$ est la réciproque de $f(x) = x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

Méthodologie 36 (Déterminer une réciproque)

- ➊ Étudier la continuité et le (ou les) sens de variation de f .
- ➋ Poser $y = f(x)$ et inverser l'équation pour avoir $x = g(y)$. Alors $g = f^{-1}$.

➡ Exercice 18. *Réciproque* : Montrer que $f(x) = (x + 1)^{1/3} + 2$ admet une réciproque (sur un intervalle que l'on précisera) et donner l'expression de sa réciproque.

1.2.6. - Exercices types (PE)

➡ Exercice 19. *Composition de fonctions trigonométriques* : Simplifier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

$$1 \quad x \mapsto \arccos(\cos(x))$$

$$2 \quad x \mapsto \cos(\arccos x)$$

$$3 \quad x \mapsto \arctan(\tan(x))$$

$$4 \quad x \mapsto \tan(\arctan(x))$$

➡ Exercice 20. *Réciproque* : Déterminer la (ou les) réciproques de

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

➡ Exercice 21. *Réciproque* : On considère la fonction f de la variable x , définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$. **1** Montrer que f admet une réciproque f^{-1} sur $[1; +\infty[$. **2** Montrer que cette réciproque est la fonction $g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$.

1.2.6. - Exercices types (PE)

➡ Exercice 22. *Réciproque* : On considère les deux fonctions f et g de la variable réelle x définies par : $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ et $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Pour chacune de ces fonctions, **1** montrer qu'elle possède deux intervalles de monotonie, puis **2** expliciter la fonction inverse relative à chacun de ces intervalles.

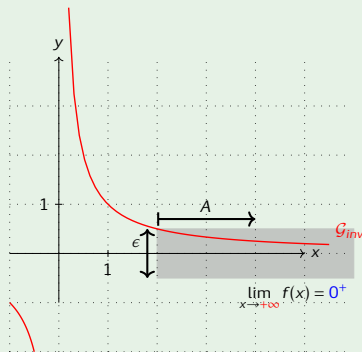
➡ Exercice 23. *Résolution d'équations avec des fonctions puissances* : Déterminer les racines de l'équation : $x^{(x^x)} = (x^x)^x$.

1.3.1. - Notion de comportements asymptotiques

Exemple 37 (La fonction inverse)

Table de valeurs

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
...	...
10^6	10^{-6}



Plus x augmente (autrement dit x tend vers $+\infty$), plus $f(x)$ se rapproche de 0 par valeurs supérieures ; on dit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

1.3.1. - Limites

Définitions 38 (Comportements asymptotiques)

- Le comportement asymptotique d'une fonction f de la variable x est la « direction » de f lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$
- Elle prend la forme d'une limite L qui peut être un nombre $\in \mathbb{R}$ (et on parle de limite finie) ou un infini $+\infty$ ou $-\infty$ (et on parle de limite infinie)
- La limite L peut être atteinte ou approchée par la fonction, en arrivant par valeurs inférieures (L^-) ou supérieures (L^+).

On la note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = L \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f = L$$

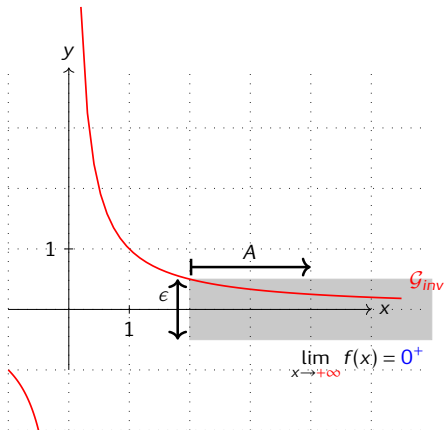
1.3.1. - Limite finie en $+\infty$

Cas d'une limite L réelle
finie en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = L$$

Exemple 39 (Fonction
inverse)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



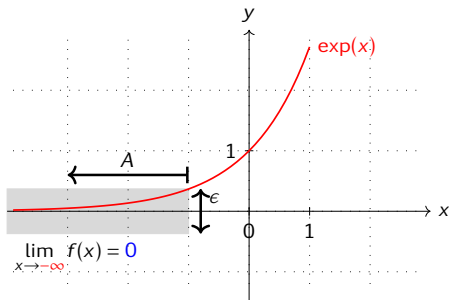
1.3.1. - Limite finie en $-\infty$

Cas d'une limite L réelle
finie en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{-\infty} f = L$$

Exemple 40
(Exponentielle)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$



1.3.1. - Limite finie en ∞ par valeurs supérieures ou inférieures

Cas d'une limite L par valeurs supérieures en ∞

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L^+$ signifie que pour x proche de ∞ , $f(x)$ tend vers L avec $f(x) \geq L$

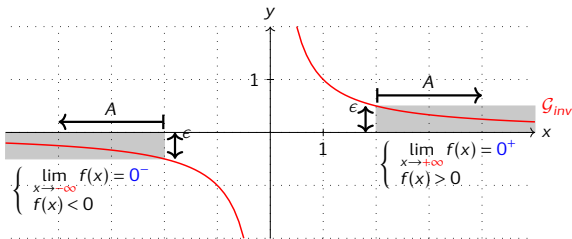
Cas d'une limite L par valeurs inférieures en ∞

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L^-$ signifie que pour x proche de ∞ , $f(x)$ tend vers L avec $f(x) \leq L$

Exemple 41 (Fonction inverse)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \text{ et }$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$



1.3.1. - Limite infinie en $+\infty$

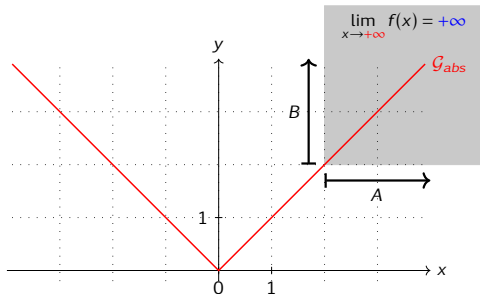
Cas d'une limite $+\infty$ en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f = +\infty$, ce qui implique que $f(x) > 0$ pour x suffisamment grand

Exemple 42 (Valeur absolue)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$$

Remarque : Idem pour une limite en $-\infty$ et pour une limite $-\infty$



1.3.2. - Limites des fonctions usuelles



Fonction $f(x)$	Limite en $-\infty$	Limite en $+\infty$
Constante c	c	c
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$+\infty$ si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	n.d. si n pair $-\infty$ si n impair	$+\infty$
Inverse $\frac{1}{x}$	0^-	0^+
$\ln(x)$	n.d.	$+\infty$
$\exp(x)$	0^+	$+\infty$
$\sin(x), \cos(x), \tan(x)$	p.d.l.	p.d.l.
$\arctan(x)$	$-\frac{\pi}{2}^+$	$\frac{\pi}{2}^-$

1.3.2. - Opérations algébriques sur les limites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et s un signe (égal à $+1$ ou -1),

	$\lim_{+\infty} u$	$\lim_{+\infty} v$	$\lim_{+\infty} \lambda u$	$\lim_{+\infty} u + v$	$\lim_{+\infty} u.v$	$\lim_{+\infty} \frac{u}{v}$
Finie-Finie	L_u	L_v	λL_u	$L_u + L_v$	$L_u L_v$	$\frac{L_u}{L_v}$
	L_u	0^+	λL_u	L_u	0	$\text{sign}(L_u)\infty$
	L_u	0^-	λL_u	L_u	0	$-\text{sign}(L_u)\infty$
	0	0	0	0	0	FI
Finie-Infinie	$s\infty$	L_v	$\text{sign}(s\lambda)\infty$	$s\infty$	$\text{sign}(sL_v)\infty$ si $L_v \neq 0$ FI si $L_v = 0$	$\text{sign}\left(\frac{s}{L_v}\right)\infty$
	L_u	$s\infty$	λL_u	$s\infty$	$\text{sign}(sL_u)\infty$ si $L_u \neq 0$ FI si $L_u = 0$	0
Infinie-Infinie	$+\infty$	$+\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
	$-\infty$	$-\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
	$+\infty$	$-\infty$	$\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI
	$-\infty$	$+\infty$	$-\text{sign}(\lambda)\infty$	FI	$-\infty$	FI

Remarque : Résultats identiques lorsque la limite est asymptotique en $-\infty$

1.3.2. - Limites et composées

Théorème 46 (Limite d'une composée)

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = L$ (avec L un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$) alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (v \circ u)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(u(x)) = \lim_{y \rightarrow L} v(y)$$

Remarque : Le résultat est identique lorsque $x \rightarrow -\infty$

1.3.2. - Bilan sur les formes indéterminées

Théorème 47 (Les classiques)

$$(+\infty) + (-\infty)$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0.\infty$$

$$\frac{0}{0}$$

Théorème 48 (Les nouvelles)

$$1^\infty$$

$$\infty^0$$

$$0^0$$

1.3.2. - Exercices types

Méthodologie 49 (Calcul de limites asymptotiques)

- ➊ Identifier les fonctions usuelles et donner leurs limites ;
- ➋ Identifier le (ou les) assemblages de fonctions usuelles puis calculer la limite de proche en proche en utilisant les règles sur les limites ;
- ➌ En cas de forme indéterminée :
 - Quelques astuces (cf TD) ;
 - Utiliser des outils plus puissants, comme l'équivalence ou les développements limités.

➔ Exercice 24. Exercice type : Limites : Déterminer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln(x)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x}$$

1.3.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 25. *Limites* : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes :

1 $f(x) = 2x^2 + x + 1$

2 $f(x) = \frac{\arctan(x)}{|x-3|}$

3 $f(x) = x^2 - x^3$

➔ Exercice 26. *Limites avec forme indéterminée de type $\infty - \infty$* : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et (si elle existe) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ pour les fonctions f suivantes :

1 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

2 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$

3 $f(x) = \frac{\sqrt{|x|+2} - \sqrt{|x|}}{|x|}$

4 $f(x) = \ln(x) - \ln(x+1)$

5 $f(x) = \ln(x^2 + 1) - 2\ln(x)$

1.3.2. - Relation d'ordre

Théorème 50 (Relation d'ordre en $+\infty$)

Soient deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout x suffisamment grand (i.e. tendant vers $+\infty$),

- ❶ si $u(x) \geq v(x)$ et $\lim_{+\infty} v = +\infty$, alors $\lim_{+\infty} u = +\infty$,
- ❷ si $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{+\infty} v = -\infty$, alors $\lim_{+\infty} u = -\infty$,
- ❸ si $|u(x) - l| \leq v(x)$ et $\lim_{+\infty} v = 0$, alors $\lim_{+\infty} u = l$.

Théorème 51 (Relation d'ordre en $-\infty$)

Soient deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$. Pour tout x suffisamment proche de $-\infty$,

- ❶ si $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{-\infty} v = -\infty$, alors $\lim_{-\infty} u = -\infty$,
- ❷ si $u(x) \geq v(x)$ et $\lim_{-\infty} v = +\infty$, alors $\lim_{-\infty} u = +\infty$.
- ❸ si $|u(x) - l| \leq v(x)$ et $\lim_{-\infty} v = 0$, alors $\lim_{-\infty} u = l$.

1.3.2. - Relation d'ordre

Théorème 52 (Théorème du gendarme)

Soient trois fonctions u , v et w , définies sur $\mathbb{R}$ et a désignant indifféremment un réel fixé, $+\infty$ ou $-\infty$. Si $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} u = \lim_{x \rightarrow a} w$, alors $\lim_{x \rightarrow a} u = \lim_{x \rightarrow a} v = \lim_{x \rightarrow a} w$.

1.3.2. - Exercices

➡ Exercice 27. *Limites avec les relations d'ordre* : Calculer la limite de la fonction $f(x) = (2 + \cos(x))x$ en $+\infty$.

Correction : Cette limite n'est pas immédiate car $\cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$. Par contre, on sait que pour tout réel x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc $1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3$. Dès lors que x devient assez grand (notamment x devient positif), on déduit en multipliant l'inégalité précédente par x que $x \leq f(x) \leq 3x$. Comme les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 3x$ tendent vers $+\infty$ en $+\infty$, alors par relation d'ordre, $f(x)$ aussi : $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

1.3.2. - Équivalence en ∞ et limites

Définition 53 (Équivalence en ∞)

Deux fonctions f et g sont **équivalentes au voisinage de a** (avec $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) ssi $f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x))$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$. On le note : $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$

Remarques :

- Deux fonctions équivalentes ont une même limite!
- Seule la fonction nulle est équivalente à 0.

Théorème 54 (Équivalence et limite)

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

1.3.2. - Équivalences usuelles en $\pm\infty$

Théorème 55 (Équivalent d'un polynôme)

Un polynôme $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$) est tel que $P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} a_n x^n$

Exemple 56 (Équivalent de

$$P(x) = 3x^4 - 2x = 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x^1 + 0)$$

$$P(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 3x^4 \text{ et } P(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} 3x^4$$

1.3.2. - Équivalences usuelles en $\pm\infty$

Théorème 57 (Équivalent d'une fraction rationnelle)

Une fraction rationnelle $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ de degré n et $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ de degré m admet pour équivalent le quotient des équivalents de $P(x)$ et $Q(x)$.

Exemple 58 (Équivalent de

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^4 - 2x}{6x^3 + 4x^2 + 1} = \frac{3x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 2x^1 + 0}{6x^3 + 4x^2 + 0x + 1}$$

$$F(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{3x^4}{6x^3} = \frac{x}{2}$$

1.3.2. - Opérations sur les équivalences

Opérations sur les équivalents

- On peut multiplier, inverser, diviser ou dilater des équivalents
- On ne peut pas ajouter, soustraire ou composer des équivalents, sauf cas très particulier

Théorème 59 (Opérations sur les équivalences)

Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre fonctions telles que $f_1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f_2$ et $g_1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors :

- $\lambda f_1(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \lambda f_2(x)$
- $\frac{1}{f_1(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{f_2(x)}$
- $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$
- $f_1(\lambda x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f_2(\lambda x)$

Remarque : Idem en $-\infty$

1.3.2. - Exercices types

➡ Exercice 28. *Exercice type : Équivalents* : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

1.3.2. - Exercices de TD

➔ Exercice 29. *Limites de fractions rationnelles* : Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f suivantes :

$$1 \quad f(x) = \frac{7x+3}{4x^2-3x+13}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{2x+|2x+5|}{5x-1}$$

1.3.2. - Croissance comparée

Définition 60 (Fonction négligeable en l'infini)

Une fonction f est **négligeable en a** devant une fonction g (avec $a = +\infty$ ou $a = -\infty$) ssi $f(x) = \epsilon(x)g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$. On le note :
 $f \ll_a g$ ou $f(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$

Théorème 61 (Règles de croissance comparée)

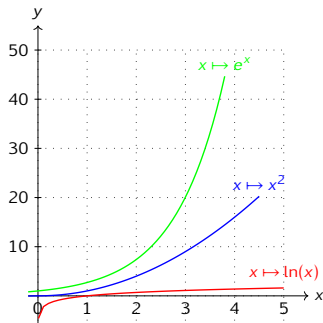
On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$). On dit que :
 $\ln(x) \ll x^\alpha \ll e^x$ en $+\infty$

1.3.2. - Croissance comparée

On dit que $\ln$ croît moins vite que les puissances, qui croissent moins vite que l'expo vers $+\infty$

➡ Exercice 30. Exercice type : Limites asymptotiques : Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) \frac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}}.$$



1.3.2. - Exercices de TD

➡ Exercice 31. *Limites avec croissance comparée* : Déterminer les limites quand x tend vers $+\infty$ et lorsqu'elle existe, lorsque x tend vers $-\infty$, des fonctions f suivantes :

$$1 \quad f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$4 \quad f(x) = \frac{e^{2x} - x^2}{e^{2x+1}}$$

$$7 \quad f(x) = \frac{e^{1+x^2}}{x^2 \ln(x)}$$

$$2 \quad f(x) = x^3 - 2^x$$

$$5 \quad f(x) = \frac{3^x}{x^4}$$

$$8^* \quad f(x) = \frac{10^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$3 \quad f(x) = (x + 1)e^{-x}$$

$$6 \quad f(x) = \sqrt{x+1}e^{-3x}$$

1.3.2. - Exercices de TD

🕒 Exercice 32. *Accroissements finis (pour les poursuites d'études longues)* :

Cet exercice utilise la formule des accroissements finis donnée par : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, pour $h = b - a$, il existe un réel θ (avec $0 < \theta < 1$) tel que $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$.

Déterminer la valeur prise par θ lorsque la fonction f est définie par :

$$\boxed{1} \quad f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad \boxed{2} \quad f(x) = e^x$$

Calculer, dans chacun des cas, la limite de θ quand l'écart h tend vers 0.

1.3.2. - Exercices de TD

➡ Exercice 33. *Série harmonique (pour les poursuites d'études longues)* : Cet exercice utilise la formule des accroissements finis donnée par : pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, pour $h = b - a$, il existe un réel θ (avec $0 < \theta < 1$) tel que $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$.

- ➊ Donner un encadrement de $\ln(a + h)$ et l'appliquer lorsque $a = 1$ et $h = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
- ➋ En déduire un encadrement de $\ln(n + 1) - \ln(n)$, $\ln(n) - \ln(n - 1)$, et ainsi de suite jusqu'à $\ln(2) - \ln(1)$.
- ➌ Déduire aussi un encadrement de $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.
- ➍ Quelle est la limite de u_n quand n tend vers l'infini ?

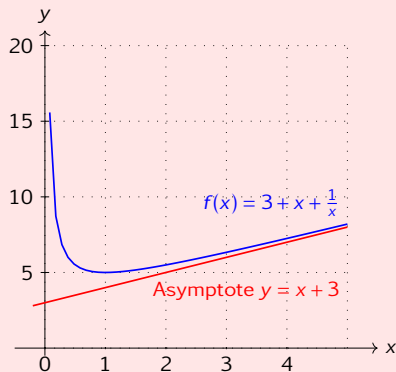
1.3.3. - Application : Asymptotes et branches paraboliques (PE)

Objectifs

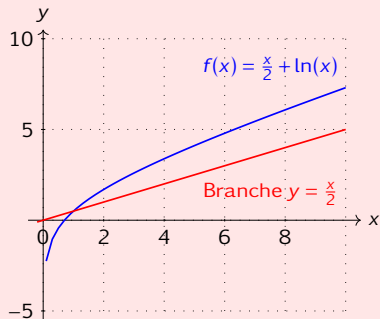
Évaluer « comment » une fonction $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, autrement dit quelle est sa direction dominante parmi : **1** les droites $(0x)$, $(0y)$, **2** les droites de la forme $y = ax + b$, **3** les branches de la forme $y = ax^2$ guidées par une droite.

1.3.3. - Application : Asymptotes et branches paraboliques (PE)

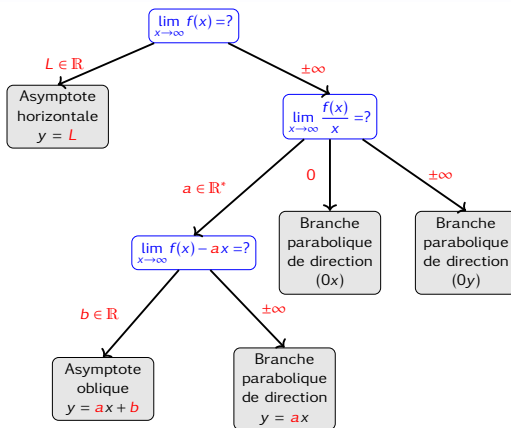
Asymptotes



Branches paraboliques



1.3.3. - Méthodologie (PE)



Remarque : Résultats identiques lorsque $x \rightarrow -\infty$

1.3.3. - Exercices types (PE)

➡ Exercice 34. *Asymptotes* : Déterminer la branche asymptotique en $+\infty$ et en $-\infty$: $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 2}$.

1.3.3. - Exercices de TD (PE)

➡ Exercice 35. *Asymptotes* : Déterminer le comportement asymptotique de

$$f(x) = \frac{5x^2 + 3x - 2}{x + 2} \text{ en } +\infty.$$

➡ Exercice 36. *Branches asymptotiques* : Déterminer les branches asymptotiques des fonctions suivantes :

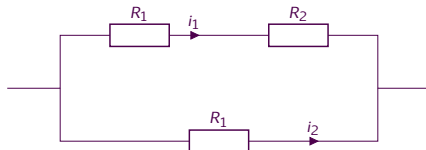
$$1^* \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 3}$$

$$2^* \quad f(x) = 2(2 - x) + \frac{1}{4} \frac{x}{x + 2}$$

1.3.3. - Exercices de TD (PE)

➡ Exercice 37. Étude d'un schéma électronique :

On considère le montage suivant :



où R_1 est une résistance de x Ohms et R_2 une de 3 Ohms.

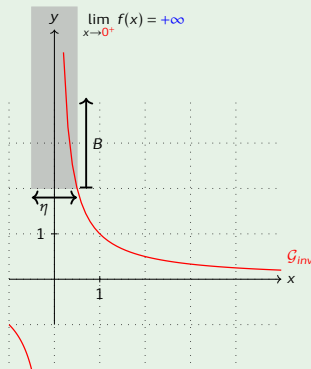
- ➊ Exprimer la résistance équivalente du circuit, notée R , en fonction de x .
- ➋ Étudier les variations de R en fonction de x , ainsi que les branches infinies (on envisagera la possibilité d'une asymptote en l'infinie). Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de R pour x variant entre 0 et 6 Ohms.
- ➌ À partir de quelle valeur de x la différence $\left| R - \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) \right|$ est-elle inférieure à $1/100$? En déduire une valeur approchée de R lorsque $x = 120$ Ohms.

1.4.1. - Notion de limites en un point a (avec $a \in \mathbb{R}$)

Exemple 62 (Fonction inverse)

Table de valeurs

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
1	1
0.1	10
0.01	100
...	...
$1 \cdot 10^{-6}$	10^6



Lorsque $x \rightarrow 0$ (par valeurs supérieures), $f(x)$ croît indéfiniment; on dit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

1.4.1. - Définitions

Définitions 63 (Comportement local)

- Le comportement local d'une fonction f de la variable x est la « direction » de f lorsque x tend vers a , soit des deux côtés, soit par valeurs inférieures (a^-), soit par valeurs supérieures a^+ .
- Elle prend la forme d'une limite L qui peut être un nombre $\in \mathbb{R}$ ou un infini $\pm\infty$.
- La limite L peut être atteinte ou approchée par la fonction, en arrivant par valeurs inférieures (L^-) ou supérieures (L^+).

On la note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{a} f = L$

Remarque

Très souvent $a = 0$.

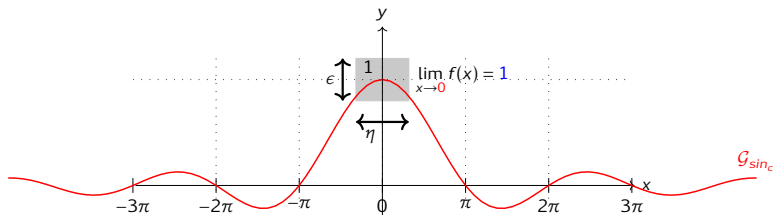
1.4.1. - Limite finie en un point a

Cas d'une limite finie $L \in \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f = L$$

Exemple 64 (Sinus cardinal)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sinc}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



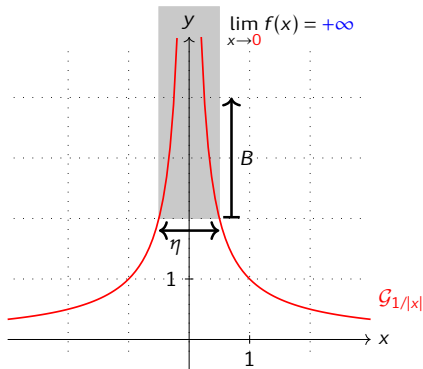
1.4.1. - Limite infinie en un point a

Cas d'une limite $+\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$$

Exemple 65 ($f(x) = \frac{1}{|x|}$)

de limite $+\infty$ lorsque $x \rightarrow 0$



1.4.1. - Limites par valeurs supérieures ou inférieures

- ① Si $x \rightarrow a^+$, alors $x \rightarrow a$ et $x \geq a$
- ② Si $x \rightarrow a^-$, alors $x \rightarrow a$ et $x \leq a$

De même, pour $L \in \mathbb{R}$

- ① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L^+$, alors $f(x) \rightarrow L$ et $f(x) \geq L$
- ② $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L^-$, alors $f(x) \rightarrow L$ et $f(x) \leq L$

1.4.2. - Définition (PE)

Définition 66 (Limites en un point)

Soit f une fonction de la variable réelle x , $a \in \mathbb{R}$ un point et $L \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_a f = L$, ssi pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$ alors $|f(x) - L| < \epsilon$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche de L que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_a f = +\infty$, ssi pour tout $B > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$, alors $f(x) > B$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a .
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_a f = -\infty$, ssi pour tout $B > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f$: si $0 < |x - a| < \eta$, alors $f(x) < -B$. Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi petit que l'on veut à la seule condition de prendre x suffisamment voisin de a .

1.4.3. - Limites en 0 des fonctions usuelles

Fonction $f(x)$	Limite en 0	Fonction $f(x)$	Limite en 0
Constante c	c	$\sin(x)$	0
Puissance x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	0	$\cos(x)$	1
Racine carrée $\sqrt{x}$	0^+	$\tan(x)$	0
Inverse $\frac{1}{x}$	$+\infty$ si $x \rightarrow 0^+$ $-\infty$ si $x \rightarrow 0^-$	$\arcsin(x)$	0
Log népérien $\ln(x)$	$-\infty$ pour $x \rightarrow 0^+$	$\arccos(x)$	$\frac{\pi}{2}$
Exponentielle e^x	1	$\arctan(x)$	0

1.4.3. - Opérations algébriques sur les limites

Remarque :

- Mêmes théorèmes que pour les comportements asymptotiques
- Mêmes formes indéterminées

1.4.3. - Exercices types

➡ Exercice 38. *Exercice type : Limite locale* : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{2 + \frac{1}{x}}$.

1.4.3. - Exercices de TD

➡ Exercice 39. *Limites en 0* : Calculer les limites en 0 des fonctions f suivantes :

$$1 \quad f(x) = \frac{\arctan x}{|x-3|}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{|x(x-1)|\ln(x)}{x^3}$$

$$2 \quad f(x) = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

$$4 \quad f(x) = \frac{2x+|2x+5|}{5x-1}$$

1.4.3. - Rappel sur la notion d'équivalence

Équivalence en 0

Deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de 0 si elles sont égales au voisinage de 0 à un epsilon près :

$$f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x)) \text{ avec}$$

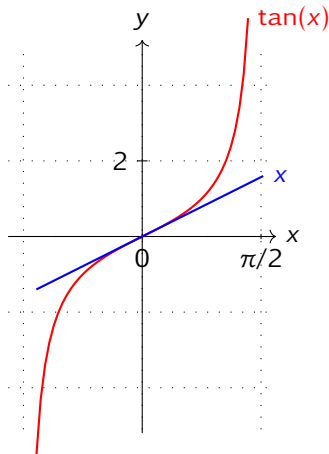
$\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. Leurs graphes se

tangentent et elles ont la même limite en 0. On le note :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} g(x)$$

Exemple 67 (Équivalent de tan)

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$



1.4.3. - Équivalences usuelles en 0

Pour tout x au voisinage de 0 et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$

$(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$	$(1-x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\alpha x$
$\frac{1}{(1-x)^\alpha} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$	$\frac{1}{(1+x)^\alpha} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\alpha x$
$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x$
$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$
$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$a^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(a)$
$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \text{le monôme } a_i x^i \text{ de plus petit degré tel que } a_i \text{ soit non nul}$	
$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \text{le quotient des équivalents de } P(x) \text{ et } Q(x)$	

Remarque : Même application au calcul de limites que pour les comportements asymptotiques, même opérations licites

1.4.3. - Exercices types

➡ Exercice 40. *Exercice type : Limites via équivalences* : Calculer :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}}{x}$$

1.4.3. - Limites en $a \neq 0$ d'une fonction f

Théorème 68 (Changement de variable (CV))

Étant donnée une variable x tendant vers a et une variable t choisie de sorte que $x = u(t)$ et $t = v(x)$ avec u et v deux fonctions, alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} f(u(t)) \text{ avec } b = \lim_{x \rightarrow a} v(x)$$

Méthodologie 69 (CV pour un calcul de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$)

- ❶ Poser le cv $x = u(t)$ et inverser le cv pour obtenir $t = v(x)$;
- ❷ Réécrire l'expression de $f(x)$ en fonction de t en remplaçant, dans la règle de définition de f , tous les x par $v(t)$, pour obtenir $f(v(t))$;
- ❸ Calculer $b = \lim_{x \rightarrow a} v(x)$;
- ❹ Conclure que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow b} f(u(t))$.

1.4.3. - Exercices types

➡ Exercice 41. *Exercice type : Changement de variable* : Calculer les limites suivantes en utilisant les changements de variables proposés :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \left(y = \frac{1}{x}\right) \quad 2 \quad \lim_{x \rightarrow -2} 2(2-x) + \frac{1}{4} \frac{x}{x+2} \quad (y = x+2)$$

1.4.3. - Changements de variable usuels

Théorème 70 (Changements de variable usuels)

Les CV usuels sont :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(y + a) \quad \boxed{y = x - a} \quad \boxed{x = y + a}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(a - y) \quad \boxed{y = a - x} \quad \boxed{x = a - y}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \boxed{y = \frac{1}{x}} \quad \boxed{x = \frac{1}{y}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \boxed{y = \frac{1}{x}} \quad \boxed{x = \frac{1}{y}}$$

1.4.3. - Exercices de TD

➡ Exercice 42. *Changements de variable* : Déterminer les limites suivantes en faisant les changements de variables proposés :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x - 1} \quad \boxed{u = x - 1}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} \ln\left(1 + \frac{1}{x-2}\right) \quad \boxed{u = x - 2}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} \ln(x-1) \quad \boxed{u = 2 - x}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \boxed{u = \frac{1}{x}}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad \boxed{u = \frac{1}{x}}$$

$$6^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \boxed{u = \frac{1}{x}}$$

1.5.1. - Principe des Développement Limités (DLs)

Principe

Les DLs permettent d'approcher **de plus en plus précisément** et **localement** (pour x autour de a) l'image $f(x)$ par un polynôme $P(x)$. Un DL aura un **ordre** qui indique le degré d'approximation de la fonction f .

Remarque

En général, $a = 0$; sinon, on effectue un changement de variable pour se ramener en 0.

1.5.1. - Principe des Développement Limités (DLs)

Exemple 71 (DLs de $\tan$ en 0)

- $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$: l'équivalent en 0 est aussi le DL à l'ordre 1
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \epsilon(x)$: DL à l'ordre 3 avec un polynôme de degré 3
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + x^5 \epsilon(x)$: DL à l'ordre 5 avec un polynôme de degré 5

Remarque

Les DLs sont incrémentales avec l'ordre

1.5.1. - Développement limité (DL) à l'ordre n

Définition 72 (DL à l'ordre n)

Le **développement limité** à l'ordre n au voisinage de 0 d'une fonction f prend la forme d'un **polynôme** à coefficients réels $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ de degré au plus égal à n , de sorte que pour tout x proche de 0, il existe une fonction ϵ telle que $f(x) = P_n(x) + x^n\epsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

1.5.1. - Formule de Taylor-Young

Théorème 73 (Formule de Taylor-Young pour les DLs en 0)

Une fonction f dérivable n fois au voisinage de 0 admet un DL unique, donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \epsilon(x)$$

où la **factorielle** de n est définie par :

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n & , \text{ si } n \neq 0 \\ 1 & , \text{ si } n = 0 \end{cases} \quad \text{et } \epsilon \text{ est une fonction telle}$$

que $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

➡ Exercice 43. Exercice type : DL avec Taylor-Young : Donner le DL de e^x à l'ordre 5.

1.5.1. - Décrémenter l'ordre

Théorème 74 (Décrémenter l'ordre d'un DL)

Pour passer d'un DL à l'ordre n à un DL à un ordre m inférieur, il suffit de tronquer le polynôme à l'ordre m , c'est à dire d'effacer toutes les puissances de x de degré supérieur à m .

Exemple 75 (DL à l'ordre 3 de e^x)

Sachant $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$ (DL à l'ordre 5),
alors $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ à l'ordre 3

1.5.1. - Interprétation numérique

Exemple 85 (DL de e^x)

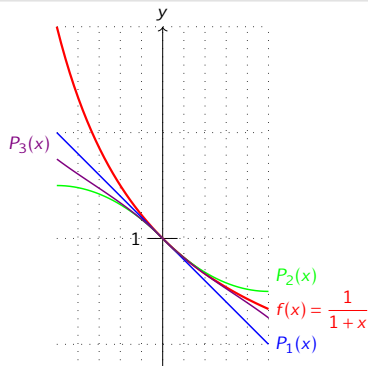
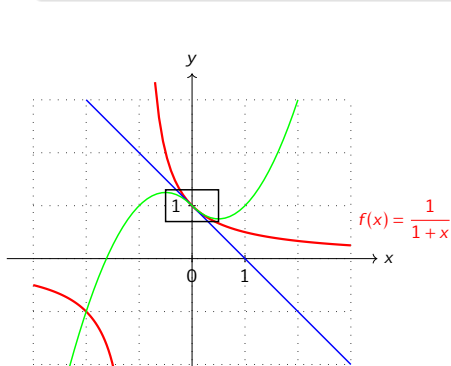
	x	0.1	0.01
Valeur exacte	e^x	1.10517091	1.010050167
DL à l'ordre 1	$1 + x$	1.1	1.01
DL à l'ordre 2	$1 + x + \frac{x^2}{2!}$	1.105	1.01005
DL à l'ordre 3	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$	1.105166	1.01005016
DL à l'ordre 4	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$	1.105170	1.0100501670

1.5.1. - Interprétation numérique et graphique

Exemple 86 $(f(x) = \frac{1}{1+x})$

$f(x)$ admet pour DL à l'ordre n :

$$f(x) = P_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$



1.5.2. - Développement limités usuels

$f(x)$	$\sim_0$	$P_n(x)$ du DL à l'ordre n
$(1+x)^\alpha$	$1+ax$	$1+ax+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\epsilon(x)$
$\frac{1}{1+x}$	$1-x$	$1-x+x^2-x^3+\dots+(-1)^n x^n+x^n\epsilon(x)$
$\ln(1+x)$	x	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+x^n\epsilon(x)$
e^x	$1+x$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\dots+\frac{x^n}{n!}+x^n\epsilon(x)$
$\sin(x)$	x	$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\dots+\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}+x^{2p+1}\epsilon(x)$
$\cos(x)$	1	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\dots+\frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p}+x^{2p}\epsilon(x)$
$\tan(x)$	x	$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\epsilon(x)$
$\arcsin(x)$	x	$x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{8}+x^5\epsilon(x)$
$\arctan(x)$	x	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{120}+x^5\epsilon(x)$

1.5.2. - DL d'une somme

Théorème 87 (DL d'une somme)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon(x)$. Alors $u(x) + v(x) = S_n(x)$ avec $S_n(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \epsilon(x)$ tronqué à l'ordre n .

🕒 Exercice 44. Exercice type : DL d'une somme : Déterminer le DL à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

1.5.2. - DLs d'un produit

Théorème 88 (DL d'un produit)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon(x)$. Alors $u(x).v(x) = S_n(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $S_n(x) = P_n(x).Q_n(x)$ tronqué à l'ordre n .

🕒 Exercice 45. Exercice type : DL d'un produit : Déterminer le DL à l'ordre 2 de $f(x) = e^x \cdot \cos(x)$.

1.5.2. - DLs d'un quotient

Théorème 89 (DL d'un quotient)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon(x)$. Alors

$\frac{u(x)}{v(x)} = S_n(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $S_n(x)$ obtenu par division polynômiale suivant les puissances croissantes de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ tronqué à l'ordre n .

🕒 Exercice 46. Exercice type : DL d'un quotient : Déterminer le DL à l'ordre 2 de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

1.5.2. - DLs d'une composée

Théorème 90 (DL d'une composée)

Soient $u(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x)$ et $v(x) = Q_n(x) + x^n \epsilon(x)$. Alors $u(v(x)) = S_n(x) + x^n \epsilon(x)$ avec $S_n(x) = P_n(Q_n(x))$ tronqué à l'ordre n .

🔗 Exercice 47. Exercice type : DL d'une composée : Déterminer le DL à l'ordre 2 de :

1 $f(x) = \ln(1 + \sin(x))$

2 $g(x) = \ln(1 + 3x)$

3 $h(x) = \sin(-2x)$

1.5.2. - Exercices de TD

➡ Exercice 48. *DL d'une somme* : Déterminer le DL à l'ordre 3 de $u(x) + v(x)$ lorsque $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x)$.

➡ Exercice 49. *DL d'un produit* : Déterminer le DL à l'ordre 2 de $u(x).v(x)$ avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \sin(x)$.

➡ Exercice 50. *Calcul de DLs* : Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions de la variable x suivantes :

$$1 \quad \frac{\sin(x)}{1+x^2}$$

$$2 \quad \frac{1}{1+\sin(x)}$$

$$3 \quad \tan^2(x)$$

$$4 \quad \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$$6 \quad \sin_c(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$7 \quad xe^x$$

$$8 \quad \frac{x}{1-e^x}$$

1.5.3. - DL et limites

Théorème 91 (DL et limite)

Si une fonction f admet un DL en 0 à l'ordre n de la forme $P_n(x)$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n , alors : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} P_n(x)$

🔗 Exercice 51. Exercice type : Limite : Calculer la limite en 0 de

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

1.5.3. - Exercices de TD

➡ Exercice 52. *Calcul de limites* : Calculer les limites quand x tend vers 0 des fonctions suivantes, en utilisant les DLs usuels :

$$1 \quad f(x) = \frac{x - \arcsin(x)}{x - \sin(x)}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{x - \sin(x)}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$$

$$4 \quad f(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{1 - \cos(x)}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$6 \quad f(x) = \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs.

➡ Exercice 53. *Calcul de limites (DS 2008)* : Calculez les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{1+x^3} - (1+x)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 3^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$$

1.5.3. - Exercices de TD

➡ Exercice 54. *Limites (pour les poursuites d'études longues)* :
Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{x-1}$$

$$7 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(2^{1/x} - 1)$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^n}{(1-x)^2}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} x(2^{1/x} - 1)$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

2. - Table des matières

2 Calcul intégral

- Primitive
- Intégrales propres dites intégrales de Riemann
- Intégrales (impropres) généralisées

2.1.1. - Notion de primitive

Définition 92 (Primitive)

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, définie et continue sur l'intervalle $[a; b]$. Une **primitive de la fonction f** est une **fonction F** de la variable x définie de $[a; b]$ sur $\mathbb{R}$ tel que : pour tout $x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple 93 (Primitives de la fonction inverse)

$F(x) = \frac{1}{x}$ est une primitive de $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

Corollaire 94 ()

Une primitive F de f sur $[a; b]$ est nécessairement dérivable sur $[a; b]$ et de dérivée $F'(x) = f(x)$ sur $[a; b]$

2.1.1. - Primitive et dérivée, deux opérations inverses

➡ Exercice 55. *Primitives* : Soit f une fonction. Donner une primitive F de f' .

Théorème 95 (Primitive et dérivée)

- f est une primitive de la dérivée de f .
- f est la dérivée d'une primitive de f .

2.1.1. - Condition d'existence d'une primitive

Théorème 96 (Existence d'une primitive)

Toute fonction f continue sur l'intervalle $[a;b]$ possède une primitive sur cet intervalle.

Rappel

Une fonction f dérivable sur $[a;b]$ est nécessairement continue ; elle admettra donc une primitive sur $[a;b]$.

2.1.1. - DES primitives ...

Théorème 97 (Ensemble des primitives de f)

f possède une **infinité de primitives**, toutes définies à une constante c près, appelée **constante d'intégration**. Les primitives de f forment donc un ensemble des fonctions noté $\{x \mapsto F(x) + c / c \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration.

Soit F_1 une primitive de f sur $[a; b]$. Alors la fonction F_2 définie par $F_2(x) = F_1(x) + c$ (avec c constante réelle quelconque) est aussi une primitive de f sur $[a; b]$. □

Exemple 98 (Primitives de l'exponentielle)

Toutes les primitives de la fonction $f(x) = e^x$ sont les fonctions $e^x + c$ avec c une constante réelle quelconque.

2.1.1. - ... qui peuvent devenir LA primitive QUI

Théorème 99 (Une seule primitive pour une condition de valeur donnée)

Il n'existe qu'une seule et unique primitive de f dont la valeur en un point x_0 est y_0 : c'est la fonction F qui satisfait au système

$$\text{d'équations : } \begin{cases} F' = f \\ F(x_0) = y_0 \end{cases} .$$

Trouver LA primitive QUI

Connaissant une primitive F_1 de f , trouver l'unique primitive F_2 de f dont la valeur en x_0 est y_0 consiste à trouver l'unique valeur de la constante d'intégration c telle que $y_0 = F_1(x_0) + c$. Cette unique valeur est $c_{\text{opt}} = y_0 - F_1(x_0)$. F_2 est donc définie pour tout $x \in [a, b]$ par $F_2(x) = F_1(x) + c_{\text{opt}} = F_1(x) + (y_0 - F_1(x_0))$.

🔗 Exercice 56. *La primitive* : Trouver la primitive de e^x qui s'annule en 2.

2.1.1. - Une question de vocabulaire

Une question de vocabulaire

Attention donc au vocabulaire employé : Pour une fonction f , admettant une primitive F :

- **Toutes les primitives** de f sont toutes les fonctions de la forme $F + c$ avec c la constante d'intégration
- **La primitive de f qui vaut y_0 en x_0** est la seule fonction $F + (y_0 - F(x_0))$
- **Une primitive de f** est par exemple $F + 2$

Ces primitives ne sont **valables** que sur un intervalle I où la fonction f est continue (ou au moins dérivable).

2.1.2. - Primitives des fonctions usuelles

	Fonction	$f(x)$	Primitives $F(x)$	Validité	
	Constante	k (avec $k \in \mathbb{R}$)	$kx + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Inverse	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$\mathbb{R}^*$	Term.
Puissance	Monôme	x^n (avec $n \in \mathbb{N}$)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Racine n -ième	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + c$	$\mathbb{R}^+$	
	Puissance d'inverse	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ (avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$)	$\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + c$	$\mathbb{R}^*$	Term.
	Puissance	x^α (avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\mathbb{R}^{++}$	
Expo	Exponentielle	e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Expo. à base a	$a^x = e^{x \ln(a)}$ (avec $a \in \mathbb{R}_*^+$)	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$	$\mathbb{R}$	

2.1.2. - Primitives des fonctions usuelles

	Fonction	$f(x)$	Primitives $F(x)$	Validité	
Trigonométrie	Cosinus	$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Sinus	$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$	Term.
	Tangente	$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + c$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	M1205
	ArcCosinus	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + c$	$] -1; 1[$	M1205
	ArcSinus	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$	$] -1; 1[$	M1205
	ArcTangente	$\frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$	M1205

2.1.2. - Opérations sur les fonctions

Soient u une fonction de primitive U , v une fonction de primitive V et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Fonction	$f(x)$	Primitives
Somme	$f(x) = u(x) + v(x)$	$F(x) = U(x) + V(x) + c$
Difference	$f(x) = u(x) - v(x)$	$F(x) = U(x) - V(x) + c$
Amplification	$f(x) = \lambda u(x)$	$F(x) = \lambda U(x) + c$
Homothétie	$f(x) = u(\lambda x)$	$F(x) = \frac{1}{\lambda} U(\lambda x) + c$

🕒 Exercice 57. *Exercice type : Primitives* : Trouver toutes les primitives de :

1 $f(x) = \frac{2}{x} + 3x$

2 $g(x) = e^{3x} + \frac{1}{5} \cos(2x)$

2.1.2. - Opérations sur les fonctions

Si f peut s'écrire comme la dérivée d'un produit, d'un quotient ou d'une composée faisant intervenir les fonctions u et v , on peut aisément donner une primitive de f .

Dérivée	Fonction	$f(x)$	Primitives
d'un produit	$f = (u.v)'$	$f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$F(x) = u(x).v(x) + c$
d'un quotient	$f = \left(\frac{u}{v}\right)'$	$f(x) = \frac{u(x)'v(x) - u(x)v(x)'}{v(x)^2}$	$F(x) = \frac{u(x)}{v(x)} + c$
d'une composée	$f = (u \circ v)'$	$f(x) = v'(x)u'(v(x))$	$F(x) = u(v(x)) + c$

🔗 Exercice 58. *Primitive de fractions rationnelles* : Donner toutes les primitives de $f(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

2.1.3. - Techniques d'intégration - Cas général

Méthodologie 100 (Recherche de primitives de f dans le cas général)

- ❶ Reconnaître les fonctions usuelles dans f et donner une de leur primitive
- ❷ Reconnaître l'assemblage de fonctions utilisées (somme, dérivée, amplification, composée, ...)
- ❸ Intégrer en utilisant les tables en n'oubliant pas la constante d'intégration

➡ Exercice 59. Exercice type : Primitives : Donner toutes les primitives de :

$$\text{❶ } f(x) = 2x(1 + x^2)^2$$

$$\text{❷ } P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

$$\text{❸ } f(x) = 2 \cos(3x) + 5 \sin\left(\frac{1}{5}x\right)$$

2.1.3. - Techniques d'intégration - Cas particulier 1

Méthodologie 101 (Recherche des primitives de f lorsque f contient des fonctions trigonométriques)

Linéariser la fonction en somme de cos et de sin (à la puissance 1) puis appliquer la méthodologie 100 (cas général)

➡ Exercice 60. *Primitives de fonctions trigonométriques* : Donner toutes les primitives de :

1 $f(x) = \sin^2(x)$

2 $g(x) = \cos^2(x)$

3 $h(x) = \cos(3x)\sin(2x)$

2.1.3. - Techniques d'intégration - Cas particulier 2

Méthodologie 102 (Recherche des primitives de f lorsque f est une fraction rationnelle)

- ❶ Si $f = \frac{u'}{u}$, alors $F(x) = \ln|u(x)| + c$
- ❷ Si $f = \frac{u'}{u^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$), alors $F(x) = \frac{1}{1-n} \frac{1}{u^{n-1}(x)} + c$
- ❸ Si $f = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, alors $F(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$
- ❹ Sinon, décomposer f en éléments simples, pour obtenir

$$f(x) = P(x) + \frac{A}{x-a} + B \frac{2x+b}{x^2+bx+c}$$
et intégrer :
 - le polynôme $P(x)$
 - les éléments $\frac{A}{x-a}$ ayant pour primitive $A \ln|x-a|$
 - les éléments $B \frac{2x+b}{x^2+bx+c}$ ayant pour primitive $B \ln|x^2+bx+c|$

puis ajouter toutes les primitives obtenues

2.1.3. - Exercices

➡ Exercice 61. *Primitives de fractions rationnelles* : Donner toutes les primitives de :

$$1 \quad f(x) = 5 \frac{x-1}{x^2+x-6}$$

$$2 \quad g(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2+1}$$

2.1.3. - Exercices

➡ Exercice 62. *Calcul de primitive* : Pour chacune des fonctions f suivantes, donner toutes les primitives $F(x)$ de f et l'ensemble de définition des primitives, en utilisant les règles d'opérations sur les fonctions :

$$1 \quad f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$$

$$3 \quad f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$$

$$5 \quad f(x) = \frac{1}{(x+1)^5}$$

$$7 \quad f(x) = e^x(x+1)$$

$$9 \quad f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+7}}$$

$$11 \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{9-\sin^2(x)}}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$4 \quad f(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$6 \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$8 \quad f(x) = (x^2 + 1)\sin(x^3 + 3x - 3)$$

$$10 \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{\sqrt{x^3 + 3x^2 + 6x + 1}}$$

$$12 \quad f(x) = x\sqrt{1+x^2}$$

2.1.3. - Exercices

➡ Exercice 63. *Primitives de fractions rationnelles* : Trouver une primitive des fractions rationnelles suivantes :

$$1 \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{x^3+1}{x-1}$$

$$5 \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$7 \quad f(x) = \frac{5x-12}{x(x-4)}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$$

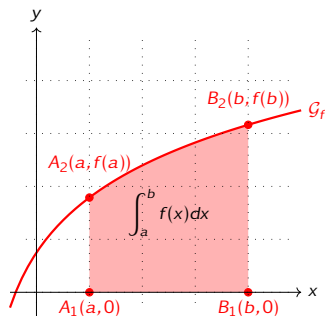
$$4 \quad f(x) = \frac{1}{x^2(x^2-3x+2)}$$

$$6 \quad f(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

2.2.1. - L'intégrale comme aire algébrique

Définition 103 (Intégrale de f de a à b)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. L'intégrale de f de a à b est l'**aire algébrique (signée)** de la surface dite "sous" le graphe géométrique $\mathcal{G}_f$ de f entre les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On la note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$. f est alors appelé **intégrande**.

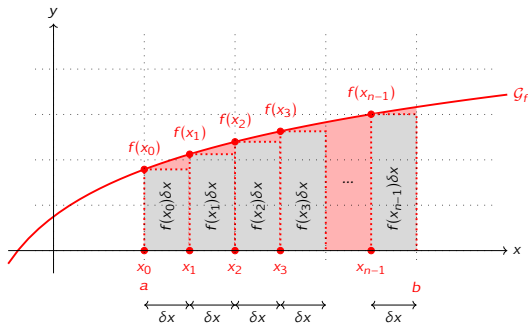


Remarques

- dx désigne la différentielle de x , autrement dit une petite variation de x .
- x est la **variable d'intégration**. C'est une variable muette

2.2.1. - Approximation de l'intégrale par une somme de rectangle

n mesures de la fonction : $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1})$ aux points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ espacés d'une distance $\delta x = x_1 - x_0 \approx \frac{b-a}{n}$



$$f(x_0)\delta x + f(x_1)\delta x + f(x_2)\delta x + \dots + f(x_{n-1})\delta x \approx \int_a^b f(x)dx$$

2.2.1. - Approximation de l'intégrale par une somme de rectangle

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \delta x \approx \int_a^b f(x) dx$$

Lorsqu'on fait tendre n vers $+\infty$ (et f intégrable), alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \delta x = \int_a^b f(x) dx$$

Conclusions

- Une intégrale est la **somme** de toutes les valeurs $f(x)$ que prend la fonction f entre $x = a$ et $x = b$ pondérées par la quantité infiniment petite dx .
- Dans le calcul d'une intégrale, il faudra systématiquement prendre en compte la règle de définition qui s'applique pour f dans l'intervalle d'intégration $[a; b]$.

2.2.1. - Exercices

➡ Exercice 64. *Exercice type : Intégrale d'une porte* : Calculer l'intégrale

$$\int_{-5}^5 \Pi(t/2) dt \text{ où } \Pi \text{ désigne la fonction porte normalisée.}$$

2.2.1. - Intégrale (propre)

Définition 105 (Intégrale (propre))

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$ ayant pour primitive la fonction F sur $[a; b]$. Alors f est **intégrable sur $[a; b]$** et son intégrale entre a et b est le nombre réel :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la constante d'intégration c choisie pour F
- $\left[F(x) \right]_a^b$ est une expression/notation mathématique
- cette intégrale (par définition) est aussi la "somme" de toutes les valeurs $f(x)$ prises par f lorsque x varie entre a et b . La règle de définition utilisée pour $f(x)$ dans le calcul de l'intégrale est donc celle valable pour $x \in [a; b]$.

2.2.1. - Exercices

➡ Exercice 65. *Exercice type : Intégrales* : Calculer :

$$1 \int_1^2 \text{sign}(t) dt \qquad 2 \int_{-2}^{-1} |t| dt$$

➡ Exercice 66. *Intégrale nulle* : Montrer que pour toute fonction f continue au voisinage d'un réel a , $\int_a^a f(t) dt = 0$

2.2.2. - Propriétés des intégrales propres

Théorème 109 (Relation de Chasles)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Théorème 110 (Inversion des bornes)

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

➡ Exercice 67. *Relation de Chasles* : Calculer $\int_0^2 (\Pi_2(x) + x)dx$.

2.2.2. - Propriétés de l'intégrale propre

Théorème 111 (Intégrale et symétrie graphique)

- Si la fonction f est **paire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

- Si la fonction f est **impaire**, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

- Si la fonction f est **périodique de période T** , alors

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx.$$

➡ Exercice 68. *Intégrale d'une fonction périodique* : Calculer $\int_{3\pi}^{5\pi} \cos(x)dx$.

2.2.3. - Techniques d'intégration

Méthodologies

- 1 Rechercher une **primitive** F de f puis calculer $F(b) - F(a)$.
- 2 Utiliser une **intégration par parties** pour se ramener à la méthodologie précédente.
- 3 Effectuer un **changement de variable** pour se ramener à la méthodologie précédente.

2.2.3. - Méthodologie : Recherche de primitives

Méthodologie 112 (Recherche de primitives)

$\int_a^b f(x)dx$ se calcule en trouvant une primitive F de f puis en évaluant $\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$. F est recherchée avec les méthodologies 100, 101 et 102, déjà vues pour le calcul de primitive et qui se résument de la sorte :

- f = assemblage de fonctions usuelles $\Rightarrow$ tables des primitives usuelles et opérations sur les fonctions
- f = fonctions trigonométriques $\Rightarrow$ Linéarisation
- f = fraction rationnelle simple

$\rightarrow$ mettre f en relation avec $du \frac{u'}{u}$, $du \frac{u'}{u^n}$ ou $du \frac{u'v - uv'}{v^2}$ puis intégrer

$\rightarrow$ sinon, faire une DES^a de f puis intégrer les $\frac{A}{x-a}$ et $\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$

a. Décomposition en éléments simples

2.2.3. - Exercices

➡ Exercice 69. *Intégrales* : Calculer :

$$1 \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$2 \int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$$

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 70. *BTS Groupement B 2003* : Soit f la fonction définie par $f(x) = (2x + 3)e^{-x}$.

- ➊ Montrer que f admet une primitive sur $\mathbb{R}$.
- ➋ Montrer qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :
$$F(x) = -(2x + 5)e^{-x}.$$
- ➌ Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 5 - 6e^{-\frac{1}{2}}$.

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 71. *Calcul d'intégrales* : Calculer les intégrales suivantes :

$$1 \quad \int_0^1 (6x^2 - 5)(2x^3 - 5x + 1) dx$$

$$3 \quad \int_0^{\pi/4} \tan(x) dx$$

$$5 \quad \int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin(t)| dt$$

$$2 \quad \int_{-2}^2 |x^2 + 2x - 3| dx$$

$$4 \quad \int_0^{\pi/4} \tan^2(x) dx$$

$$6 \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$$

2.2.3. - Exercices

➡ Exercice 72. *BTS Groupement E 2002* : Soit f et h deux fonctions définies sur l'intervalle $[0;5]$ par : $f(x) = \frac{1}{4}(x^3 - 9x^2 + 24x)$ et $h(x) = -x^2 + 6x$.

- ① Etudier et représenter graphiquement les fonctions f et h sur l'intervalle $[0;5]$.
- ② En notant $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_h$ les graphes géométriques de f et h , intuisez la position relative de $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_h$ dans le plan. Justifier ensuite votre réponse par le calcul.
- ③ Calculer l'aire $\mathcal{S}$ de la partie du plan comprise entre les deux graphes. On donnera une valeur exacte.

2.2.3. - L'Intégration Par Partie (IPP) pour le produit de fonctions

Théorème 113 (Intégration par parties)

Si la fonction f à intégrer s'écrit $f(x) = u'(x)v(x)$ avec u, v deux fonctions définies et dérivables sur $[a; b]$ et de dérivées respectives u' et v' elles-mêmes continues sur $[a; b]$ alors la formule de l'intégration par parties consiste à écrire :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \overset{u(x)}{\underset{v'(x)}{u'(x) \cdot v(x)}} dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

2.2.3. - Méthodologie : L'IPP

Méthodologie 114 (IPP)

- ❶ Chercher u' et v tels qu'on puisse écrire $f(x) = u'(x)v(x)$;
- ❷ Déterminer une primitive u de u' ;
- ❸ Calculer la dérivée v' de v ;
- ❹ Appliquer la formule de l'IPP $\int_a^b f(x)dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$
et calculer $\left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b$ puis intégrer $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ avec les
différentes méthodologies.

2.2.3. - Choix des fonctions de l'IPP

Choix des fonctions u' et v de l'IPP

Ce choix est arbitraire et requiert de la pratique et de l'intuition.

Cependant, l'idée principale est que $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ soit plus facile à calculer que $\int_a^b u'(x)v(x)dx$: on aura donc souvent tendance à choisir :

- comme terme $u'(x)$, les fonctions trigonométriques, les exponentielles ;
- comme terme $v(x)$, les polynômes, les logarithmes.

2.2.3. - Exercices

➡ Exercice 73. *Exercice type : IPP* : Calculer avec une IPP :

$$1 \int_1^2 (2x+1)e^x dx$$

$$2 \int_1^3 x \cos(x) dx$$

2.2.3. - Exercices de TD

➡ Exercice 74. IPP : Calculer les intégrales suivantes en faisant une intégration par parties :

$$1 \quad \int_0^{\pi} x \sin(x) dx$$

$$2 \quad \int_a^b x^{\alpha} \ln(x) dx \text{ avec } 0 < a < b \text{ et } \alpha > 1$$

$$3 \quad \int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) dx$$

$$4 \quad \int_a^0 x e^{-x} dx \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

➡ Exercice 75. IPP : Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$ fixé. Calculer les intégrales suivantes en utilisant une IPP :

$$1 \quad \int_0^t e^{2x} (3x^2 + 1) dx$$

$$2 \quad \int_0^t e^{-x} (x^3 + 5x^2) dx$$

$$3 \quad \int_0^t \ln(x^2 + 1) dx$$

$$4 \quad \int_1^t x^2 \ln(x) dx$$

$$5 \quad \int_0^t \arctan(x) dx$$

2.2.3. - Méthodologie : le Changement de Variable (CV)

Théorème 115 (Le changement de variable)

Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur $[a; b]$ et $I = \int_a^b f(x) dx$. On pose

$x = u(t)$ où u est une fonction de la variable t qui est :

- **définie et dérivable** sur $[\alpha; \beta]$ de dérivée telle que $dx = u'(t) dt$;
- **monotone** sur $[\alpha; \beta]$ donc ayant une réciproque u^{-1} telle que $t = u^{-1}(x)$;
- telle que $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$ et donc telle que $\alpha = u^{-1}(a)$ et $\beta = u^{-1}(b)$.

Alors :

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt$$

2.2.3. - Méthodologie du CV par l'exemple

Méthodologie 116 (CV)

- 1 Poser le CV $x=u(t)$ et l'inverser pour avoir $t = u^{-1}(x)$;
- 2 **Règle de définition** : réécrire la règle de définition de $f(x)$ en remplaçant l'ancienne variable x par la nouvelle t ;
- 3 **Calcul des bornes** α et β : calculer ce que vaut t lorsque $x = a$, puis lorsque $x = b$;
- 4 **Calcul de la différentielle** $dx = u'(t)dt$: en interprétant x comme une fonction de t , calculer $u'(t) = \frac{dx}{dt}$ autrement dit la dérivée x' de x par rapport à t ; en déduire dx en fonction de dt ;
- 5 Appliquer la formule du CV, puis continuer le calcul de l'intégrale avec les méthodologies du cours.

2.2.3. - Exercices

➡ Exercice 76. CV : Calculer $\int_0^1 \exp(\sqrt{x}) dx$ en faisant le CV $t = \sqrt{x}$.

2.2.3. - Choix du CV

Choix du CV

En général, le CV est suggéré par l'énoncé ; sinon

$f(x)$ de la forme	Changement de variable (CV)
$\sqrt{1-x^2}$	$x = \cos(t)$ ou $x = \sin(t)$
$\frac{1}{x^2+1}$	$x = \tan(t)$
$\frac{e^x + \alpha}{e^x + \beta}$	$x = \ln(t)$
$\sqrt{a^2 - b^2(x + \alpha)^2}$	$x = \frac{a}{b} \cos(t) - \alpha$ ou $x = \frac{a}{b} \sin(t) - \alpha$

2.2.3. - Exercices

➡ Exercice 77. CV : Calculer à l'aide d'un CV les intégrales suivantes :

1 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ avec $x = \cos(t)$

2 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} dx$ avec $t = \frac{1}{x}$

3 $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1/2} dx$ avec $t = x + \frac{1}{2}$ puis $u = 2t$

2.2.3. - Exercices

➔ Exercice 78. CV : Calculer les intégrales suivantes en faisant le changement de variable suggéré :

$$1 \quad \int_0^{1/2} \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \text{ avec } x = \sin(u)$$

$$3 \quad \int_0^1 \frac{3x-1}{x^2-2x+5} dx \text{ avec } u = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$5 \quad \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^{2x}+1} dx \text{ avec } u = e^x$$

$$7 \quad \int_{1/4}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \text{ avec } u = \sqrt{x}$$

$$9 \quad \int_0^a \frac{1}{3+e^{-x}} dx \text{ avec } u = e^x \text{ et } a \in \mathbb{R}_*^+$$

$$2 \quad \int_0^1 \frac{1}{3x^2+2} dx \text{ avec } u = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$4 \quad \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx \text{ avec } u = e^x$$

$$6 \quad \int_{1/4}^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x} dx \text{ avec } u = \sqrt{x}$$

$$8 \quad \int_2^3 \frac{1}{x \ln(x)} dx \text{ avec } u = \ln x$$

$$10 \quad \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx \text{ avec } u = \sqrt{1+e^x} \text{ et } a \in \mathbb{R}_*^+$$

2.2.3. - Application de l'intégration à la physique

Définition 117 (Grandeurs physiques en électronique)

Soit une tension $U(t)$ fonction du temps t .

- La **valeur moyenne** de $U(t)$ entre l'instant $t = a$ et l'instant $t = b$ est :

$$U_{moy} = \frac{1}{b-a} \int_a^b U(t) dt$$

- La **valeur efficace**^a de $U(t)$ entre l'instant $t = a$ et l'instant $t = b$ est :

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b U^2(t) dt}$$

a. valeur de la tension continue qui provoquerait une même dissipation de puissance que $U(t)$ si elle était appliquée aux bornes d'une résistance

2.2.3. - Exercices

➡ Exercice 79. *Exercice type : Tension en électronique :*

Calculer les valeurs moyennes des tensions suivantes sur l'intervalle de temps spécifié :

1 $U_1(t) = 2 \cos(2t - 1)$ sur $[1, 2]$, 2 $U_2(t) = 3 \sin(20\pi t + \pi/4)$ sur $[0, 1]$,

3 $U_3(t) = -2 \cos(4t + 1)$ sur $[0, \pi]$.

Indice : effectuer les changements de variables suivants :

1 $x = 2t - 1$, 2 $x = 20\pi t + \pi/4$, 3 $x = 4t + 1$.

2.3.1. - Introduction aux intégrales impropres

On cherche à calculer $\int_a^b f(x)dx$ lorsque :

- ❶ f n'est pas définie ou continue sur tous les points de $[a;b]$
- ❷ f n'est définie que sur $]a;b]$ avec f non définie en a
- ❸ f n'est définie que sur $[a;b[$ avec f non définie en b
- ❹ l'intervalle d'intégration est $[a;+\infty[$ ou est $]-\infty;b]$

Exemple 118 (Des intégrales impropres)

- $\int_{-1}^1 \text{sinc}(x)dx$ alors que sinc n'est pas définie en 0
- $\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx$ alors que $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow 0$ et donc que l'aire sous la courbe est intuitivement infinie
- En Télécommunications, $\text{TEB} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_b^2}\right) dx$

2.3.1. - Intégrale impropre

Définition 119 (Intégrale impropre ou généralisée)

Soient a un réel, b un réel ou un infini ($+\infty$ ou $-\infty$) et f une fonction définie et continue sur $[a; b[$.

- Si $\lim_{T \rightarrow b} \int_a^T f(x)dx$ existe et vaut une valeur réelle finie I (c'est à dire une valeur $\neq \infty$), on dit que la fonction f est **intégrable** de a à b . Alors l'**intégrale impropre (ou généralisée)** notée $\int_a^b f(x)dx$ existe et vaut I .
- Si $\lim_{T \rightarrow b} \int_a^T f(x)dx$ n'a pas de valeur réelle finie (par exemple vaut $+\infty$), alors on dit que f n'est pas intégrable. Alors l'**intégrale impropre (ou généralisée)** notée $\int_a^b f(x)dx$ n'existe pas et n'a pas de valeur.
- b est appelé la **borne à risque**

2.3.1. - Bornes à risques

Méthodologie 120 (Comment identifier la (ou les) borne(s) à risque?)

Dans l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$,

- 1 Etudier la dérivabilité (continuité) de f sur l'intervalle d'intégration $[a;b]$: si f n'est pas dérivable (continue) en différents points de l'intervalle d'intégration, ces points sont des bornes à risque.
- 2 Si l'intervalle d'intégration inclut un infini $(-\infty, +\infty)$, cet infini est une borne à risque.
- 3 Dans tous les autres cas, l'intégrale ne présente pas de borne à risque. Ce n'est pas une intégrale généralisée mais une intégrale propre.

2.3.1. - Exercices

➡ Exercice 80. *Bornes à risque d'intégrales impropres* : Identifier la ou les bornes à risques dans les intégrales suivantes :

$$1 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$$

2.3.1. - Exercices

➡ Exercice 81. *Bornes à risques* : Pour chacune des intégrales suivantes, préciser (si elles existent) les bornes à risques :

$$1 \quad \int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$3 \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$5 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$$

$$8 \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + x + 1)^n} dx \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

$$2 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$4 \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\exp(\arctan(x))}{x} dx$$

$$7 \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t^2} dt$$

2.3.3. - Calcul de l'intégrale impropre

Méthodologie 129 (Calcul d'une intégrale impropre $\int f(x)dx$)

- ❶ Déterminer la (ou les) borne(s) à risques dans l'intervalle d'intégration
- ❷ Découper l'intégrale en somme d'intégrales $\int_a^b f(x)dx$ avec b une des bornes à risques
- ❸ Calculer $\int_a^b f(x)dx$ en :
 - Posant T un réel quelconque dans $[a; b[$, puis calculer $F(T) = \int_a^T f(x)dx$
 - Calculant la limite quand $T \rightarrow b$ de $F(T)$
 - La limite trouvée est $\int_a^b f(x)dx$: elle doit être réelle si l'intégrale existe, sinon elle sera ∞
- ❹ Ajouter tous les résultats d'intégrales pour obtenir $\int f(x)dx$

2.3.3. - Exercices

➡ Exercice 85. *Exercice type : Intégrales impropres* : Calculer :

$$1 \quad I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{10^x} dx$$

$$2 \quad \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$$

2.3.3. - Exercices

➔ Exercice 86. *Calcul d'intégrales généralisées* : Calculer en suivant les indications proposées :

$$1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$3 \quad \int_1^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx \quad \boxed{\text{IPP}}$$

$$5 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(|x|+1)^3} dx$$

$$7 \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx \quad \boxed{u = x+1}$$

$$9 \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2} dx$$

$$2 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$4 \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2} dx \quad \boxed{\text{IPP}}$$

$$6 \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx \quad \boxed{u = x^6}$$

$$8 \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(e^x+1)(e^{-x}+1)} dx$$

$$10 \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3} dx \quad \boxed{\text{IPP}}$$