
Mathématiques pour les RT

Algèbre linéaire

Cléo BARAS, cleo.baras@univ-grenoble-alpes.fr
Cyrille SICLET, cyrille.siclet@univ-grenoble-alpes.fr

IUT Département Réseaux & Télécommunications
Version 2023-2024

partie

1. - Plan

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Rappel sur la 2D : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

n D : Généralisation à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Bases de $\mathbb{R}^n$

Applications linéaires

Réduction d'endomorphisme

Espaces vectoriels : cas général

1.1.1. - Rappel : l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

Définition 1 (Espace des vecteurs $\mathbb{R}^2$).

L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ d'abscisse v_1 et d'ordonnée v_2 dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ forme l'espace (ensemble) de vecteurs $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} / v_1 \in \mathbb{R}, v_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les vecteurs traduisent un déplacement d'un point de départ vers un point d'arrivée; ils sont caractérisés par :

- ▶ Une direction (sens du déplacement)
- ▶ Une longueur

Exemple 2 (Des vecteurs de $\mathbb{R}^2$).

Le zéro vectoriel $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.1.2. - Rappel : l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$

Définition 3 (Opérations vectorielles dans $\mathbb{R}^2$).

L'espace de vecteurs $\mathbb{R}^2$ peut être muni de deux opérations :

1. l'addition vectorielle :
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$
2. la multiplication externe par un réel :
$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Théorème 4 (Stabilité d'un espace vectoriel).

Un espace vectoriel est :

- ▶ **stable pour l'addition**, c'est-à-dire que pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'ensemble, la somme $\vec{u} + \vec{v}$ est un vecteur de l'espace
- ▶ **stable pour la multiplication externe**, c'est-à-dire que pour un vecteur $\vec{v}$ et un réel λ , le vecteur $\lambda\vec{v}$ est un vecteur de l'espace

1.1.3. - Combinaisons linéaires

Définition 5 (Familles de vecteurs).

Une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est un ensemble de m vecteurs. Si les m vecteurs sont notés $\vec{v}_j$ avec j variant de 1 à m , la famille est notée $\mathcal{F} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ ou en abrégé $\mathcal{F} = \{\vec{v}_j\}_{j=1..m}$.

Définition 6 (Combinaisons linéaires).

Étant donnée une famille de m vecteurs $\mathcal{F} = \{\vec{v}_j\}_{j=1..m}$ et étant donnés m réels, notés λ_j avec j variant de 1 à m , le vecteur
$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{j=1}^m \lambda_j \vec{v}_j$$
 est appelé **combinaison linéaire (CL)** des vecteurs $\vec{v}_j$ et des réels λ_j .

1.1.3. - Combinaisons linéaires

Écriture matricielle d'une combinaison linéaire de 3 vecteurs

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$, et soient trois réels λ_1 , λ_2 et λ_3 . Alors la CL $\vec{t} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w}$ a pour expression matricielle :

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = F \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

avec la matrice F associée à la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ valant :

$$F = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$$

Remarque : l'écriture se généralise aisément pour une CL de m

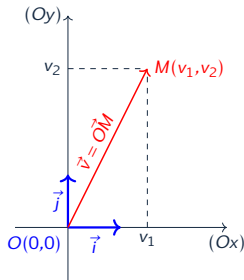
1.1.3. - Exercice type

➔ EXERCICE 1. : Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ de deux façons différentes. □

1.1.4. - Base canonique de $\mathbb{R}^2$

Il existe deux vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ tels que tout vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ noté $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ s'écrit **de manière unique** : $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$.

Cette **combinaison linéaire** s'interprète comme une série de déplacements partant du point de départ vers le point d'arrivée du vecteur : un déplacement dans la direction $\vec{i}$ de longueur v_1 suivi d'un déplacement dans la direction $\vec{j}$ de longueur v_2 .



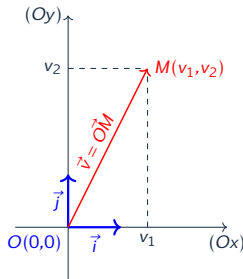
1.1.4. - Base canonique de $\mathbb{R}^2$

Définition 7 (Notion de base).

On dit que la famille $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ forme la **base canonique** de $\mathbb{R}^2$ et que le couple (v_1, v_2) donne les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. v_1 s'interprète comme l'abscisse de $\vec{v}$ et v_2 comme l'ordonnée de $\vec{v}$ dans le plan 2D.

Remarques :

- ▶ Il existe en fait **une infinité de bases** de $\mathbb{R}^2$: **1** $(-\vec{j}, -\vec{i})$, **2** $(-\vec{i}, -\vec{j})$, **3** $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$, **4** $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{j})$.
- ▶ Les coordonnées **dépendent de la base** : pour $\vec{v}$, si elles sont égales à (v_1, v_2) dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, alors elles sont égales à (v_2, v_1) dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{j}, \vec{i})$.
- ▶ Les coordonnées sont **ordonnées**.



1.1.4. - Les bases de $\mathbb{R}^2$

Définition 8 (Base).

Une **base** $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est une **famille de deux vecteurs** $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ choisis de sorte que tout vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ puisse s'écrire **de manière unique** sous la forme d'une **combinaison linéaire (CL)** des vecteurs de la base :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \vec{b}_i.$$

Remarque : Il existe une infinité de bases de $\mathbb{R}^2$.

Définition 9 (Dimension de $\mathbb{R}^2$).

Toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ comportent exactement deux vecteurs. C'est pourquoi on dit que $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. Et on note $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

1.1.5. - Coordonnées d'un vecteur

Définition 10 (Coordonnées d'un vecteur).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Écrire un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ sous la forme d'une CL $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$ s'appelle **décomposer $\vec{v}$ sur la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$** .

Les réels λ_1 et λ_2 obtenus sont **uniques** et s'appellent les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$: λ_1 est la coordonnée de $\vec{v}$ sur $\vec{b}_1$ et λ_2 est la coordonnée de $\vec{v}$ sur $\vec{b}_2$.

Écriture matricielle des vecteurs et de leurs coordonnées

La représentation matricielle d'un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées (λ_1, λ_2) dans la base $\mathcal{B}$ est le vecteur colonne $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Remarque : Lorsque la $\mathcal{B}$ est la base canonique, $\lambda_1 = v_1$ et $\lambda_2 = v_2$; on omet souvent la mention de la base dans les coordonnées.

1.1.5. - Unicité des coordonnées

Propriété 11 (Unicité de la décomposition sur une base).

Soient $\vec{u} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$ et $\vec{v} = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ayant pour base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Alors dire que les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la **même** base $\mathcal{B}$ sont **uniques** signifie que

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \lambda_2 = \mu_2 \end{cases}$$

Propriété 12 (Égalité avec le zéro vectoriel).

Soient $\vec{u} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$. Alors : $\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

1.1.5. - Exercice type

➡ EXERCICE 2. : Quelles sont les coordonnées de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les coordonnées de $2\vec{i} + \vec{j}$ dans la base $(\vec{j}, -\vec{i})$?



➡ EXERCICE 3. Des bases de $\mathbb{R}^2$: Soient $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ une base $\mathbb{R}^2$ et λ un scalaire réel non nul. Montrer que $\mathcal{B}' = (\lambda\vec{b}_1, \lambda\vec{b}_2)$ est une autre base de $\mathbb{R}^2$.

Pour un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sur la base $\mathcal{B}$, donner les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$.



1.1.6. - Bilan des représentations

Vecteurs 2D

$\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des vecteurs 2D, représentés par les notations équivalentes

Notation	Expression
vectorielle	$\vec{v}$
sous forme de coordonnées dans la base canonique	$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
avec décomposition sur la base canonique	$v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$
avec décomposition sur la base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ donnant les coordonnées (λ_1, λ_2) de $\vec{v}$ sur $\mathcal{B}$ (dépendantes de la base)	$\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$
matricielle avec les coordonnées de $\vec{v}$ sur $\mathcal{B}$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

1.2.1. - Généralisation à la nD

On peut facilement généraliser les vecteurs de la 2D à la nD , l'addition, la multiplication externe et la dimension...

Définition 13 (Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$).

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est formé de l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ définis

par n valeurs $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ où les v_i sont des nombres réels. Il est muni

d'opérations vectoriels : l'addition et la multiplication externe, et est stable pour ces deux opérations.

1.2.1. - Opérations vectorielles dans $\mathbb{R}^n$

Définition 14 (Opérations vectorielles dans $\mathbb{R}^n$).

1. L'addition vectorielle :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

2. La multiplication externe par un réel λ :

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$$

1.2.2. - CL et matrice associée à une famille

Définition 15 (Combinaison linéaire et matrice associée à une famille de vecteurs).

Soient m vecteurs $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{n,i} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, alors la combinaison linéaire

(CL) $\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i$ a pour écriture matricielle

$\vec{v} = F \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ avec F la matrice associée à la famille

$\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m)$, de taille $n \times m$, et définie par :

$$F = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_m \\ v_{1,1} & v_{1,2} & \dots & v_{1,m} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \dots & v_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_{n,1} & v_{n,2} & \dots & v_{n,m} \end{pmatrix}$$

1.2.3. - Bases et coordonnées

	En 2D	En nD ($n \geq 3$)
Espace vectoriel	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^n$
Vecteur	$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Dimension	2	n
Base $\mathcal{B}$	Famille de 2 vecteurs $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$	Famille de n vecteurs $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$
Décomposition	$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2$ $= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \vec{b}_i$	$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$ $= \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i$
Coordonnées sur $\mathcal{B}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

1.3.1. - Ensemble vectoriel stable

Définition 16 (Ensemble stable pour l'addition).

Un ensemble de vecteurs $\mathbb{F}$ est stable pour l'addition si et seulement si, pour tout $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{F}$, on a $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{F}$.

Définition 17 (Ensemble stable pour la multiplication externe).

Un ensemble de vecteurs $\mathbb{F}$ est stable pour la multiplication externe si et seulement si, pour tout $\vec{v}$ de $\mathbb{F}$ et pour tout nombre réel λ , alors $\lambda\vec{v} \in \mathbb{F}$.

Théorème 18 (Ensemble stable).

Un ensemble de vecteurs $\mathbb{F}$ est stable pour l'addition et la multiplication externe si et seulement si pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{F}$ et pour tout réel λ , on a $\vec{u} + \lambda\vec{v} \in \mathbb{F}$.

1.3.2. - Sous-espaces vectoriels

Définition 19 (Sous-espaces vectoriels).

Soit $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ (autrement dit $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^n$). On dit que $\mathbb{F}$ est un **sous-espace vectoriel** (SEV) de $\mathbb{R}^n$ lorsque :

1. $\mathbb{F}$ est non vide (c'est-à-dire contient au moins un vecteur);
2. $\mathbb{F}$ est stable pour l'addition et pour la multiplication externe.

Exemple 20 (Un sous-espace).

L'ensemble $\mathbb{F}$ des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ tels que $v_1 = v_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, car :

- ▶ $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}$ (puisque $0=0$);
- ▶ pour tout $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{F}$ donc tel que $v_1 = v_2$ et $u_1 = u_2$, et pour tout réel λ , le vecteur $\vec{u} + \lambda\vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + \lambda v_1 \\ u_2 + \lambda v_2 \end{pmatrix}$ vérifie bien $u_1 + \lambda v_1 = u_2 + \lambda v_2$ donc appartient à $\mathbb{F}$ (stabilité).

1.3.3. - Exercice type

➔ EXERCICE 4. *Exercice type* : Montrer que l'ensemble :

- ▶ $\left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- ▶ $\left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- ▶ $\left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.



1.3.3. - Exercices

➔ EXERCICE 5. *Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$* : On se place dans $\mathbb{R}^3$ et ses

vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ définis par leur coordonnées dans la base canonique

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Déterminez lesquels des ensembles de $\mathbb{E}_1$ à $\mathbb{E}_5$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Le cas échéant, explicitez quelle propriété n'est pas vérifiée.

- ① $\mathbb{E}_1 = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 / v_1 + v_2 + v_3 = 0 \}$
- ② $\mathbb{E}_2 = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 / v_1 + v_2 + v_3 = 4 \}$
- ③ $\mathbb{E}_3 = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 / v_1 + v_2 - v_3 = 0 \text{ et } v_1 + v_2 + v_3 = 0 \}$
- ④ $\mathbb{E}_4 = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 / v_1^2 - v_3^2 = 0 \}$
- ⑤ $\mathbb{E}_5 = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 / v_3(v_1^2 + v_2^2) = 0 \}$



2. - Plan

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Bases de $\mathbb{R}^n$

- Familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

- Bases de $\mathbb{R}^n$

- Changement de base

- Bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$

Applications linéaires

Réduction d'endomorphisme

Espaces vectoriels : cas général

2.1.1. - D'un vecteur à une CL

D'un vecteur à une combinaison linéaire

Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$, de matrice associée F .

Un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs de $\mathcal{F}$ s'il existe (au moins) une famille de m réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ telle que

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m \text{ ou de manière équivalente, telle que : } \vec{v} = F \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de F si et seulement si l'équation matricielle $\vec{v} = F \vec{\lambda}$ de vecteur d'inconnues $\vec{\lambda}$ admet (au moins) une solution.

2.1.1. - Solutions d'un système linéaire

Rappels des solutions d'un système linéaire carré

Une équation matricielle $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$, d'inconnues $\mathbf{X}$, représentant un système linéaire de n équations à n inconnues, admet :

- ▶ lorsque $\mathbf{A}$ est inversible, c'est-à-dire lorsque $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, une unique solution valant $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$;
- ▶ lorsque $\mathbf{A}$ n'est pas inversible (cas $\det(\mathbf{A}) = 0$), soit 0 solution soit une infinité (donc plusieurs) solutions.

Remarque : Si le nombre d'équations n est différent du nombre d'inconnues m alors

- ▶ il peut y avoir 0 ou une infinité de solutions si $n < m$;
- ▶ il peut y avoir 0, 1 ou une infinité de solutions si $n > m$.

Dans les deux cas, la résolution du système peut se faire en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

2.1.1. - Exercice type 1

➔ EXERCICE 6. *Exercice type* : On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{t} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\vec{t}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. □

2.1.1. - Exercices type 2

➡ EXERCICE 7. *Combinaisons linéaires en 3D :*

On considère les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ -19 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Préciser, dans chacun des cas suivants, si le vecteur $\vec{v}_j$ est une combinaison

linéaire (CL) des vecteurs $\vec{u}_i$ indiqués avec : $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

et $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

- ① $\vec{v}_1$ est-il une CL de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$?
- ② $\vec{v}_2$ est-il une CL de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$?
- ③ $\vec{v}_3$ est-il une CL de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_4$?
- ④ $\vec{v}_4$ est-il une CL de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_4$?



2.1.2. - Espace vectoriel engendré

Définition 21 (Espace vectoriel engendré).

Soit $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ une famille de m vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'**espace vectoriel engendré** par la famille $\mathcal{F}$ est l'ensemble formé par toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{F}$. On le note $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

Théorème 22 (Espace vectoriel engendré).

Un espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 23 (Un sous-espace vectoriel engendré).

Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des vecteurs engendré par la famille $\mathcal{F} = (\vec{i})$ est l'ensemble des vecteurs s'écrivant $\lambda\vec{i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ quelconque. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.1.3. - Famille génératrice

Définition 24 (Famille génératrice).

Une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ de $\mathbb{R}^n$ est une **famille génératrice** de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$, noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$, est l'ensemble $\mathbb{R}^n$ tout entier. On dit alors que $\mathcal{F}$ **génère** $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$. (Pour un même vecteur, plusieurs combinaisons linéaires peuvent être possibles).

$$\text{Vect}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists (\lambda_i)_{i=1..m} \in \mathbb{R}^m / \vec{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i$$

Théorème 25 (Taille d'une famille génératrice).

Une famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ de $\mathbb{R}^n$ doit contenir suffisamment de vecteurs pour générer $\mathbb{R}^n$. Précisément, on doit avoir $m \geq n$, sinon $\mathcal{F}$ ne peut pas être une famille génératrice.

2.1.3. - Exemple 1

Exemple 26 (Une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$).

Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

☰ Prenons $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ un vecteur quelconque.

❓ Cherchons les réels λ_1, λ_2 de sa décomposition sur la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

❓ Ils doivent vérifier : $\vec{u} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ ce qui équivaut à

$\begin{cases} u_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ u_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$. La résolution de ce système d'inconnus λ_1 et λ_2 (et

de paramètres u_1 et u_2) donne : $\lambda_1 = \frac{(u_1 + u_2)}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{(u_1 - u_2)}{2}$.

☑ Donc tout vecteur $\vec{u}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ (CQFD), avec d'ailleurs $\vec{u} = \frac{(u_1 + u_2)}{2} \vec{v}_1 + \frac{(u_1 - u_2)}{2} \vec{v}_2$.



2.1.3. - Exemple 2

Exemple 27 (Une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$).

Soit $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés avec leur coordonnées sur la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ génère $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

De manière évidente  tout vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ s'écrit :

 $\vec{u} = -u_1 \vec{v}_1 + u_2 \vec{v}_2 + u_3 \vec{v}_3.$



Remarque : Il existe plusieurs familles génératrices pour un même espace vectoriel ; elles n'ont pas toutes le même nombre de vecteurs, mais ont nécessairement un nombre de vecteurs m supérieur ou

2.1.3. - Famille génératrice et matrice

Montrer qu'une famille est génératrice revient à résoudre un système!

Soit une famille $\mathcal{F}$ de m vecteurs $\vec{v}_i$. $\mathcal{F}$ génère $\mathbb{R}^n$ si et seulement si pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe des réels λ_i permettant d'écrire

$\vec{v} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i$. Cette combinaison linéaire s'écrit matriciellement $\vec{v} = F \vec{\lambda}$

où $\vec{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ et F est la matrice associée à $\mathcal{F}$ (matrice dont les

colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\vec{v}_i$ dans l'ordre).

Donc $\vec{v}$ peut s'écrire comme une CL des vecteurs $\vec{v}_i$ si et seulement si l'équation matricielle $\vec{v} = F \vec{\lambda}$ de vecteurs d'inconnues $\vec{\lambda}$ admet au moins une solution (une ou plusieurs).

2.1.3. - Rappel : Solutions d'une équation matricielle

Rappel : le système $\vec{v} = F\vec{\lambda}$, lorsque :

- ▶ la dimension du vecteur $\vec{v}$ est la même que le nombre d'inconnues de $\vec{\lambda}$ (donc que le nombre de vecteurs dans la famille $\mathcal{F}$)
- ▶ autrement dit lorsque F est une matrice carrée,

admet :

- ▶ une unique solution si F est inversible (donc de déterminant non nul)
- ▶ 0 ou une infinité de solutions si F n'est pas inversible (donc de déterminant nul).

2.1.3. - Exercice type

➡ EXERCICE 8. *Exercice-type* : Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ génère $\mathbb{R}^3$.



2.1.3. - Exercice 2

➔ EXERCICE 9. *Génération de $\mathbb{R}^2$* : Montrer que la famille $\mathcal{F}$ constituée des vecteurs $\vec{b}_1 = \vec{i}$ et $\vec{b}_2 = \vec{i} + \vec{j}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. □

2.1.4. - Famille liée

Définition 28 (Famille liée).

Une famille $\mathcal{F}$ de m vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ de $\mathbb{R}^n$ est **liée** (ou **linéairement dépendante**) si et seulement s'il existe m réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, dont **au moins un** est **non nul**, de sorte que :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}.$$

Exemple 29 (Dans $\mathbb{R}^2$).

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ avec $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est liée puisque $\mathbf{Q} \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$

2.1.4. - Famille liée

Remarques :

- ▶ Toute famille incluant le vecteur zéro $\vec{0}$ est liée : par exemple si $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la famille $(\vec{v}_1, \vec{0})$ est liée car $0 \cdot \vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ce qui signifie que la combinaison linéaire trouvée implique deux réels (ici 0 et 2) dont un au moins n'est pas nul.
- ▶ Si $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ est une famille liée, alors l'un au moins des vecteurs $\vec{v}_i$ s'écrit comme une combinaison linéaire des autres : par exemple $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forme une famille liée (car $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$) et donc $\vec{v}_1 = -2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$

2.1.5. - Famille libre

Définition 30 (Famille libre).

Une famille de m vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ de $\mathbb{R}^n$ est **libre** si elle n'est pas liée, c'est-à-dire que les **seuls** réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tels que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$ sont nécessairement $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

$$\{\vec{v}_i\}_{i=1..m} \text{ libre} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0} \Rightarrow \forall i \in [1, m], \lambda_i = 0 \right)$$

Théorème 31 (Taille d'une famille libre).

Une famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ de $\mathbb{R}^n$ ne doit pas contenir trop de vecteurs pour rester libre. Précisément, on doit avoir $m \leq n$, sinon $\mathcal{F}$ est nécessairement liée.

2.1.5. - Famille libre et matrice

Famille libre avec la notation matricielle

Soit F la matrice associée à la famille $\mathcal{F}$ des m vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$. Alors la famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si l'équation matricielle

$$F \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{n \times 1} \text{ admet pour unique solution } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{0}_{m \times 1}.$$

Remarque : $\mathbf{0}_{m \times 1}$ est toujours solution. La famille est libre lorsque c'est la **seule solution**. Lorsque la dimension des vecteurs est la même que le nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$ (autrement dit lorsque F est carrée), il suffit de déterminer si la matrice F est inversible (donc de déterminant non nul) pour conclure que la famille est libre : en effet, si F est inversible, alors l'équation matricielle a une unique solution, qui est donc $\mathbf{0}_{m \times 1}$.

2.1.5. - Exemple

Exemple 32 (Une famille libre de $\mathbb{R}^3$).

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ formée par $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

☰ Soit λ_1, λ_2 tel que $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

🔍 Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

🔗 La matrice associée à la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; l'équation

$F \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne un système sur-déterminé de 3 équations à 2

inconnues : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$. La dernière équation donne $\lambda_2 = 0$ puis les

deux premières concluent que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (CQFD). La famille est donc libre.



Remarque : Si une famille contient le vecteur nul, elle ne peut pas être libre. Elle est forcément liée.

2.1.5. - Exercices types

➡ EXERCICE 10. *Exercice type* : Soient $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille formée par les vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ou liée?



2.2.1. - Bases et dimension

Définition 33 (Base).

Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une **base** de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle est à la fois :

1. une famille **libre** (autrement dit "la combinaison linéaire des $\vec{b}_i$ égale à $\vec{0}$ impose des réels nuls")
2. une famille **génératrice** de $\mathbb{R}^n$ (autrement dit "tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $\vec{b}_i$ ")

$$(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) \text{ base} \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \exists ! (\lambda_i)_{i=1..n} / \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$$

Définition 34 (Dimension).

Il existe une infinité de bases d'un même espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ mais toutes ont le même nombre de vecteurs ; ce nombre, noté $\dim(\mathbb{R}^n)$, est la **dimension** de l'espace vectoriel. Dans le cas de $\mathbb{R}^n$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 35 (Des dimensions).

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2, \dim(\mathbb{R}^3) = 3, \dots$$

2.2.1. - Lien avec la taille des familles de vecteurs

Soit $\mathcal{F}$ une famille de m vecteurs $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ de $\mathbb{R}^n$. Alors :

- ▶ si $m > n$: la famille contient trop de vecteurs pour être libre (elle est donc liée) mais assez pour être éventuellement (mais pas nécessairement) génératrice ;
- ▶ si $m < n$: la famille ne contient pas assez de vecteurs pour être génératrice (elle ne peut donc générer $\mathbb{R}^n$) mais suffisamment peu pour être éventuellement (mais pas nécessairement) libre ;
- ▶ si $m = n$: la famille est libre et génératrice (c'est alors équivalent) si et seulement si son déterminant est non nu.

2.2.2. - Décomposition d'un vecteur sur une base

Théorème 36 (Propriété fondamentale d'une base).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$. Les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ont chacun une **unique** valeur; ce sont les **coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ (plus précisément λ_i est la coordonnée de $\vec{v}$ sur $\vec{b}_i$).

La représentation matricielle de $\vec{v}$ est alors $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Remarque : le vecteur de coordonnées de $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ est dépendant de la base $\mathcal{B}$ choisie.

2.2.2. - Unicité de la décomposition

Théorème 37 (Unicité de la décomposition sur une base).

Deux vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_B$ donnés par leur coordonnées dans une **même** base B sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sur chacun des vecteurs de base sont égales.

$$\forall \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B, \forall \vec{u} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_B, \vec{v} = \vec{u} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \dots \\ \lambda_n = \mu_n \end{cases}$$

Théorème 38 (Égalité avec le zéro vectoriel).

Soit un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_B$. Alors $\vec{v} = \vec{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

2.2.3. - Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définition 39 (Base canonique de $\mathbb{R}^n$).

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille de vecteurs $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ avec :

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{b}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est la généralisation de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}^n$.

2.2.4. - Montrer qu'une famille est une base

Théorème 40 (Base et dimension).

La famille $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre et contient autant de vecteurs que la dimension de l'espace (autrement dit $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^n)$).

Démonstration.

☰ Soit une famille de vecteurs $\mathcal{B}$.

🔍 Considérons la matrice B associée à la famille $\mathcal{B}$ (matrice dont les colonnes sont les coordonnées des $\vec{b}_i$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) :

- si $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(\mathbb{R}^n)$ (même nombre de vecteurs que de coordonnées par vecteurs) alors B est une matrice carrée
- dans ce cas, si la matrice B est inversible (de déterminant non nul), alors la famille $\mathcal{B}$ est libre et est génératrice (cf. transparents sur l'interprétation des familles avec la notation matricielle).

☀ si la famille est libre et génératrice, c'est une base.



2.2.5. - Exercices types

➡ EXERCICE 11. *Exercice type* : Montrer que $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Puis donner les coordonnées de $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans cette même base?



➡ EXERCICE 12. *Exercice type* : Montrer que les vecteurs $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Donner les

coordonnées de $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans cette base.



2.2.5. - Exercices

➔ EXERCICE 13. *Base 3D* : Les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?



2.3.1. - Changements de base

Principe du changement de base

Soient $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \dots, \vec{b}'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de dimension n . Soit $\vec{v}$ un vecteur de

coordonnées $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans la base $\mathcal{B}$. Le changement de base consiste

à déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Remarque : Dans ce contexte, $\mathcal{B}$ est souvent appelé *ancienne base* et $\mathcal{B}'$ *nouvelle base*.

2.3.2. - Matrice de changement de base

Définition 41 (Matrice de changement de base).

Soient $\vec{b}'_i$ les n vecteurs d'une base $\mathcal{B}'$ ayant chacun pour

coordonnées $\vec{b}'_i = \begin{pmatrix} b'_{1,i} \\ b'_{2,i} \\ \vdots \\ b'_{n,i} \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$. On appelle

matrice de changement de base, de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ la matrice $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ inversible de taille $n \times n$ définie par :

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \begin{matrix} & \vec{b}'_1 & \vec{b}'_2 & & \vec{b}'_n \\ \begin{matrix} \vec{b}_1 \\ \vec{b}_2 \\ \vdots \\ \vec{b}_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} & \dots & b'_{1,n} \\ b'_{2,1} & b'_{2,2} & \dots & b'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b'_{n,1} & b'_{n,2} & \dots & b'_{n,n} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2.3.2. - Changement de base

Théorème 42 (Propriété de la matrice de changement de base).

Connaissant la matrice de changement de base $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ de $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$, alors la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est $P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ et vaut : $P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'})^{-1}$.

2.3.3. - Coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base

Propriété 43 (Changement de base).

Soit $\vec{v}$ défini par ses coordonnées $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$ et $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ dans une base $\mathcal{B}'$. Ses coordonnées sont liées par la relation :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \iff \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ avec } P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'})^{-1}$$

où $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ et $P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

2.3.3. - Illustration du produit matriciel

Remarque :

The diagram illustrates the matrix product for the change of basis from $\mathcal{B}$ to $\mathcal{B}'$. On the left, a column vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ is associated with the basis $\mathcal{B}$. This vector is equal to the product of a matrix and another column vector. The matrix is formed by the vectors $\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \dots, \vec{b}'_m$ of the basis $\mathcal{B}'$ as columns. The entries of this matrix are $b'_{i,j}$, where i is the row index and j is the column index. The column vector on the right is $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, associated with the basis $\mathcal{B}'$. Red dotted arrows indicate the dot product between the rows of the matrix and the column vector. Specifically, the first row $(b'_{1,1}, b'_{1,2}, \dots, b'_{1,n})$ is dotted with x'_1 , the second row $(b'_{2,1}, b'_{2,2}, \dots, b'_{2,n})$ is dotted with x'_2 , and so on, up to the m -th row $(b'_{m,1}, b'_{m,2}, \dots, b'_{m,n})$ dotted with x'_m . The remaining rows of the matrix are represented by vertical ellipses.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \vec{b}'_1 \\ \vec{b}'_2 \\ \vdots \\ \vec{b}'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{1,1} & b'_{1,2} & \dots & b'_{1,n} \\ b'_{2,1} & b'_{2,2} & \dots & b'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b'_{n,1} & b'_{n,2} & \dots & b'_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

2.3.4. - Exercices

➔ EXERCICE 14. *Et de un ...* : Considérons deux bases $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ liées par : $\vec{b}_1 = 4\vec{c}_1 + \vec{c}_2$ et $\vec{b}_2 = -6\vec{c}_1 + \vec{c}_2$.

- ① Soit $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$ dans $\mathcal{C}$. Donner les coordonnées de $\vec{y}$ dans la base $\mathcal{B}$.
- ② Soit $\vec{x} = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Donner les coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{C}$.



➔ EXERCICE 15. *Et de deux ...* :

Soient $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Les familles $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$

et $\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ forment deux bases de $\mathbb{R}^2$. Établissez la matrice de changement de base de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ puis la matrice de changement de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

Donner les coordonnées de $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$ puis dans $\mathcal{C}$.



2.3.4. - Exercices

➡ EXERCICE 16. *Et de trois!* :

Soient $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ et $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ deux bases de $\mathbb{R}^3$ avec

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = 4\vec{b}_1 - \vec{b}_2 \\ \vec{a}_2 = -\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 \\ \vec{a}_3 = \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3 \end{cases}$$

- ① Déterminer la matrice de changement de base de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}$.
- ② Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 + \vec{a}_3$ dans la base $\mathcal{B}$.



2.4.1. - Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Définition 44 (Produit scalaire canonique).

Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

définis par leur coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ se note $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ et se calcule avec :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \vec{u}^T \vec{v}$$

où T désigne l'opération de transposition matricielle.

Propriété 45 (Propriétés du produit scalaire).

Le produit scalaire est une forme bilinéaire définie positive symétrique :

2.4.1. - Norme dans $\mathbb{R}^n$

Définition 46 (Norme).

La **norme** d'un vecteur $\vec{v}$, mesurant sa longueur L_v (la **distance** entre ses deux extrémités), se définit à partir du produit scalaire par :

$$L_v = \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}.$$

Propriété 47 (Propriétés de la norme).

On déduit des propriétés du produit scalaire que :

1. $\|\vec{u}\| \in \mathbb{R}_+$;
2. $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$;
3. $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ (avec $\lambda \in \mathbb{R}$);
4. $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire).

2.4.1. - Norme canonique dans $\mathbb{R}^n$

Théorème 48 (Norme associée au produit scalaire canonique).

Pour un vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ défini par ses coordonnées dans la base

canonique de $\mathbb{R}^n$, la norme de $\vec{v}$ en utilisant le produit scalaire canonique se calcule avec :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\vec{v}^T \vec{v}}$$

2.4.1. - Norme canonique dans $\mathbb{R}^n$

Comment normer un vecteur ?

De tout vecteur $\vec{v}$ non nul peut être déduit un **vecteur unitaire** $\vec{u}$ de même direction que $\vec{v}$ et de longueur 1 : il suffit de prendre $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$.

Définition 49 (Espace vectoriel euclidien).

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit **scalaire** canonique et de sa **norme** associé est un **espace vectoriel euclidien**.

2.4.1. - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 50 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Alors :

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$$

On en déduit que $-1 \leq \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \leq 1$. On peut ainsi écrire

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = L_u L_v \cos(\theta_{u,v})$ avec :

- ▶ $L_u = \|\vec{u}\|$ la longueur du vecteur $\vec{u}$;
- ▶ $L_v = \|\vec{v}\|$ la longueur du vecteur $\vec{v}$;
- ▶ $\theta_{u,v}$ l'angle formé par les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et défini par son cosinus :

$$\cos(\theta_{u,v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Remarque : En 2D, $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle = \overline{AH} \cdot \overline{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos(\theta)$.



2.4.1. - Orthogonalité et colinéarité de deux vecteurs

Définition 51 (Orthogonalité).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\theta_{u,v} = \frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Définition 52 (Colinéarité).

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu'ils sont proportionnels. C'est-à-dire que $\theta_{u,v} = 0$ ou $\theta_{u,v} = \pi$, soit, avec le produit scalaire : $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ (l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient alors une égalité).

2.4.1. - Exercice type

➔ EXERCICE 17. *Exercice type* : On considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer à l'aide du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$,
 $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$



➔ EXERCICE 18. *Exercice type* : On considère les vecteurs : $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Calculer, à l'aide du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, $\langle \vec{w}, \vec{u} \rangle$,

2. $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\|\vec{w}\|$,

" " " " " "

2.4.2. - Base orthonormale dans $\mathbb{R}^2$

Définition 53 (Base orthonormale (orthonormée) de $\mathbb{R}^2$).

Une base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est dite :

- ▶ **orthogonale** si ses 2 vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire si $\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle = 0$;
- ▶ **normée** si ses 2 vecteurs sont de normes 1, c'est-à-dire si $\|\vec{b}_1\| = \|\vec{b}_2\| = 1$;
- ▶ **orthonormale** si elle est orthogonale et normée.

Théorème 54 (Coordonnées dans une base orthonormale).

Dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ de $\mathbb{R}^2$, tout vecteur

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ a pour coordonnées $v_1 = \langle \vec{v}, \vec{b}_1 \rangle$ et $v_2 = \langle \vec{v}, \vec{b}_2 \rangle$. Il peut donc s'écrire de manière unique : $\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 + \langle \vec{v}, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2$.

2.4.3. - Base orthogonale dans $\mathbb{R}^n$

Définition 55 (Base orthogonale).

Une base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est **orthogonale** si et seulement si tous ses vecteurs sont orthogonaux 2 à 2, c'est-à-dire pour tout indice i et j avec $i \neq j$, on a $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0$.

Exemple 56 (Une base orthogonale).

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthogonale car $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = 0$, $\langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = 0$ et $\langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0$.

Exemple 57 (Une base non orthogonale).

La base $\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{v}, \vec{k})$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonale car $\langle \vec{i}, \vec{v} \rangle = 1 \neq 0$.

2.4.3. - Base normée

Définition 58 (Base normée).

Une base $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est **normée** si et seulement si tous les vecteurs de la base sont unitaires (de longueur 1), c'est-à-dire pour tout indice i , $\|\vec{b}_i\| = 1$.

Exemple 59 (Une base normée).

La base canonique de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est normée car $\|\vec{b}_1\| = \|\vec{b}_2\| = \|\vec{b}_3\| = 1$.

Exemple 60 (Une base non normée).

La base $\mathcal{B}' = (\vec{i}, \vec{v}, \vec{k})$ avec $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas normée car

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2.4.3. - Base orthonormale

Définition 61 (Base orthonormale (ou orthonormée)).

Une base est orthonormée si et seulement si elle est à la fois orthogonale et normée

Théorème 62 (Base orthonormale).

Soit B la matrice associée à une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormale si et seulement si la matrice B est orthonormale.

Définition 63 (Matrice orthonormale).

Une matrice B est orthonormale si et seulement si B est inversible et $B^{-1} = B^T$ où T désigne l'opérateur de transposition.
Dans ce cas, $B^T B = B B^T = I_n$.

Remarque : La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée.

2.4.4. - Exercices sur les BO

➔ EXERCICE 19. : On munit l'espace $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique et

on considère le sous-espace $\mathbb{F}$ de $\mathbb{R}^4$ des vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$ satisfaisant les

équations : $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 \\ v_1 - v_2 + v_3 - v_4 = 0 \end{cases}$. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{F}$.



2.4.5. - Décomposition d'un vecteur sur une base orthonormée

Théorème 64 (Coordonnées dans une base orthonormale).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$ une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$.

Tout vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ de $\mathbb{R}^n$ a pour coordonnées : $v_1 = \langle \vec{v}, \vec{b}_1 \rangle$,

$v_2 = \langle \vec{v}, \vec{b}_2 \rangle, \dots, v_n = \langle \vec{v}, \vec{b}_n \rangle$.

Il s'écrit donc :

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{b}_1 \rangle \vec{b}_1 + \langle \vec{v}, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{b}_n \rangle \vec{b}_n = \sum_{i=1}^n \langle \vec{v}, \vec{b}_i \rangle \vec{b}_i.$$

2.4.5. - Exercice type

➡ EXERCICE 20. : On considère les deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ forme une base orthogonale mais non normée de $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $\vec{b}'_1 = \frac{\vec{b}_1}{\|\vec{b}_1\|}$ et $\vec{b}'_2 = \frac{\vec{b}_2}{\|\vec{b}_2\|}$. Donner $\vec{b}'_1$ et $\vec{b}'_2$.
3. Donner la décomposition de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ sur la base $\mathcal{B}' = (\vec{b}'_1, \vec{b}'_2)$ puis sur la base $\mathcal{B}$.



3. - Plan

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Bases de $\mathbb{R}^n$

Applications linéaires

- Applications linéaires

- Applications linéaires particulières

- Rang d'une application linéaire

- Injection, surjection et bijection

- Composition d'applications linéaires

- Application réciproque d'un automorphisme

- Application linéaire et changement de base

- Exercices

Réduction d'endomorphisme

Espaces vectoriels : cas général

3.1.1. - Application

Définition 65 (Application).

Une **application** f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^m$ est une relation qui associe un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ à un vecteur-image noté $f(\vec{u})$ de $\mathbb{R}^m$. On la note : $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ \vec{u} & \longmapsto & f(\vec{u}) \end{cases}$

Exemple 66 (Une application).

L'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et qui à $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ associe $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ est

une application. Par exemple, si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

3.1.1. - Exercice type

➡ EXERCICE 21. : Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^4$ et qui à $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$$\text{associe } f(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_1^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les images de $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de $\vec{0}$?



3.1.2. - Application linéaire

Définition 67 (Application linéaire).

Une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est **linéaire** si et seulement si pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel λ, μ , on a :

$$f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}).$$

Remarque : l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

3.1.2. - Exemple

Exemple 68 (Une application linéaire).

L'application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui à $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ est linéaire. C'est d'ailleurs un projecteur sur le plan de cote 0.

Démonstration.

☰ pour deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et deux réels λ et μ

quelconques,

❓ montrons que $f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$

Q On a :

$$\begin{aligned} - f(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \text{ donc } \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix} \\ - \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \vec{z} \text{ donc } f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = f(\vec{z}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 + \mu v_1 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

☀ Donc par égalité des coordonnées, $\lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v}) = f(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})$ (CQFD).



3.1.2. - Exercice

➡ EXERCICE 22. *Exercice-type* : Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

▶ l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ z \end{pmatrix}$

▶ l'application $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ associant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z$

▶ l'application $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix}$



3.1.3. - Caractérisation d'une application linéaire

Propriété 69 (Caractériser une application linéaire).

Soit $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est entièrement déterminée par la donnée de la famille $(f(\vec{b}_1), \dots, f(\vec{b}_n))$.

Propriété 70 (Image d'un vecteur par une application linéaire).

Un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sur une base $\mathcal{B}$ s'écrit $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{b}_i$. Ainsi $\vec{u}$ a

pour image (par linéarité de f) le vecteur $f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n u_i f(\vec{b}_i)$ donc est une combinaison linéaire des vecteurs-images de la base $\mathcal{B}$ par f .

3.1.4. - Matrice caractéristique

Définition 71 (Matrice d'une application linéaire).

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ et

$\mathcal{C} = (\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m)$ une base de $\mathbb{R}^m$. Notons $\begin{pmatrix} f_{1,j} \\ \vdots \\ f_{m,j} \end{pmatrix}$ les coordonnées de

$f(\vec{b}_j)$ dans la base $\mathcal{C}$. Alors la matrice caractéristique de l'application linéaire f de la base $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$, et noté $F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ est :

$$F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{matrix} & f(\vec{b}_1) & f(\vec{b}_2) & & f(\vec{b}_m) \\ \begin{matrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vdots \\ \vec{c}_n \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} f_{1,1} & f_{1,2} & \dots & f_{1,m} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \dots & f_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \dots & f_{n,m} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Remarque : On note $f \sim F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ en omettant les bases lorsqu'il n'y a

3.1.5. - Application

Théorème 72 (Image d'un vecteur $\vec{u}$ par f).

Soit f une application linéaire de matrice caractéristique $F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ dans

deux bases $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ et $\mathcal{C}$. Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ a pour

vecteur-image le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$ qui se calcule avec

$$\vec{v} = f(\vec{u}) = \sum_{i=1}^n u_i f(\vec{b}_i) \text{ ou avec } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \text{ (en étant vigilant$$

sur les bases dans lesquelles s'interprètent les coordonnées).

3.1.6. - Exemple 1

Exemple 73 ($f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$).

- Base canonique $\mathcal{B}$ de l'espace de départ et d'arrivée $(\mathbb{R}^2) = (\vec{i}, \vec{j})$
- f est caractérisée par les images des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}$ avec :
 $f(\vec{i}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{j}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Matrice caractéristique de f de $\mathcal{B}$ (départ) dans $\mathcal{B}$ (arrivée) :

$$F = \begin{pmatrix} f(\vec{i}) & f(\vec{j}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

- Image de $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$: est $f(\vec{u}) = F_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}} \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

3.1.6. - Exemple 2

Exemple 74 ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ x+y \end{pmatrix}$).

- Base de départ (canonique) $\mathcal{B} : \vec{i}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et base d'arrivée $\mathcal{C} :$

$$\vec{i}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Images des vecteurs de base : $f(\vec{i}_2) = 2\vec{j}_3 + \vec{k}_3$ et $f(\vec{j}_2) = 3\vec{i}_3 + \vec{j}_3$.
 ► Matrice caractéristique de f :

$$F = \begin{pmatrix} f(\vec{i}_2) & f(\vec{j}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{i}_3 \\ \vec{j}_3 \\ \vec{k}_3 \end{matrix}$$

3.1.7. - Exercice type

➔ EXERCICE 23. Représentation matricielle :

Donner la matrice associée à chaque application linéaire suivante dans les bases canoniques des espaces vectoriels considérés.

① $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ 2y \end{pmatrix}$

② $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ 3y - z \\ x + z \end{pmatrix}$

③ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$

④ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x - y - z \\ 2x - z \\ 3y - 2z \end{pmatrix}$

⑤ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x - y \end{pmatrix}$



3.2.1. - Bijection

Définition 75 (Bijection).

Une application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est bijective lorsque pour tout vecteur $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^m$, il existe un **unique** vecteur antécédent $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$, ou autrement dit, tel que $\vec{v} = F\vec{u}$ avec F la matrice caractéristique associée à f .

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^m, \exists ! \vec{u} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{u}) = \vec{v}$$

Remarque : si $n = m$, pour que f soit bijective, il faut et il suffit que $F_{B \rightarrow C}$ soit inversible.

➡ EXERCICE 24. : L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ y - z \\ x + z \end{pmatrix}$

est-elle bijective ?



3.2.2. - Applications linéaires particulières

Définition 76 (Applications linéaires particulières).

Parmi les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on distingue :

- ▶ les **endomorphismes** : ce sont les applications linéaires pour lesquelles l'espace de départ est que l'espace d'arrivée ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$). L'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$;
- ▶ les **isomorphismes** : ce sont les applications linéaires **bijectives** ;
- ▶ les **automorphismes** : ce sont les endomorphismes bijectifs. L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$;
- ▶ les **formes linéaires** : ce sont les applications linéaires dont l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^m = \mathbb{R}$).

3.2.2. - Exemples d'applications particulières

Exemple 77 (L'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$).

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ car c'est une application linéaire et l'espace de départ $\mathbb{R}^2$ est le même que l'espace d'arrivée, mais n'est pas bijective car le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a plusieurs antécédents par f (par exemple $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$).

Exemple 78 (L'automorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$).

- ▶ c'est une application linéaire;
- ▶ l'espace de départ $\mathbb{R}^2$ est le même que l'espace d'arrivée, donc f est un endomorphisme;
- ▶ f est bijective car sa matrice caractéristique dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vaut $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et est inversible car de déterminant non nul (ici valant 2).

Exemple 79 (La forme linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x$).

Son espace d'arrivée est $\mathbb{R}$.

3.2.3. - Exercices types

➔ EXERCICE 25. *Nature d'applications* : Donner la nature des applications suivantes :

① $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+z \end{pmatrix}$

② $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \end{pmatrix}$

③ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x+y$

④ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+z \\ x+y+z \end{pmatrix}$



3.3.1. - Image

Définition 80 (Image d'une application linéaire).

On appelle **image** d'une application linéaire $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'ensemble noté $\text{Im}(f)$ constitué des vecteurs-image $f(\vec{u})$ obtenu en parcourant tous les vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$: $\text{Im}(f) = \{f(\vec{u}) \in \mathbb{R}^m / \vec{u} \in \mathbb{R}^n\}$.

$\text{Im}(f)$ est une partie de $\mathbb{R}^m$ mais n'est pas nécessairement égal à $\mathbb{R}^m$ ce qui signifie qu'il peut exister un $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^m$ n'ayant aucun antécédent $\vec{u}$ par f (c'est à dire vérifiant $f(\vec{u}) = \vec{v}$).

Propriété 81 (Image d'une application linéaire).

$\text{Im}(f)$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Exemple 82 (Une image).

L'application $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour image tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ ayant une ordonnée nulle.

3.3.2. - Noyau d'une application linéaire

Définition 83 (Noyau d'une application linéaire).

On appelle **noyau** d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, noté $\text{Ker}(f)$ (pour *kernel*), l'ensemble de vecteurs $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f est le zéro vectoriel de $\mathbb{R}^m$: $\text{Ker}(f) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{u}) = \vec{0}\}$.

$\text{Ker}(f)$ est une partie de $\mathbb{R}^n$ contenant au moins le zéro vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 84 (Noyau d'une application linéaire).

$\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 85 (Un noyau).

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y$ a pour noyau les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $f(\vec{u}) = 0$. Or $f(\vec{u}) = x - y$ donc il faut que $x - y = 0$ c'est à dire $y = x$. Donc $\text{Ker}(f) = \{\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}\}$.

3.3.2. - Exercice

➔ EXERCICE 26. Noyau :

Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes.

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-z \\ x+y \end{pmatrix}$

3. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ y-z \end{pmatrix}$.

4. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x-7y \\ x+y \end{pmatrix}$.



3.3.3. - Rang d'une application linéaire

Définition 86 (Rang d'une application linéaire).

On appelle rang d'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la dimension de son espace-image : on le note $\text{rg}(f)$. Ainsi : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$.

Théorème 87 (Théorème du rang).

Pour une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = n$$

3.4.1. - In/sur/bi-jection

Définition 88 (Injection, Surjection, Bijection).

Une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est :

- ▶ **injective** lorsque il n'existe pas de vecteur-image $\vec{v}$ ayant deux antécédents différents par f , autrement dit lorsque : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$, on a nécessairement $\vec{u} = \vec{v}$. On dit alors que f est une injection.

Mathématiquement : f injective $\Leftrightarrow \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, (f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v})$

- ▶ **surjective** lorsque tout vecteur de l'espace d'arrivée possède (au moins) un antécédent par la fonction f , autrement dit lorsque $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^m$. On dit alors que f est une surjection.

f surjective $\Leftrightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^m, \exists \vec{u} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{u}) = \vec{v}$

- ▶ est **bijective** si et seulement si f est à la fois injective et surjective.

f bijective $\Leftrightarrow \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^m, \exists ! \vec{u} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{u}) = \vec{v}$

3.4.2. - In/sur/bi-jection avec le théorème du rang

Propriété 89 (Dimension, rang).

Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est

- ▶ surjective ssi $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ ssi $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^m) = m$;
- ▶ injective ssi $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$ ssi $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$;
- ▶ bijective ssi $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^m) = \dim(\mathbb{R}^n) = m = n$.

Théorème 90 (In/sur/bi-jection).

Soit un endomorphisme $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (même espace de départ que d'arrivée). Alors :

f est bijective ssi f est injective ssi f est surjective.

3.4.3. - Exercices

➡ EXERCICE 27. *Image et noyau* : Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminer l'espace image et le noyau, donner une base de l'espace image et du noyau, déduire le rang de l'application et indiquer si elle est injective, bijective ou surjective :

① $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

② $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$

③ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y-z \\ 2x+2y \end{pmatrix}$

④ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x-7y \\ x+y \end{pmatrix}$



3.4.3. - Exercices

➡ EXERCICE 28. *Application à paramètre* : Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. Soit t un paramètre réel. On considère l'application linéaire f définie par : $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $f(\vec{e}_2) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ et $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 + t\vec{e}_3$.

1. Écrire la transformée du vecteur $\vec{v} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ par f .
2. Comment choisir t pour que f soit injective ? surjective ? bijective ?



3.5. - Composée d'applications linéaires

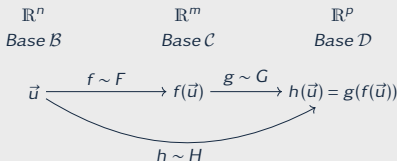
Propriété 91 (Composition de deux applications linéaires).

Soient trois espaces vectoriels : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \text{ muni d'une base } \mathcal{B} \\ \mathbb{R}^m \text{ muni d'une base } \mathcal{C} \\ \mathbb{R}^p \text{ muni d'une base } \mathcal{D} \end{array} \right.$

Soient deux applications linéaires :

$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ de matrice caractéristique } F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} \\ g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p \text{ de matrice caractéristique } G_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} \end{array} \right.$

Alors l'application $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ associe $h(\vec{u}) = g(f(\vec{u}))$ dans $\mathbb{R}^p$ est appelée **application composée de f par g** et a pour matrice caractéristique $H_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}} = G_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}} F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$.



3.6. - Application réciproque

Propriété 92 (Application réciproque d'un automorphisme).

Soit f un automorphisme (application linéaire bijective), de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et de matrice caractéristique F . Alors, il existe une application linéaire g , unique, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, tel que pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $\vec{v} = f(\vec{u})$, on ait $\vec{u} = g(\vec{v})$.

g est appelée **application réciproque** de f , se note f^{-1} et a pour matrice caractéristique F^{-1} .

Remarques :

- ▶ L'application réciproque de f^{-1} est $(f^{-1})^{-1} = f$
- ▶ $f^{-1}(f(\vec{u})) = \vec{u}$ et $f(f^{-1}(\vec{v})) = \vec{v}$
- ▶ Soit $g \sim G$ et $f \sim F$, alors g est l'application réciproque de f si et seulement si $G = F^{-1}$

3.7. - Application et changement de base

Théorème 93 (Matrices équivalentes).

On considère $\mathbb{R}^n$ muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et $\mathbb{R}^m$ muni des bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Soient :

- ▶ une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de matrice $F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ (de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$);
- ▶ $P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$
- ▶ $P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}}$ la matrice de changement de base de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.

Alors la matrice caractéristique de f de la base $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{C}'$ est :

$$F'_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}} F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} (P_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}})^{-1}$$

3.8. - Exercice

➡ EXERCICE 29. : Soient $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y+3z \end{pmatrix}$ et

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x+y \\ x+2y \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice de f et de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$;
2. Déterminer la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$;
3. Déterminer la matrice de $g \circ f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$;
4. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Calculer $f \circ g(\vec{u})$ et $g \circ f(\vec{v})$.
5. Les applications linéaires $f \circ g$ et $g \circ f$ sont-elles inversibles ? Déterminer les applications réciproques si elles existent.
6. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(g)$



3.8. - Exo 1

➡ EXERCICE 30. *Matrices d'une application linéaire (Bibmath.net)* : Soit f

l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$, qui au vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ associe le vecteur $\begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \\ -x + z \\ -y + z \end{pmatrix}$,

$\mathcal{B}_3 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer que f est linéaire
2. Donner la matrice A associée à f sur les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}_4$.
3. Calculer $f(\vec{u}_1)$ et $f(\vec{u}_2)$.
4. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2))$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Donner la matrice B associée à f sur les bases $\mathcal{B}_3$ et $\mathcal{B}$.
6. Donner la matrice de changement de base P de $\mathcal{B}_4$ à $\mathcal{B}$. Quelle relation lie A , B et P . Vérifiez vos calculs.



4. - Plan

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Bases de $\mathbb{R}^n$

Applications linéaires

Réduction d'endomorphisme

- Introduction

- Valeurs et vecteurs propres d'une application linéaire

- Valeurs et vecteurs propres d'une matrice

- Spectre d'une application ou d'une matrice

- Polynôme caractéristique d'une matrice

- Diagonalisation d'une application linéaire

- Applications de la diagonalisation

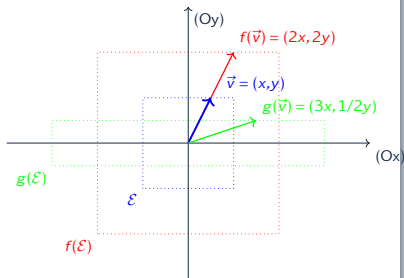
Espaces vectoriels : cas général

4.1. - Introduction

Parmi les endomorphismes $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, certains ont la caractéristique de transformer certains vecteurs $\vec{v} \sim (v_i)_B$ seulement en modifiant leur longueur (et non leur direction).

Exemple 94 (Des exemples dans la base canonique).

- ▶ Dans $\mathbb{R}^2$, $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ sert à transformer un carré en un carré dont le côté est 2 fois plus grand.
- ▶ Dans $\mathbb{R}^2$, $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}$ peut transformer un carré en un rectangle.



Trouver ces vecteurs (les vecteurs propres) et le gain en longueur (les valeurs propres) est l'un des objectifs de la réduction.

4.2. - Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 95 (Valeur propre d'un endomorphisme et d'une matrice).

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice caractéristique F . On appelle **valeur propre** de f tout réel λ vérifiant la propriété suivante : il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

En fait, pour une valeur λ , il existe une infinité de vecteur $\vec{u}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.

Définition 96 (Sous-espace propre et vecteurs propres).

Si λ est une valeur propre de f , on appelle **sous-espace propre de f** associé à la valeur propre λ l'ensemble $\mathbb{E}_\lambda = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n / f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}$. Il forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ (donc stable par combinaison linéaire).

4.2. - Exemple

Exemple 97 (Un exemple de valeurs propres).

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$, l'endomorphisme $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$ a pour valeur propre 2 (car $f(\vec{i}) = 2\vec{i}$ donc $\vec{i}$ est l'un des vecteurs propres possibles associés à 2) et pour valeur propre 3 (car $f(\vec{j}) = 3\vec{j}$ donc $\vec{j}$ est l'un des vecteurs propres possibles associés à 3).

➔ EXERCICE 31. : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, montrer que l'endomorphisme f qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$ a pour valeur propre 1 et déterminer les vecteurs propres associés à 1.



➔ EXERCICE 32. : Soit l'endomorphisme f vérifiant $f^2 + 3f + 4\text{id} = 0$ (où id désigne l'application identité qui associe $\vec{u} \mapsto \vec{u}$). Montrer que f n'admet pas de valeur propre.



4.3. - Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

Pour un endomorphisme de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de matrice caractéristique F , résoudre $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ revient à résoudre $F\vec{u} = \lambda \vec{u}$,

Définition 98 (Valeur propre d'une matrice).

On appelle valeur propre de la matrice F tout réel λ tel qu'il existe un vecteur colonne $U_{n \times 1}$ (le vecteur $\vec{u}$) non nul vérifiant $FU = \lambda U$.

Définition 99 (Vecteurs propres d'une matrice).

Si λ est une valeur propre de $f \sim F$, on appelle **sous-espace propre de F associé à la valeur propre λ** l'ensemble des vecteurs colonnes $U_{n \times 1}$ tels que $FU = \lambda U$. Cette équation admet une infinité de solutions.

4.4. - Spectre

Définition 100 (Spectre d'une application (d'une matrice)).

Le **spectre** d'un endomorphisme $f \sim F$ est l'ensemble des valeurs propres de f (et donc de F).

Sous l'angle vectoriel, résoudre $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ revient à résoudre $f(\vec{u}) - \lambda \vec{u} = \vec{0}$, donc à chercher le noyau de l'application $\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) - \lambda \vec{u}$. Ainsi :

Propriété 101 (Sous-espace vectoriel propre).

Le sous-espace (vectoriel) propre d'un endomorphisme f associé à la valeur propre λ est : $\mathbb{E}_\lambda = \text{Ker}(f - \text{id})$, où id est l'application **identité** de $\mathbb{R}^n$ (celle qui associe $\vec{u} \mapsto \vec{u}$).

4.5. - Spectre et polynôme caractéristique

Sous l'angle matriciel, résoudre $FU = \lambda U$ revient à résoudre $FU - \lambda U = O_{n \times 1} \Leftrightarrow (F - \lambda I_n)U = O_{n \times 1}$ (après factorisation). Ce système doit avoir une infinité de solutions (pour former l'ensemble des valeurs propres) donc $\det(F - \lambda I_n)$ doit être nul.

Définition 102 (Polynôme caractéristique d'une matrice F).

On appelle polynôme caractéristique d'une matrice carrée F de taille n le polynôme P_F de la variable X définie par : $P_F(X) = \det(F - XI_n)$.

Théorème 103 (Spectre).

Le spectre de F est formé par les racines de son polynôme caractéristique $P_F(X)$, autrement dit $\{\lambda \in \mathbb{R} / P_F(\lambda) = 0\}$.

Rappel : factorisation d'un polynôme

Un polynôme $P(X)$ de degré n admet m racines (réelles ou complexes), λ_i d'ordre de multiplicité α_i (avec α_i entier ≥ 1) tel que

4.5. - Exercices

➔ EXERCICE 33. : Pour chacune des applications linéaires suivantes, donner la matrice caractéristique de l'application dans la base canonique, déterminer le polynôme caractéristique, puis le spectre, puis les sous-espaces vectoriels associés à chaque valeur propre.

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

2. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y+2z \\ x+y-z \\ x+2y+2z \end{pmatrix}$

3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y \\ x+2 \end{pmatrix}$

4. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+y \end{pmatrix}$

5. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2y+z \\ x+y-3z \\ x+y+2z \end{pmatrix}$



4.6.1. - Des valeurs propres à une matrice diagonale

Des valeurs propres à une matrice diagonale

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant n valeurs propres λ_i , et pour chacune un vecteur propre associé $\vec{u}_i$ (autrement dit $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$). Si la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (i.e. est libre), alors la matrice caractéristique de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale et vaut :

$$F_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.6.2. - Condition pour qu'une application linéaire soit diagonalisable

Définition 104 (Condition de diagonalisation).

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, de matrice caractéristique $F_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ dans deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ et de valeurs propres les n valeurs λ_i (valeurs éventuellement dupliquées en fonction de leur ordre de multiplicité).

S'il existe une base $\mathcal{D}$ dans laquelle la matrice caractéristique $F_{\mathcal{D}}$ de f est diagonale, on dit que l'application f (et donc que la matrice $F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$) est **diagonalisable**.

Dans ce cas, en notant :

- ▶ $P_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{B}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{D}$
- ▶ $Q_{\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{D}$

on a : $F_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = Q^{-1} F_{\mathcal{D}} P$ avec $F_{\mathcal{D}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

4.6.2. - Conditions pour la diagonalisation

Théorème 105 (Condition de diagonalisation).

Soit $f \sim F$ un endomorphisme et P_F le polynôme caractéristique de f . f (et F) est diagonalisable si et seulement si $P_F(X)$ est scindé (factorisable par n racines λ_i réelles) et si l'ordre de multiplicité de chaque racine λ_i est égal à la dimension du sous-espace propre $\mathbb{E}_{\lambda_i}$ de f associé à λ_i .

Théorème 106 (Corollaire).

Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples (toutes réelles et d'ordre de multiplicité 1), alors la matrice est diagonalisable.

4.6.3. - Diagonalisation avec racines simples

Théorème 107 (Diagonalisation).

Soit $f \sim F$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique $P_F(X)$ admet n racines simples λ_i (toutes différentes). Dans ce cas, f est nécessairement diagonalisable et chaque valeur propre λ_i a pour sous-espace propre $\mathbb{E}_{\lambda_i}$ un espace de dimension 1, généré par un vecteur (propre) $\vec{u}_i$.

Alors F peut s'écrire : $F = PDP^{-1}$ avec :

- ▶ $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres λ_i .
- ▶ P la matrice dont les colonnes sont les (coordonnées des) vecteurs propres $\vec{u}_i$ associés aux valeurs propres λ_i et placés dans le même ordre que les λ_i dans D .
- ▶ P^{-1} est l'inverse de P (calculable avec un pivot de Gauss par ex.).

4.6.3. - Exemple

Exemple 108 (Diagonaliser $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$).

- Polynôme carac. : $P_F(X) = \det(F - XI_n) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 2 & -X \end{vmatrix} = X^2 - X - 2$
- Spectre de F : -1 et 2 (racines simples donc F est diagonalisable).
- Un vecteur propre associé à -1 : un $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul tel que

$$FU = -1 \times U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -x \\ 2x = -y \end{cases} \Leftrightarrow 2x+y = 0. \text{ Donc } U_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ (cas où } y = 1 \text{) convient.}$$
- Un vecteur propre associé à 2 : un $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul tel que

$$FU = 2 \times U \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 2x \\ 2x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y \text{ donc } \vec{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ (cas où } y = 1 \text{) convient.}$$
- Diagonalisation : $F = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ (formule d'inversion d'une matrice } 2 \times 2 \text{).}$$

4.6.4. - Diagonalisation dans le cas général

Théorème 109 (Diagonalisabilité et diagonalisation).

Soit $f \sim F$ un endomorphisme diagonalisable dont le polynôme caractéristique $P_F(X)$ admet m racines λ_i , chacune d'ordre de multiplicité o_i .

Chaque valeur propre λ_i a pour sous-espace propre $\mathbb{E}_{\lambda_i}$ un espace de dimension d_i (avec $d_i = o_i$ car f est diagonalisable). On peut alors déterminer d_i vecteurs propres formant une base $(\vec{u}_{i,1}, \vec{u}_{i,2}, \dots, \vec{u}_{i,o_i})$ de $\mathbb{E}_{\lambda_i}$.

Alors F peut s'écrire : $F = PDP^{-1}$ avec :

- ▶ $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les valeurs propres λ_i dupliquées autant de fois que leur ordre de multiplicité.
- ▶ P la matrice dont les colonnes sont les (coordonnées des) vecteurs des bases des sous-espaces propres $(\vec{u}_{i,1}, \dots, \vec{u}_{i,o_i})$ associés à chaque valeur propre λ_i et placés dans le même ordre que les λ_i dans D .
- ▶ P^{-1} est l'inverse de P (calculable avec un pivot de Gauss par ex.).

4.6.4. - Exemple

Exemple 110 (Diagonaliser $F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$).

- Polynôme carac. : $P_F(X) = \det(F - XI_3) = (-1 - X)^2(3 - X)$ donc valeurs propres : $\lambda_1 = -1$ d'ordre $\alpha_1 = 2$ et $\lambda_2 = 2$ d'ordre $\alpha_2 = 1$.

- $\mathbb{E}_2$ (nécessairement de dimension 1) : $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $FU = 2U$

$\Leftrightarrow$ résolution ... $\Leftrightarrow x = 0$ et $y = z$. Donc $U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

- $\mathbb{E}_{-1}$ (de dimension ?) : U tel que $FU = -U \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = 0$

$\Leftrightarrow U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Une base de $\mathbb{E}_{-1}$ est $\vec{u}_{-1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_{-1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Diagonalisabilité : comme la dimension de $\mathbb{E}_{-1}$ (ici 2 car 2 vecteurs de base) vaut l'ordre de multiplicité de λ_1 la matrice est diagonalisable.

- Diagonalisation : $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4.6.5. - Exercice

➡ EXERCICE 34. : Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes, en précisant la matrice de passage et son inverse :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} & C &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} & E &= \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



4.7. - Applications de la diagonalisation

Propriété 111 (Puissance d'une matrice).

Si F est diagonalisable, $F = PDP^{-1}$, avec D diagonale. Donc, quelque soit n entier naturel, $F^n = PD^nP^{-1}$.

Définition 112 (Exponentielle d'une matrice).

On définit l'exponentielle d'une matrice carrée F de taille n comme étant la matrice $\exp(F) = I_n + F + \frac{F^2}{2} + \dots + \frac{F^m}{m!} + \dots$

Résolution de systèmes de suites récurrentes

$$U_{n+1} = FU_n$$

Résolution de systèmes d'équations différentielles

$$X'(t) = FX(t)$$

4.7. - Exercice

➡ EXERCICE 35. *Diagonalisation (Bibmath.net)* :

Soient f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui au vecteur (x, y, z) associe le vecteur $(3x - z, 2x + 4y + 2z, -x + 3z)$ et $\mathcal{B}_3$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice A associée à f sur la base $\mathcal{B}$.
3. Calculer le rang de f . En déduire que f est un automorphisme.
4. Diagonaliser A . On notera Q la matrice associée à la famille des vecteurs propres de A dans $\mathcal{B}_3$.
5. Calculer $f(f(f(\vec{i})))$ où $\vec{i}$ est le premier vecteur de $\mathcal{B}_3$. Généraliser pour $f^n(\vec{i})$ où f^n est f composée par elle-même n fois.



4.7. - Exercice

➔ EXERCICE 36. : Diagonaliser les matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire l'expression de B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.



➔ EXERCICE 37. : Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$



4.7. - Exercice

➔ EXERCICE 38. Résolution d'un système d'équations différentielles :

Résoudre le système :
$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) - 3x_2(t) + 3x_3(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \\ x_3(t) = 3x_1(t) + 3x_2(t) - x_3(t) \end{cases}$$

avec $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$. □

➔ EXERCICE 39. Résolution d'un système de suites récurrentes :

Résoudre le système :
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n - 3v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = 2v_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 3v_n - w_n \end{cases}$$

avec $u_0 = 1$, $v_0 = -2$, $w_0 = 1$. □

5. - Plan

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Bases de $\mathbb{R}^n$

Applications linéaires

Réduction d'endomorphisme

Espaces vectoriels : cas général

- Espaces vectoriels

- Espaces vectoriels classiques

- Espace vectoriel euclidien

5. - Espaces vectoriels

$\mathbb{R}^n$ n'est pas le seul espace vectoriel. Font partie des espaces vectoriels $\mathbb{E}$:

- ▶ les polynômes
- ▶ les fonctions trigonométriques
- ▶ les matrices
- ▶ ...

Tous les résultats vus précédemment se généralisent en remplaçant $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{E}$.

5.1. - Espaces vectoriels

Définition 113 (Espaces vectoriels $(\mathbb{E}, \mathbb{R}, +, \cdot)$).

L'ensemble de vecteurs $\mathbb{E}$ est un **espace vectoriel** lorsque :

- ▶ il est muni d'une addition $+$, qui, pour $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ quelconques :
 1. est **commutative** : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
 2. est **associative** : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
 3. possède un élément neutre noté $\vec{0}$ (appelé **zéro vectoriel**) : $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
 4. assure l'existence d'un **opposé** : il existe $\vec{t}$ tel que $\vec{t} + \vec{u} = \vec{0}$ (ce vecteur est noté $-\vec{u}$)
- ▶ il est muni d'une multiplication externe entre vecteurs et réels (appelés scalaires), qui, avec pour λ , μ quelconques :
 1. est telle que $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
 2. vérifie l'**associativité mixte** : $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u}$ avec $\cdot$ la multiplication dans $\mathbb{R}$
- ▶ l'addition et la multiplication sont distributives l'une sur l'autre :
 1. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ avec $+$ l'addition dans $\mathbb{R}$
 2. $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

5.1. - Espaces vectoriels

Attention à ne pas confondre

- ▶ Le vecteur nul $\vec{0}$ et le zéro réel 0 (scalaire).
- ▶ Les opérations (addition et multiplication) sur les vecteurs et sur les scalaires réels.

Quelques propriétés

Si $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, alors pour $\vec{u} \in \mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

- ▶ $0.\vec{u} = \vec{0}$
- ▶ $\lambda.\vec{0} = \vec{0}$

Mais si $\mathbb{E}$ n'est pas un espace vectoriel, ces propriétés ne sont pas nécessairement vraies !!

5.1. - Caractéristiques

Caractéristiques d'un espace vectoriel de dimension finie

Tout espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension finie :

- ▶ est caractérisé par une **dimension** $\dim(\mathbb{E})$
- ▶ des bases : chaque **base** $\mathcal{B}$ contient n vecteurs $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ et permet de décomposer tout vecteur $\vec{v}$ sous la forme $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{b}_i$ où les λ_i sont les

coordonnées (réelles) de $\vec{v}$ dans $\mathcal{B}$ notée sous la forme $\vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$; les

coordonnées dans une base sont **uniques**

5.2.1. - Les réels

Définition 114 (L'espace vectoriel des réels).

- ▶ Vecteur-réel : **vecteurs** $\vec{v} = v_1$ avec $v_1 \in \mathbb{R}$
- ▶ Addition : $v_1 + v_2$
- ▶ Multiplication $\lambda(v_1) = \lambda v_1$
- ▶ Notation : $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$
- ▶ Dimension : $\dim(\mathbb{R}) = 1$
- ▶ Base canonique : (1)
- ▶ Coordonnées : $\left(v_1\right)_{(1)}$

5.2.2. - Les complexes

Définition 115 (L'espace vectoriel des complexes).

- ▶ Vecteur-complexe : **vecteurs** $\vec{v} = v_1 + jv_2$ avec v_1 et v_2 réels.
- ▶ Addition : $(v_1 + jv_2) + (v_1 + jv_2) = (v_1 + v_1) + j(v_2 + v_2)$
- ▶ Multiplication $\lambda(v_1 + jv_2) = \lambda v_1 + j\lambda v_2$
- ▶ Notation : $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$
- ▶ Dimension : $\dim(\mathbb{C}) = 2$
- ▶ Base canonique : $(1, j)$
- ▶ Coordonnées : $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{(1, j)}$

Exemple 116 (Des vecteurs-complexes).

$\vec{u} = -2 + 3j$ est un vecteur complexe. Puis $\vec{u} = -2.1 + 3.j$, ses coordonnées sur la base canonique sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{(1, j)}$.

5.2.3. - Les polynômes

Définition 117 (L'espace vectoriel des polynômes de degré (au plus égal à) n).

- ▶ Vecteur-polynôme : $\vec{v} = P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$
- ▶ Addition et multiplication : pour $P(X) = \sum_{i=0}^n a_iX^i$ et $Q(X) = \sum_{i=0}^n b_iX^i$, la

somme est $(P + Q)(X) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i)X^i$; la multiplication externe est

$$(\lambda P)(X) = \sum_{i=0}^n (\lambda a_i)X^i$$

- ▶ Notation : $(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}, +, \cdot)$
- ▶ Dimension : $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$
- ▶ Base canonique : les $n+1$ vecteurs-polynôme $(1, X, X^2, \dots, X^n)$

- ▶ Coordonnées : $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{(1, X, \dots, X^n)}$

5.2.3. - Les polynômes

Exemple 118 (Polynôme de degré 3).

$P(X) = 1 - 2X + 3X^3$ est un vecteur de $\mathbb{R}_3[X]$. Puisqu'il s'écrit $P(X) = 1.1 + (-2).X + 0.X^2 + 3X^3$, ses coordonnées dans la base

canonique sont $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{(1, X, X^2, X^3)}$

Travailler sur des polynômes est équivalent à travailler sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

Remarque : $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, sans restriction de degré, est aussi un espace vectoriel, mais de dimension infinie.

5.2.4. - Les fonctions

Définition 119 (L'espace vectoriel des fonctions).

- ▶ Vecteur-fonction : $\vec{v} = f$ où $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$ avec les opérations :
- ▶ **Addition** : le vecteur-somme $f + g$ des deux vecteurs f et g est la fonction déf. par : $\forall x \in \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- ▶ **Multiplication** : le vecteur λf du vecteur f est la fonction déf. par : $\forall x \in \mathbb{R}, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$
- ▶ Notation : $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$
- ▶ Dimension : infinie

Rappel

Deux fonctions f et g sont égales si leurs règles de définition sont égales, autrement dit si quel que soit x , $f(x) = g(x)$

5.2.5. - Les matrices

Définition 120 (L'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coeffs réels).

- ▶ Vecteurs-matrices : $\vec{v} = A = (a_{i,j})$
- ▶ Addition $(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j})$
- ▶ Multiplication : $\lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$
- ▶ Notation : $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$
- ▶ Dimension : $\dim(\mathcal{M}_n) = n^2$
- ▶ Base canonique : les n^2 matrices $B_{i,j}$, dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient $m_{i,j}$ valant 1 avec i, j variant entre 1 et n .
- ▶ Coordonnées :
$$(a_{1,1} \quad \dots \quad a_{1,n} \quad a_{2,1} \quad \dots \quad a_{2,n} \quad \dots \quad a_{n,1} \quad \dots \quad a_{n,n})^T$$
 sur la base canonique.

5.2.5. - Les matrices

Exemple 121 (Une matrice de taille 2 dans $\mathcal{M}_2$).

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur et est de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur la base

formée de $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Travailler sur ces matrices est équivalent à traiter des vecteurs ayant n^2 composantes donc de $\mathbb{R}^{n^2}$.

5.2.6. - Exercices sur les EV

➔ EXERCICE 40. *Exercice (PE)* : On considère l'ensemble des matrices carrées A de taille 2, à coefficients réels, symétriques (c'est-à-dire telles que $A = A^t$) noté $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $(\mathcal{S}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel où $+$ et $\cdot$ désigne l'addition et la multiplication externe standards sur les matrices $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. □

➔ EXERCICE 41. *Variante autour de la loi de multiplication* : Considérons l'ensemble $\mathbb{E}$ des couples de nombres réels (a, b) , muni de l'addition usuelle. Définissons la loi de multiplication (externe) par scalaire réel α de la façon suivante : $\alpha \cdot (a, b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b)$. $(\mathbb{E}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ est-il un espace vectoriel ? □

5.2.6. - Exercices sur les EV

➔ EXERCICE 42. *Variation autour des lois d'addition et de multiplication* : On considère l'espace $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ muni de :

- l'addition, notée $\oplus$ et définie par : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, a \oplus b = ab$
- la multiplication, notée $\otimes$ définie par : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \otimes a = a^\lambda$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ forme un espace-vectoriel.



➔ EXERCICE 43. *Espace vectoriel de fonctions* : Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, telles que $(\mathcal{E}) \quad f' + 2f = 0$. Montrer que $(\mathbb{F}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.



5.2.6. - Exercice sur les SEV

➔ EXERCICE 44. *Exercice type* : On considère le sous-ensemble $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices carrées à coefficients réels de taille 2 diagonales, c'est-à-dire de la forme : $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}, +, \cdot)$. □

➔ EXERCICE 45. *Vrai ou Faux ?* : Indiquer si les ensembles suivants, munis chaque fois de l'addition et de la multiplication externe (par des scalaires réels) usuelles, sont des espaces vectoriels. Justifier votre réponse.

- ① L'ensemble $\mathbb{E}_1$ des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.
- ② L'ensemble $\mathbb{E}_2$ des couples (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x_1 + x_2) = 0$.
- ③ L'ensemble $\mathbb{E}_3$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ ne comportant pas de terme de degré 4.
- ④ L'ensemble $\mathbb{E}_4 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 + \alpha x_2 + 1 \geq 0\}$ où α est un réel fixé.
- ⑤ L'ensemble $\mathbb{E}_5$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont croissantes.
- ⑥ L'ensemble $\mathbb{E}_6$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 8.

5.2.6. - Exercices sur les SEV

➡ EXERCICE 46. *Triplets* : Montrer que $\mathbb{F} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 2x_1\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, où $+$ et $\cdot$ sont respectivement l'addition et la multiplication standard dans $\mathbb{R}^3$.



➡ EXERCICE 47. *Instabilité des couples à composantes nulles* : On considère le sous-ensemble $\mathbb{E}$ de $\mathbb{R}^2$ défini par : $\mathbb{E} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \cdot x_2 = 0\}$. Donner 2 vecteurs de $\mathbb{E}$ dont la somme n'appartient pas à $\mathbb{E}$. $\mathbb{E}$ peut-il être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?



➡ EXERCICE 48. *Quatre vecteurs* : Soit $(\mathbb{V}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espace vectoriel et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ 3 vecteurs de $\mathbb{V}$ linéairement indépendants.

- ① Montrer que les vecteurs $\vec{b}_1 = \vec{u} + \vec{v} - 2\vec{w}$, $\vec{b}_2 = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$, $\vec{b}_3 = \vec{u} + \vec{w}$ sont linéairement indépendants.
- ② Soit $\vec{z}$ un quatrième vecteur de $\mathbb{V}$. Montrer que : si la famille formée par $\vec{t}_1 = \vec{u} + \vec{z}$, $\vec{t}_2 = \vec{v} + \vec{z}$ et $\vec{t}_3 = \vec{w} + \vec{z}$ est linéairement dépendante, alors

5.2.6. - Exercices sur les CL

➡ EXERCICE 49. *Combinaisons linéaires de matrices* : Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle une combinaison linéaire de A et B ?
2. $E = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle une combinaison linéaire de A , B et C ?



5.2.6. - Exercices sur les familles libres

➡ EXERCICE 50. *Ils sont libres, Max :* Montrer que la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) avec $P_1(X) = 1$, $P_2(X) = 2X + 3X^2$ et $P_3(X) = 3X - X^2 + X^3$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.



➡ EXERCICE 51. *Famille libre de polynômes :* Dans l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X]$, on considère :
$$\begin{cases} P_1(X) = X^3 + \alpha X^2 + X + 1 \\ P_2(X) = X^3 + 2\alpha X^2 + \alpha X \\ P_3(X) = X^3 + \alpha X^2 + X + \alpha \end{cases}, \text{ où } \alpha \text{ est un réel fixé. Pour}$$
 quelle(s) valeur(s) de α la famille de polynômes (P_1, P_2, P_3) est-elle une famille libre de $\mathbb{R}[X]$?



5.2.6. - Exercices sur les bases

➡ EXERCICE 52. *Base d'un sous-espace vectoriel des matrices carrées de taille 2 :*

Soit $\mathbb{E}$ l'ensemble des matrices de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & c \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$

① Montrer que $(\mathbb{E}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.

② Déterminer une base de $\mathbb{E}$ et sa dimension.

③ Montrer que la famille constituée des 3 matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ forment aussi une base de $\mathbb{E}$.

④ Quelles sont les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans chacune de ces bases.



5.2.6. - Exercices sur les bases

➡ EXERCICE 53. *Base des polynômes de degré 3 :*

Soit $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = 1 + X$, $P_2(X) = (1 + X)^2$ et $P_3(X) = (1 + X)^3$.

- ① Montrer que (P_0, P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$, autrement dit de l'ensemble des polynômes de degré 3.
- ② Déterminer les coordonnées de $Q(X) = X^3 + 2X^2$ dans la base (P_0, P_1, P_2, P_3)



5.2.6. - Exercices sur les bases

➡ EXERCICE 54. *Base des complexes* : Pour quelles valeurs des réels a, b, c, d , la famille de complexes $(a + jb, c + jd)$ est-elle une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$.



➡ EXERCICE 55. *Variantes autour de l'addition et de la multiplication* : On munit l'espace des vecteurs $\mathbb{E} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de

- la loi d'addition $+$ définie par : $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2 + b_2)$,
- de la multiplication externe par un réel λ suivante : $\lambda \cdot (a_1, a_2) = (a_1^\lambda, \lambda a_2)$

- ① Vérifier que $(\mathbb{E}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
- ② Les familles suivantes forment-elles des familles de vecteurs linéairement indépendants :

$$\mathcal{F}_1 = \left((1, 0), (1, 1) \right) ? \mathcal{F}_2 = \left((2, 1), (8, 3) \right) ? \mathcal{F}_3 = \left((2, 1), (6, 3) \right) ?$$

- ③ Vérifier que la famille $\mathcal{B} = \left((2, 0), (2, 1) \right)$ est une base de $\mathbb{E}$
- ④ Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{v} = (x, y) \in \mathbb{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.

5.2.6. - Exercices sur les applications linéaires

➔ EXERCICE 56. :

Pour chacune des applications suivantes, montrer qu'il s'agit d'une application linéaire et déterminer le polynôme caractéristique ainsi que le spectre :

$$\textcircled{1} \quad f: \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P + P' - 2P'' \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad f: \begin{cases} \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + M^T \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad f: \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + z^* \end{cases}$$



5.2.6. - Exercices sur les applications linéaires

➡ EXERCICE 57. : Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à un polynôme P de degré n associe $f(P) = \int_0^1 P(x)dx$.

1. Montrer que f est une forme linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f))$.
3. Déterminer la matrice associée à f dans les bases canoniques des espace vectoriel considérés.



➡ EXERCICE 58. *Application linéaire dans l'espace des complexes* : Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^* \end{cases}$ où z^* désigne le conjugué de z .

- ① Montrer que f est un automorphisme de l'espace vectoriel $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$.
- ② Déterminer la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, j)$ de $\mathbb{C}$.



5.2.6. - Exercices sur les app. lin.

➡ EXERCICE 59. *Problème autour des applications linéaires sur les*

polynômes : On considère l'application : $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P + P' + P'' \end{cases}$

- ① Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ② Calculer la matrice caractéristique de f dans la base canonique $\mathcal{E} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On la notera M .
- ③ En déduire si f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ④ On considère $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ⑤ Déterminer la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à $\mathcal{B}$.
- ⑥ Déterminer la matrice caractéristique de f de la base canonique $\mathcal{E}$ dans la base $\mathcal{B}$.



5.2.6. - Exercices de diagonalisation

➡ EXERCICE 60. *Diagonalisation d'une application sur les polynômes :*

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto P'(X) \end{cases}.$$

- ① Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ② Déterminer si f est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ou non.
- ③ Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés (on peut le faire *sans utiliser le polynôme caractéristique*).



➡ EXERCICE 61. :

On considère l'application suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X) \end{cases}$$

- ① Montrer que f est une application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ② Donner la matrice caractéristique de f sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

5.3.1. - Généralisation

Définition 122 (Espace vectoriel euclidien).

Tout espace vectoriel $\mathbb{E}$ peut être muni d'un produit scalaire, qui mesure l'alignement de deux vecteurs et définit l'angle entre deux vecteurs et d'une **norme**, qui mesure la longueur d'un vecteur et donc la distance entre 2 points. On l'appelle alors **espace vectoriel euclidien**.

Définition 123 (Produit scalaire).

Un produit scalaire est une application qui à tout couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ de $\mathbb{E}^2$ associe un **nombre réel** noté $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (appelé **produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$**).

5.3.1. - Des produits scalaires

Il existe plusieurs produits scalaires (et donc plusieurs normes) pour un même espace vectoriel.

Définition 124 (Produit scalaire).

Étant donné un espace vectoriel $(\mathbb{E}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, un **produit scalaire** est une application qui vérifie les propriétés suivantes : pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathbb{E}$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$,

- ▶ **Symétrie** : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
- ▶ **Bilinéarité** : $\langle \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \mu \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
- ▶ **Positive** : $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$.
- ▶ **Définie** : $\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$.

Dans ce cours, on se limitera aux produits scalaires canoniques.

5.3.1. - Exercices (PE)

➡ EXERCICE 62. *Produit scalaire des fonctions (PE)* : Montrer que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. □

5.3.2. - Norme

Définition 125 (Norme).

La **norme** de l'espace vectoriel $(\mathbb{E}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ induite par le produit scalaire est l'**application** qui à tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{E}$ associe le nombre réel $\|\vec{u}\|$ défini par : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$

Remarque : Tout vecteur de norme 1 est appelé **vecteur unitaire**.

Comment normer un vecteur $\vec{u}$?

Il suffit de considérer $\pm \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ (vecteur colinéaire à/donc de même direction que $\|\vec{u}\|$ mais de norme 1).

5.3.2. - Propriétés des normes

Théorème 126 (Propriété des normes).

Pour tout vecteur $\vec{u}, \vec{v}$ et pour tout scalaire réel λ ,

- ▶ $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$
- ▶ $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$
- ▶ **Inégalité triangulaire** : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- ▶ **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
- ▶ **Théorème de Pythagore** : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

5.3.3. - Orthogonalité

Définition 127 (Angle).

L'angle θ entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\theta = \arccos \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Définition 128 (Orthogonalité).

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, autrement dit si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$

Remarques :

- ▶ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors les vecteurs $\lambda \vec{u}$ colinéaires à $\vec{u}$ et les vecteurs $\mu \vec{v}$ colinéaires à $\vec{v}$ sont orthogonaux, autrement dit :
 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \langle \lambda \vec{u}, \mu \vec{v} \rangle = 0$
- ▶ Pythagore pour des vecteurs orthogonaux : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

5.3.4. - Exercices 1

➔ EXERCICE 63. *Produit scalaire sur les fonctions* : Notons $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Etant données deux fonctions f et g de cet ensemble, on définit l'application $\langle ., . \rangle$ par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

- ① Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.
- ② Soit $\mathbb{F}$ l'ensemble des fonctions affines sur $[0,1]$. Montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et déterminer une base orthonormée de $\mathbb{F}$.



5.3.4. - Exercices 2

➔ EXERCICE 64. *Produits scalaires et trigonométrie* : Dans l'espace $\mathbb{E}$ de fonctions définies et continues sur $[-\pi, \pi]$ à valeurs réelles, on définit le

produit scalaire de deux fonctions f et g par : $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

- ① Montrer que si m et n sont des entiers distincts alors les fonctions $x \mapsto \cos(nx)$, $x \mapsto \cos(mx)$, $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \sin(mx)$ sont deux-à-deux orthogonales pour ce produit scalaire.
- ② Que peut-on en déduire sur la dimension de $\mathbb{E}$?
- ③ Calculer $\|\cos(nx)\|$ et $\|\sin(nx)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



5.3.4. - Exercices 3

➡ EXERCICE 65. *Calcul sur les polynômes* : On se place dans l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)dx$, où P et Q sont deux polynômes quelconques de $\mathbb{R}[X]$.

- ① Calculer $\langle P, Q \rangle$, $\|P\|$ et $\|Q\|$, lorsque $P(X) = 4 + X$ et $Q(X) = 5 - 4X^2$; même question lorsque $P(X) = 3X - X^2$ et $Q(X) = 3 + 2X^2$.
- ② Trouver un polynôme $Q(X)$ orthogonal à $P(X) = X^2 - X + 1/4$; même question pour $P(X) = 2X - 1$



5.3.4. - Exercices 4

➡ EXERCICE 66. *Variante de produit scalaire sur les polynômes* : On considère, dans l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré 2 ($\mathbb{R}_2[x]$), l'application $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P'(x)Q'(x)dx + P(0)Q(0)$, où P et Q sont deux éléments quelconques de $\mathbb{R}_2[X]$.

- ① Montrer que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
- ② Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- ③ Soit $\mathbb{E} = \text{Vect}(X^2)$. Déterminer l'orthogonal de $\mathbb{E}$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\mathbb{E}$.



5.3.4. - Exercices 5

➡ EXERCICE 67. À réfléchir : Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel euclidien de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de dimension n . On se donne n vecteurs de norme unitaire,

$(e_1, \dots, e_n)$ de E , et on suppose que : $\forall x \in \mathbb{E}, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$.

- ① Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Montrer que l'orthogonal de F , noté $F^\perp$, est $\{0\}$. En déduire que $F = E$ puis que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{E}$.
- ② Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

