

NOMBRES COMPLEXES

Cours

I. DEFINITIONS D'UN NOMBRE COMPLEXE

- 1. Forme algébrique**
- 2. Représentation graphique**
- 3. Forme polaire**
- 4. Forme trigonométrique**
- 5. Relations fondamentales entre les différentes définitions**
- 6. Exemples**

II. PROPRIETES ELEMENTAIRES - DEFINITIONS

- 1. Nombre complexe nul**
- 2. Egalité de deux nombres complexes**
- 3. Nombres complexes opposés**
- 4. Nombres complexes conjugués**
- 5. Propriétés importantes**

III. OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

- 1. Somme et différence de deux nombres complexes**
- 2. Multiplication de deux nombres complexes**
- 3. Quotient de deux nombres complexes**
- 4. Conclusions générales**

IV. FORMULES D'EULER - FORMULE DE MOIVRE

- 1. Formules d'Euler**
- 2. Généralisation aux nombres complexes de module quelconque**
- 3. Linéarisation d'un polynôme trigonométrique**
- 4. Formule de Moivre**
- 5. Formule du binôme – triangle de Pascal**

V. RACINE $n^{\text{ième}}$ D'UN NOMBRE COMPLEXE

- 1. Sous forme polaire**
- 2. Sous forme algébrique**

VI. EQUATION DU SECOND DEGRE À COEFFICIENTS COMPLEXES

VII. APPLICATION A L'ELECTRICITE

- 1. Les lois de l'électricité**
- 2. Impédances**
- 3. Construction de Fresnel**
- 4. Utilisation des nombres complexes**

I. DEFINITIONS D'UN NOMBRE COMPLEXE

1. Forme algébrique

Soient x et y deux nombres réels, et soit j un nombre appelé "*imaginaire*" tel que $j^2 = -1$.

On appelle **forme algébrique** (ou **cartésienne**) d'un nombre complexe $z = (x, y)$ l'expression $z = x + jy$.

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ j^2 = -1 \end{array} \right\} \rightarrow z = (x, y) \in \mathbb{C} \rightarrow z = x + jy$$

x est la partie réelle de z , notée $x = \text{Re}(z)$,

y est la partie imaginaire de z , notée $y = \text{Im}(z)$.

L'ensemble des nombres complexes se note **C**.

Cas particuliers :

si $y = 0$, alors $z = x$ est un nombre réel: $z \in \mathbb{R}$

si $x = 0$, alors $z = jy$ est un nombre imaginaire pur: $z \in \mathbb{I}$

L'ensemble des nombres imaginaires purs se note **I**.

$$z = x + jy \in \mathbb{C} \rightarrow \begin{cases} \text{Si } y = 0, z = x \in \mathbb{R} \\ \text{Si } x = 0, z = jy \in \mathbb{I} \end{cases}$$

2. Représentation graphique

Soit le plan, rapporté à un repère orthonormé $\{O, \vec{u}, \vec{v}\}$, on a alors la figure 1 suivante.

A tout nombre complexe $z = x + jy$, on associe le point $M(x, y)$. La correspondance entre z et M est bijective c'est à dire qu'à tout nombre complexe $z = x + jy$, on peut faire correspondre un point du plan, de coordonnées x et y et que réciproquement, tout point M du plan définit par ses coordonnées x et y un nombre complexe $z = x + jy$.

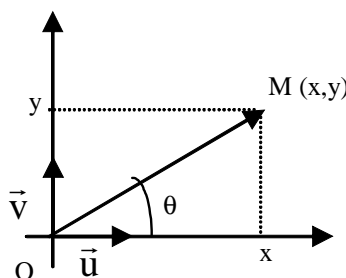


Fig. 1

Le point M s'appelle l'**image** du nombre complexe z . Le vecteur \overline{OM} s'appelle le **vecteur image** du nombre complexe z . Le nombre complexe z s'appelle l'**affiche** du point M (ou du vecteur \overline{OM}). Le plan, considéré comme l'ensemble des points $M(x, y)$ est appelé **plan complexe**, ou **plan de Cauchy**. L'axe Ox qui correspond aux points tels que $y = 0$, $z = x$, est l'**axe des réels**; l'axe Oy qui correspond aux points tels que $x = 0$, $z = jy$ est l'**axe des imaginaires purs**.

3. Forme polaire

On appelle **module** du nombre complexe z le module du vecteur image \overline{OM} associé à z .

On appelle **argument** du nombre complexe z l'angle polaire du vecteur image \overline{OM} associé à z (à $2k\pi$ près).

$$\begin{cases} r = |z| = OM; r \geq 0 \\ \theta = \text{Arg}(z) = (\mathbf{Ox}, \mathbf{OM}) + 2k\pi \end{cases}$$

On note alors le nombre complexe z sous la **forme polaire** : $z = [r, \theta]$

4. Forme trigonométrique

Soit un nombre complexe de forme polaire $z = [r, \theta]$.

Soit M son image dans le plan complexe (Fig. 2).

Les composantes x et y du vecteur image \overline{OM} s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

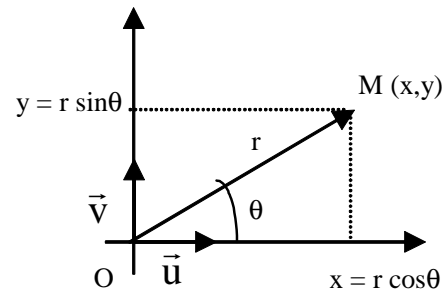


Fig. 2

d'où la **forme trigonométrique** du nombre complexe : $z = x + jy$

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

5. Relations fondamentales entre les différentes définitions

On verra par la suite que l'on pose habituellement : $\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta}$.

Ainsi, la **forme polaire** $z = [r, \theta]$ du nombre complexe z est souvent notée : $z = re^{j\theta}$

En conclusion, les quatre formes suivantes sont équivalentes pour désigner un nombre complexe z :

$$z = x + jy = [r, \theta] = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta}$$

Inversement, si un nombre complexe est connu sous sa forme cartésienne $z = x + jy$, on peut calculer son module et son argument.

Le module r se calcule facilement par : $r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$

et son argument, θ est calculé, modulo 2π par $\cos \theta = \frac{x}{r}$ **et** $\sin \theta = \frac{y}{r}$

ou par $\text{tg} \theta = \frac{y}{x}$, **en tenant compte** des signes de $\cos \theta = \frac{x}{r}$ et $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

6. Exemples

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{j\pi} &= \cos \pi + j \sin \pi \\ &= \cos \pi + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{b) } e^{j2\pi} = \cos 2\pi + j \sin 2\pi = 1$$

$$\text{c) } e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = \left[1, \frac{\pi}{2} \right] = j$$

$$\text{d) } e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \left[1, -\frac{\pi}{2} \right] = -j$$

$$\text{e) } e^{jn\pi} = \cos n\pi + j \sin n\pi = \cos n\pi = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$$

Ainsi, suivant la parité de n :

$$e^{jn\pi} = 1 \text{ si } n \text{ pair } (n = 2p)$$

$$e^{jn\pi} = -1 \text{ si } n \text{ impair } (n = 2p + 1)$$

$$\text{f) } \sqrt{2}(1+j) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{g) } \sqrt{2}(1-j) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} - j \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{h) } (1+j\sqrt{3}) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3} \right) = \left[2, \frac{\pi}{3} \right] = 2e^{j\frac{\pi}{3}}$$

II. PROPRIETES ELEMENTAIRES - DEFINITIONS

1. Nombre complexe nul

Le **nombre complexe nul**, noté simplement $z = 0$, est le nombre complexe dont l'image est l'origine du plan complexe c'est à dire le point $O(0, 0)$. Cette définition conduit aux égalités suivantes:

$$\text{Sous forme cartésienne: } z = x + jy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sous forme polaire: } z = [r, \theta] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ \theta \text{ quelconque} \end{cases}$$

2. Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes z et z' sont dits égaux si leurs images respectives M et M' dans le plan complexe sont confondues.

Cette identité entraîne l'égalité des composantes (x, y) et (x', y') des vecteurs images \overline{OM} et $\overline{OM'}$ correspondants.

$$\text{Soit : } z = x + jy = z' = x' + jy' \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Deux nombres complexes égaux ont des parties réelles égales **ET** des parties imaginaires égales.

Sous forme polaire l'égalité des deux nombres complexes z et z' se traduit par :

$$z = [r, \theta] = z' = [r', \theta'] \Rightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

Les modules sont égaux et les arguments sont égaux **à $2k\pi$ près (modulo 2π)**.

3. Nombres complexes opposés

Deux nombres complexes z et z' sont dits opposés si leurs vecteurs images respectifs \overline{OM} et $\overline{OM'}$ dans le plan complexe sont opposés (Fig. 3).

Cette identité entraîne entre les composantes (x, y) et (x', y') de ces vecteurs images les relations :

$$z = x + jy = -z' = -(x' + jy') \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Deux nombres complexes opposés ont des parties réelles opposées **ET** des parties imaginaires opposées.

Sous forme polaire : $z = [r, \theta] = -z' = -[r', \theta'] \Rightarrow \begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta + \pi + 2k\pi \end{cases}$

Les modules sont égaux et les arguments **diffèrent de π (modulo 2π)**.

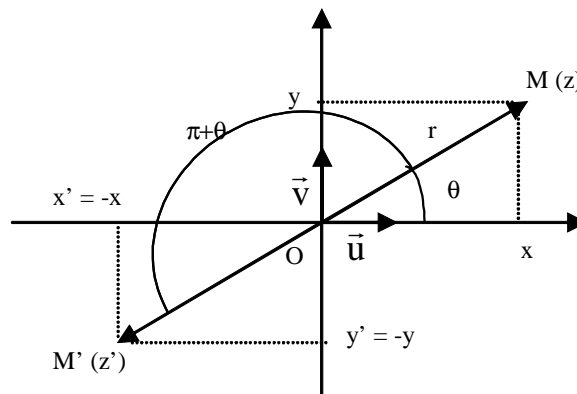


Fig. 3

4. Nombres complexes conjugués

Deux nombres complexes z et z' sont dits conjugués si leurs vecteurs images respectifs \overline{OM} et $\overline{OM'}$ dans le plan complexe sont symétriques par rapport à l'axe des réels Ox (Fig. 4). Cette identité entraîne entre les composantes (x, y) et (x', y') de ces vecteurs images les relations suivantes :

$$\begin{cases} z = x + jy \\ z' = x' + jy' = \bar{z} = \overline{x + jy} = x - jy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

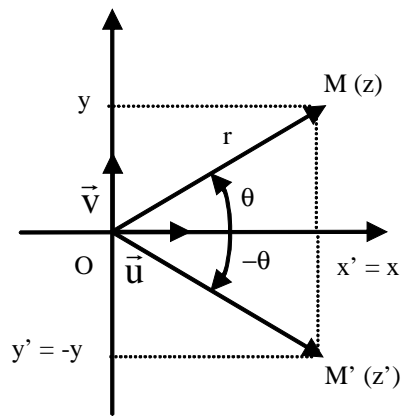


Fig. 4

Deux nombres complexes conjugués ont des parties réelles égales **ET** des parties imaginaires opposées.

Sous forme polaire leur écriture donne :

$$\begin{cases} z = [r, \theta] \\ z' = [r', \theta'] = \bar{z} = [\overline{r, \theta}] = [r, -\theta] \Rightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = -\theta' + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Le conjugué d'un nombre complexe s'obtient en changeant le signe de sa partie imaginaire, **ce qui revient à changer j en -j.**

Sous forme polaire, on change simplement θ en $-\theta$.

5. Propriétés importantes

a) Soit z un nombre complexe et soit z' son conjugué. Alors, z est le conjugué de z' .

$$\overline{\overline{z}} = z$$

b) Soit $z = x + jy$ un nombre complexe et soit $\bar{z} = x - jy$ son complexe conjugué. Alors les parties réelles et complexes sont telles que :

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad y = \frac{1}{2j}(z - \bar{z})$$

c) Si un nombre complexe est égal à son complexe conjugué, sa partie imaginaire est nulle : le nombre est réel.

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Pour exprimer qu'un nombre complexe est réel, on écrira qu'il est égal à son complexe conjugué.

III. OPERATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

1. Somme et différence de deux nombres complexes

a) Somme de deux nombres complexes

Soient deux nombres complexes $z = x + jy$ et $z' = x' + jy'$, dont les images sont respectivement les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$. Considérons l'addition vectorielle des deux vecteurs images \vec{OM} et \vec{OM}' .

Soit \vec{OS} le vecteur égal à la somme des vecteurs \vec{OM} et \vec{OM}' (Fig. 5) : $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM}'$

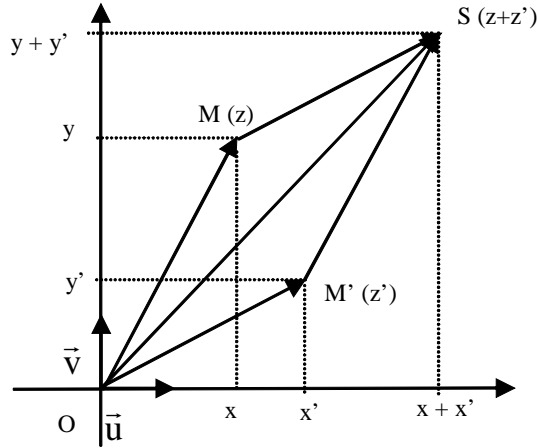


Fig. 5

Les coordonnées du point S dans le plan sont : $S(X, Y) \rightarrow \begin{cases} X = x + x' \\ Y = y + y' \end{cases}$

Le point S est l'image d'un nombre complexe $Z = X + jY$.

Par définition le nombre complexe Z est la somme des nombres complexes z et z'. On écrira :

$$\left. \begin{array}{l} z = x + jy \\ z' = x' + jy' \end{array} \right\} \Rightarrow Z = z + z'; \quad Z = X + jY \Rightarrow \begin{cases} X = x + x' \\ Y = y + y' \end{cases}$$

La partie réelle de la somme est la somme des parties réelles.

La partie imaginaire de la somme est la somme des parties imaginaires.

L'addition s'effectue simplement sous forme cartésienne, selon les règles habituelles de l'addition algébrique :

$$\begin{aligned} Z &= z + z' \\ &= (x + jy) + (x' + jy') \\ &= (x + x') + j(y + y') \\ &= X + jY \end{aligned}$$

b) Propriétés de la somme de deux nombres complexes

Ce sont celles de l'addition vectorielle :

Commutativité	:	$z + z' = z' + z$
Associativité	:	$z + (z' + z'') = (z + z') + z''$

Existence d'un élément neutre : $z + 0 = 0 + z = z$

Existence d'un élément opposé : $z + (-z) = 0$

En outre, dans le triangle OMS , avec $\overline{OM'} = \overline{MS}$ on a les inégalités suivantes :

$$|OM - MS| \leq OS \leq OM + MS$$

$$|OM - OM'| \leq OS \leq OM + OM'$$

D'où les inégalités entre les modules:

$$\boxed{||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

c) Différence de deux nombres complexes

Soient deux nombres complexes z et z' .

Effectuer la différence $z - z'$ revient à ajouter l'opposé de z' à z .

Les vecteurs images \overline{OM} et $\overline{OM'}$ ont pour différence le vecteur : $\overline{M'M} = \overline{OM} - \overline{OM'}$

$\overline{M'M}$ (Fig. 6) a pour affixe $z - z'$, appelée "mesure complexe".

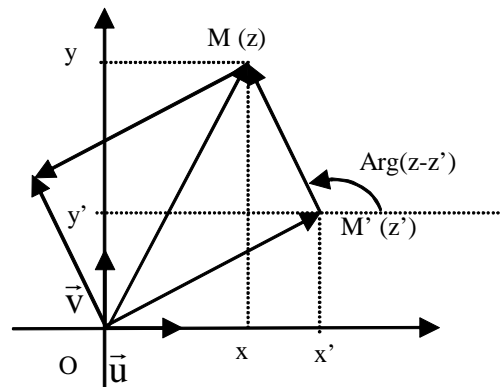


Fig. 6

d) Propriété importante

Le conjugué de la somme de deux nombres complexes est la somme des conjugués:

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

Le conjugué de la différence de deux nombres complexes est la différence des conjugués:

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

2. Multiplication de deux nombres complexes

a) Utilisation de la forme algébrique

La multiplication de deux nombres complexes exprimés sous forme algébrique s'effectue selon les règles habituelles de la multiplication des nombres réels, avec la convention :

$$\boxed{j^2 = -1}$$

$$\text{Soient } \begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \end{cases} \text{ alors } z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)$$

$$= x_1 x_2 + jy_1 x_2 + jx_1 y_2 + j^2 y_1 y_2$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

En posant $Z = X + jY = z_1 z_2$, on obtient par identification :

$$\begin{cases} X = x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ Y = y_1 x_2 + x_1 y_2 \end{cases}$$

b) Propriétés de la loi de multiplication:

- Commutativité : $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- Associativité : $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- Existence d'un élément neutre (le nombre réel 1) : $z \cdot 1 = z$
- Distributivité par rapport à l'addition : $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

L'ensemble des propriétés de l'addition et de la multiplication permet de conclure que l'ensemble des nombres complexes possède une structure de corps, appelé corps des complexes, **C**.

c) Produit d'un nombre complexe par son conjugué:

$$\begin{aligned} \bar{z}z &= (x + jy)(x - jy) \\ &= x^2 - j^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 = r^2 \end{aligned}$$

Le **carré du module** d'un nombre complexe s'obtient en multipliant ce nombre complexe par son complexe conjugué :

$$\bar{z}z = |z|^2$$

Le produit d'un nombre complexe par son complexe conjugué est un nombre réel.

d) Utilisation de la forme polaire

$$\begin{cases} z_1 = [r_1, \theta_1] = r_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = [r_2, \theta_2] = r_2 e^{j\theta_2} \end{cases} \rightarrow z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$[r_1, \theta_1] [r_2, \theta_2] = [r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2]$$

D'où: $[r_1, \theta_1] [r_2, \theta_2] = [r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2]$

En résumé :

$$z = z_1 z_2 \rightarrow \begin{cases} |z| = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \\ \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) [2\pi] \end{cases}$$

Le module du produit de deux nombres complexes est égal au produit de leurs modules.

L'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme de leurs arguments (modulo 2π).

e) Généralisation du produit de deux nombres complexes

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n e^{j\theta_1} e^{j\theta_2} \dots e^{j\theta_n}$$

$$= r_1 r_2 \dots r_n e^{j(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)}$$

$$[r_1, \theta_1][r_2, \theta_2] \dots [r_n, \theta_n] = [r_1 r_2 \dots r_n, \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n]$$

$$z = z_1 z_2 \dots z_n \rightarrow \begin{cases} |z| = |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n| \\ \text{Arg}(z) = \text{Arg}(z_1 z_2 \dots z_n) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) + \dots + \text{Arg}(z_n) \quad [2\pi] \end{cases}$$

Si les nombres complexes sont égaux :

$$z^n = r^n e^{jn\theta} = [r^n, n\theta] \Rightarrow z^n \Rightarrow \begin{cases} |z^n| = |z|^n \\ \text{Arg}(z) = n\text{Arg}(z) \quad [2\pi] \end{cases}$$

Conséquence: L'égalité $(z_1 z_2 \dots z_n) = 0$ impose $(r_1 r_2 \dots r_n) = 0$ que c'est à dire que l'un des modules $r_i = |z_i|$ soit nul, donc que l'un des nombres complexes soit nul.

Dans \mathbb{C} , un produit de nombres complexes est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul, comme dans \mathbb{R} .

f) Conjugué du produit de deux nombres complexes

Le résultat s'obtient facilement en travaillant sur les formes polaires.

Soient deux nombres complexes $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$.

Alors $\overline{z_1 z_2} = \overline{r_1 e^{j\theta_1} r_2 e^{j\theta_2}} = \overline{r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}}$ Soit finalement : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$

$$= r_1 r_2 e^{-j(\theta_1 + \theta_2)} = r_1 e^{-j\theta_1} r_2 e^{-j\theta_2}$$

$$= \overline{r_1 e^{j\theta_1}} \overline{r_2 e^{j\theta_2}}$$

3. Quotient de deux nombres complexes

A partir de la multiplication, on définit aisément le quotient de deux nombres complexes z_1

et z_2 : Si $Z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $z_1 = Z z_2$.

D'après la loi de multiplication: $z_1 = Z z_2 \rightarrow \begin{cases} |z_1| = |Z z_2| = |Z| |z_2| \\ \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(Z z_2) = \text{Arg}(Z) + \text{Arg}(z_2) \quad [2\pi] \end{cases}$

D'où : $Z = \frac{z_1}{z_2} \rightarrow \begin{cases} |Z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \text{Arg}(Z) = \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2) \quad [2\pi] \end{cases}$

Le module du quotient de deux nombres complexes est égal au quotient de leurs modules.

L'argument du quotient de deux nombres complexes est égal à la différence de leurs arguments (modulo 2π).

4. Conclusions générales

En résumé, lorsqu'on voudra effectuer une **addition** ou une **différence** de deux nombres complexes, il sera préférable de les exprimer sous **forme algébrique** (ou trigonométrique).

En revanche, quand il s'agira d'effectuer une **multiplication** ou un **quotient** de deux nombres complexes, il sera plus facile d'utiliser leur **forme polaire**.

IV. FORMULES D'EULER - FORMULE DE MOIVRE

1. Formules d'Euler

Soit un nombre complexe de module égal à 1 :
$$\begin{cases} z = e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \\ \bar{z} = e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \end{cases}$$

En exprimant la somme et la différence :
$$\begin{cases} z + \bar{z} = e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2 \cos \theta \\ z - \bar{z} = e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin \theta \end{cases}$$

On en déduit les **FORMULES D'EULER** :

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

2. Généralisation aux nombres complexes de module quelconque

Pour un nombre complexe quelconque, dont le module est différent de l'unité, le cosinus et sinus de l'argument s'obtiennent comme suit :

$$\begin{cases} z = re^{j\theta} \Rightarrow \cos \theta + j \sin \theta = \frac{z}{r} \\ \bar{z} = re^{-j\theta} \Rightarrow \cos \theta - j \sin \theta = \frac{\bar{z}}{r} \end{cases} \quad \text{alors :} \quad \boxed{\cos \theta = \frac{z + \bar{z}}{2r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin \theta = \frac{z - \bar{z}}{2jr}}$$

3. Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

a) Définition d'un polynôme trigonométrique

Un polynôme trigonométrique est un polynôme dont chaque terme est un produit de fonctions sinus et cosinus d'angles quelconques.

Exemple : $\sin \theta \cos^2 \theta$, $\cos \theta \sin^3 \theta$

b) Définition de la linéarisation

Chercher à linéariser revient à **remplacer les produits** des fonctions sinus et cosinus **par des sommes** (pondérées par des coefficients réels ou complexes) de fonctions sinus et cosinus dont les angles ont, eux aussi, été modifiés.

c) Exemple

Soit à linéariser l'expression $\sin 2\theta \cos 3\theta$:

$$\begin{aligned} \sin 2\theta \cos 3\theta &= \left(\frac{e^{j2\theta} - e^{-j2\theta}}{2j} \right) \left(\frac{e^{j3\theta} + e^{-j3\theta}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4j} (e^{j5\theta} - e^{-j5\theta} + e^{-j\theta} - e^{j\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{j5\theta} - e^{-j5\theta}}{2j} - \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 5\theta - \sin \theta) \end{aligned}$$

Application: on pourra chercher à retrouver les relations trigonométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \\ \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \cos \theta + \cos 3\theta) \\ \sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin \theta - \sin 3\theta) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a - \beta) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a + \beta) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a - \beta) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{array} \right.$$

4. Formule de Moivre

Soit un nombre complexe de module unité $z = e^{j\theta}$.

L'élevation à la puissance n donne $z^n = (e^{j\theta})^n$ Or : $z^n = e^{jn\theta}$
 : $= (\cos \theta + j \sin \theta)^n$ $= \cos n\theta + j \sin n\theta$

D'où la **FORMULE DE MOIVRE:** $(\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos n\theta + j \sin n\theta$

Cette relation reste valable lorsque l'exposant n est négatif.

Application: Exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction des puissances de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + j \sin 3\theta &= (\cos \theta + j \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta + 3j \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - j \sin^3 \theta \\ &= \underbrace{(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta)}_{\cos 3\theta} + j \underbrace{(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)}_{\sin 3\theta} \end{aligned}$$

Par identification, on aboutit à :

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \\ \sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \end{cases}$$

Parfois, une simple transformation permet de retrouver des résultats obtenus précédemment :

$$\begin{array}{l|l} \cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos \theta(1 - \cos^2 \theta) & \sin 3\theta = 3(1 - \sin^2 \theta)\sin \theta - \sin^3 \theta \\ = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta & = -4\sin^3 \theta + 3\sin \theta \end{array}$$

5. Formule du binôme – triangle de Pascal

La formule du binôme permet de calculer les coefficients du développement de $(\cos \theta + j \sin \theta)^n$ pour un ordre quelconque n .

$$\begin{aligned} (a+b)^n = & a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3 + \\ & + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{2.3\dots p}a^{n-p}b^p + \\ & + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n \end{aligned}$$

Le coefficient d'ordre p , $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{2.3\dots p}$ représente le nombre de combinaisons possibles de n objets pris p à p .

On le désigne par : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

avec: $n! = 1.2.3\dots(n-2)(n-1)n$ ($n!$ signifie n factorielle)

et par convention: $0! = 1$.

Exemple: $1! = 1$ $2! = 1*2 = 2$ $3! = 1*2*3 = 6$
 $4! = 1*2*3*4 = 24$ $5! = 1*2*3*4*5 = 120$

La **FORMULE DU BINOME** s'écrit : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^{n-p} b^p$

Les coefficients C_n^p se calculent aisément à partir du **TRIANGLE DE PASCAL** dans lequel chaque coefficient est la somme des deux coefficients de la ligne précédente situés respectivement dans la même colonne et dans la colonne précédente.

$(a+b)^1$	1	1					
$(a+b)^2$	1	2	1				
$(a+b)^3$	1	3	3	1			
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1		
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1	
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6	1

Exemple: $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Application : Pour exprimer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction des puissances successives de $\cos \theta$ et $\sin \theta$, il suffit, d'après la formule de Moivre, de développer $(\cos \theta + j \sin \theta)^5$ par la formule du binôme et d'identifier les parties réelles entre-elles et les parties imaginaires entre-elles.

Remarque : Le développement de $(a - b)^n$ fait intervenir les mêmes coefficients avec une alternance des signes + et - au niveau des coefficients en commençant par +. En fait, il y aura un signe - pour chaque puissance impaire de b.

Exemple : $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

V. RACINE n^{ième} D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit à résoudre : $Z^n = z_0$

Lorsqu'on résout dans \mathbf{C} cette équation, on doit trouver alors n solutions : Z_1, Z_2, \dots, Z_n .

1. Sous forme polaire

On pose : L'inconnue : $Z = R e^{j\theta}$

et le second membre : $z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$

L'égalité entre les deux nombres complexes donne : $Z^n = R^n e^{jn\theta} = r_0 e^{j\theta_0}$

$$\text{soit } \begin{cases} R^n = r_0 \\ n\theta = \theta_0 + 2k\pi \end{cases}$$

Finalement les n valeurs de Z sont :

$$Z_k = [R, \theta_k] \rightarrow \begin{cases} R = r_0^{1/n} = \sqrt[n]{r_0} \\ \theta_k = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Interprétation graphique : Les racines sont toutes sur un cercle de rayon R et elles sont décalées de $\frac{2\pi}{n}$ les unes par rapport aux autres à partir de $\frac{\theta_0}{n}$.

Exemple 1: $n = 3 \quad Z^3 = z_0$

$$k = 0 \quad Z_1 = \sqrt[3]{r_0} e^{j\frac{\theta_0}{3}}$$

$$k = 1 \quad Z_2 = \sqrt[3]{r_0} e^{j\left(\frac{\theta_0}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$k = 2 \quad Z_3 = \sqrt[3]{r_0} e^{j\left(\frac{\theta_0}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}$$

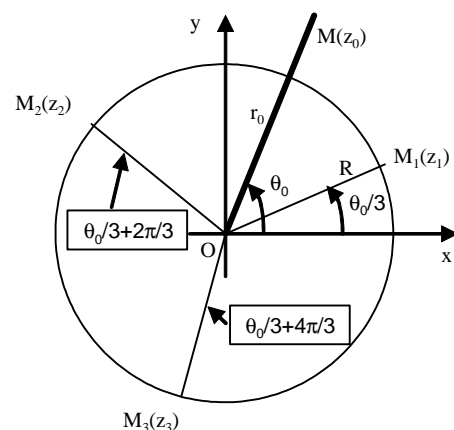


Fig. 7

Exemple 2 : Cas particulier : $n = 2$

$$Z^2 = z_0 \rightarrow Z^2 = R^2 e^{j2\theta} = r_0 e^{j\theta_0} \rightarrow \begin{cases} R^2 = r_0 \\ 2\theta = \theta_0 + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = \sqrt{r_0} \\ \theta = \frac{\theta_0}{2} + k\pi \end{cases}$$

On a deux racines :

Pour $k = 0$

et

Pour $k = 1$

$$Z_1 = \sqrt{r_0} e^{j\frac{\theta_0}{2}}$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \sqrt{r_0} e^{j\left(\frac{\theta_0}{2} + \pi\right)} \\ &= \sqrt{r_0} e^{j\frac{\theta_0}{2}} e^{j\pi} \\ &= -Z_1 \end{aligned}$$

Les deux racines sont opposées

Application : $Z^2 = -2j$ (Fig. 8)

$$z_0 = r_0 e^{j\theta_0} = -2j \begin{cases} r_0 = 2 \\ \theta_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On en déduit $\begin{cases} R = \sqrt{r_0} \\ \theta = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases}$, avec $k = 0$ ou 1 .

ce qui conduit aux deux racines : $\begin{cases} k = 0: & Z_1 = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} = 1 - j \\ k = 1: & Z_2 = \sqrt{2} e^{j\left(\frac{-\pi}{4} + \pi\right)} = \sqrt{2} e^{j\frac{3\pi}{4}} = -1 + j \end{cases}$

2. Sous forme algébrique

En général, les calculs sont inextricables, sauf pour les racines carrées.

Si on pose $\begin{cases} z_0 = a_0 + jb_0 \\ Z = x + jy \end{cases}$ on est amené à résoudre $(x + jy)^2 = a_0 + jb_0$

La méthode consiste à développer le terme de gauche et à identifier les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part, puis à résoudre le système ainsi obtenu en x et y .

Reprenons l'exemple précédent $Z^2 = -2j$: $(x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy = -2j$

$$\text{Soit: } \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = -2 & (2) \end{cases}$$

La première égalité conduit à $x = \pm y$ et la seconde à $x = -\frac{1}{y}$.

Cependant le cas $x = y$ conduit pour la seconde égalité à une impossibilité $x^2 = -1$ (x et y sont des nombres réels).

Seul le cas $x = -y$ convient, la seconde égalité donnant $x^2 = 1$ soit $x = \pm 1$.

Finalement on retrouve les deux solutions (Fig. 8) :
$$\begin{cases} x = +1 ; y = -1 ; Z_1 = 1 - j \\ x = -1 ; y = +1 ; Z_2 = -1 + j \end{cases}$$

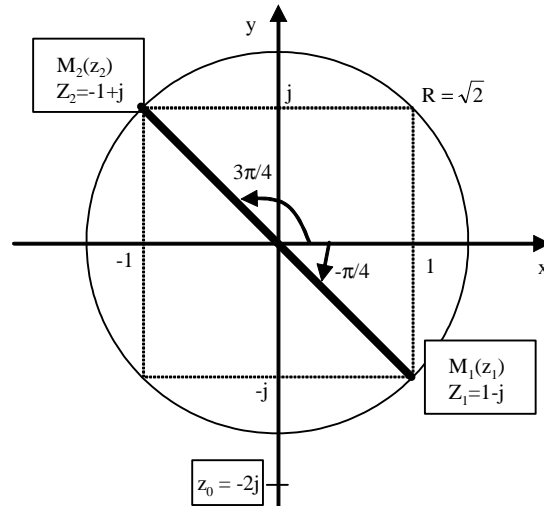


Fig. 8

VI. EQUATION DU SECOND DEGRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Ce paragraphe est la généralisation de la résolution d'une équation du second degré au cas où la variable ainsi que les coefficients sont complexes.

Soit à résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ dans laquelle les coefficients a, b, c et la variable z peuvent être des nombres complexes.

On peut écrire cette équation sous forme canonique : $a \left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right] = 0$

Le terme entre crochets peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \left[z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right] &= \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\ &= \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Soient $+\delta$ et $-\delta$ les racines de $\Delta = b^2 - 4ac$, c'est à dire les nombres complexes tels que $\Delta = \delta^2$.

Les solutions de l'équation du second degré sont :
$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

On vérifie que la somme et le produit des racines sont donnés par :

$$S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Remarques importantes :

a) Si a, b, c sont des **NOMBRES COMPLEXES**, alors les racines z_1 et z_2 **NE SONT PAS NECESSAIREMENT COMPLEXES CONJUGUEES**

b) Si a, b, c , sont des **NOMBRES REELS**, alors les racines z_1 et z_2 **SONT REELLES** (si Δ est positif ou nul) **OU COMPLEXES CONJUGUEES** (si Δ est négatif).

Exemple :

$$z^2 + (1-3j)z - (2+j) = 0$$

$$\Delta = (1-3j)^2 + 4(2+j) = 1+9j^2 - 6j+8+4j = -2j$$

Les solutions sont:

$$z_1 = \frac{1}{2}[-1+3j+\sqrt{-2j}] \quad z_2 = \frac{1}{2}[-1+3j-\sqrt{-2j}]$$

On est donc amené à trouver la racine du discriminant c'est à dire à résoudre

$$\delta^2 = -2j$$

Les solutions ont été calculées précédemment:

$$\delta = \pm(1-j)$$

Finalement les racines de l'équation du second degré sont : $z_1 = j \quad z_2 = -1+2j$

On remarque que, **les coefficients étant complexes**, les deux racines **ne sont pas complexes conjuguées**.

VII. APPLICATION A L'ELECTRICITE

(voir aussi le chapitre 1 du cours d'électrotechnique).

Soit un circuit R, L, C parcouru par un courant $i(t)$ (Fig. 9).

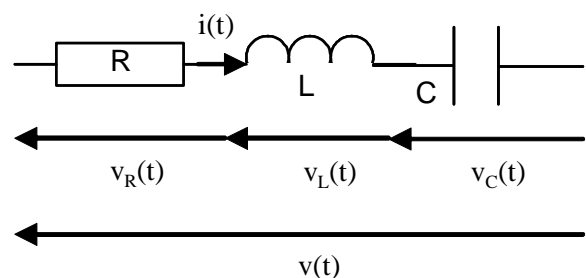


Fig. 9

1. Les lois de l'électricité

Les lois de l'électricité fournissent les tensions suivantes aux bornes des différents composants :

- aux bornes de la résistance R : $v_R(t) = Ri(t)$
- aux bornes de l'inductance L : $v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
- aux bornes du condensateur C : $v_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$

La tension aux bornes du circuit est : $v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$

Supposons que le courant $i(t)$ soit sinusoïdal, de la forme $i(t) = I_M \cos(\omega t)$.

Alors :

$$v_R(t) = RI_M \cos(\omega t)$$

$$v_L(t) = -L\omega I_M \sin(\omega t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C\omega} I_M \sin(\omega t)$$

Ce qui donne :

$$v(t) = RI_M \cos(\omega t) - \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) I_M \sin(\omega t)$$

2. Impédances

R , $L\omega$ et $1/C\omega$ sont les modules des impédances des trois composants de ce circuit.

En faisant apparaître l'impédance totale équivalente, Z_{eq} , de la mise en série de ces trois composants, on a alors :

$$|Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}, \quad \arg(Z_{eq}) = \varphi = \text{Arc tan} \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \right)$$

$$v(t) = I_M \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2} \left[\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \cos(\omega t) - \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}} \sin(\omega t) \right]$$

Il est possible de poser $\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}}$.

On aboutit à

$$v(t) = I_M |Z_{eq}| \cos(\omega t + \varphi)$$

3. Construction de Fresnel

Si l'on prend le vecteur représentant le courant comme référence des phases, on aboutit alors à la **construction de Fresnel** présentée figure 10 pour la somme vectorielle des trois tensions (car mise en série des composants).

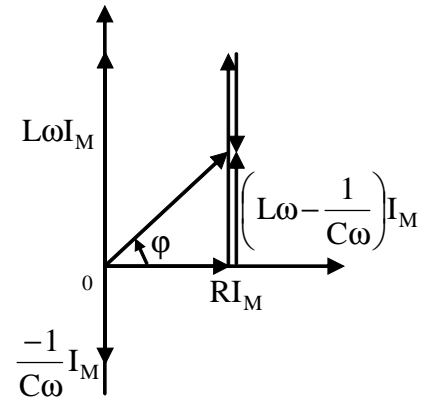
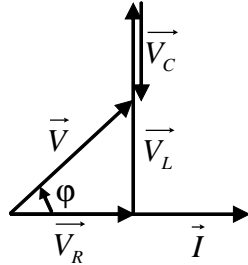


Fig. 10

4. Utilisation des nombres complexes

On peut considérer que :

$i(t)$ comme la partie réelle d'un nombre complexe : $i(t) = I_M \cos(\omega t) = \text{Re}(I_M e^{j\omega t})$

de même pour la tension aux bornes du circuit : $v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}(V_M e^{j(\omega t + \varphi)})$

On pose $\underline{I}(t) = I_M e^{j\omega t}$ et $\underline{V}(t) = V_M e^{j(\omega t + \varphi)} = V_M e^{j\omega t} e^{j\varphi} = V e^{j\omega t}$

On a choisi le courant comme origine des phases (comme en électrotechnique).

Le nombre complexe V est appelé **l'amplitude complexe** de la tension. Son module et sa phase sont l'amplitude et la phase de la tension réelle. L'intérêt de cette notation est de mettre l'expression complexe de la tension $\underline{V}(t)$ sous la forme d'un produit d'un terme qui ne dépend que du temps ($e^{j\omega t}$) par un autre terme qui n'en dépend pas ($V = V_M e^{j\varphi}$).

Les différentes tensions complexes sont alors :

$$\underline{V}_R(t) = RI e^{j\omega t} \quad (\text{en phase avec le courant})$$

$$\underline{V}_L(t) = jL\omega I e^{j\omega t} = L\omega I e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} \quad (\text{en avance de phase de } +\frac{\pi}{2} \text{ par rapport au courant})$$

$$\underline{V}_C(t) = \frac{1}{jC\omega} I e^{j\omega t} = \frac{1}{C\omega} I e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (\text{en retard de phase de } -\frac{\pi}{2} \text{ par rapport au courant})$$

La tension aux bornes du circuit est donnée par :

$$\underline{V}(t) = V e^{j\omega t} = RI e^{j\omega t} + jL\omega I e^{j\omega t} + \frac{1}{jC\omega} I e^{j\omega t}$$

Ainsi le temps s'élimine des calculs :
$$V = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) I$$

La relation précédente permet de définir **l'impédance complexe**, Z :

$$Z = \frac{V}{I} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

dont le module est le rapport de l'amplitude de la tension aux bornes du circuit à celle du courant qui le parcourt :

$$|Z| = \left|\frac{V}{I}\right| = \frac{V_M}{I_M} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

et dont la phase, qui est le déphasage entre la tension aux bornes du circuit et le courant, est calculée comme suit :

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$