Nombres complexes – Exercices corrigés

Addition et soustraction

Pour additionner ou soustraire deux nombres complexes, on additionne ou soustrait séparément leurs parties réelles et imaginaires.

Exemple : $(2+3i)+(4+5i)=6+8i$.

Produit

Pour calculer le produit de deux nombres complexes on utilise la double distributivité et la propriété $i^2=-1$.

Exemple : $(2+3i)\times(4+5i)=8+10i+12i+15i^2=-7+22i$.

Quotient

Pour calculer le quotient de deux nombres complexes on multiplie d'abord les deux nombres par le **conjugué** du deuxième puis on simplifie le résultat. Le conjugué d'un nombre complexe a+bi est le nombre a-bi.

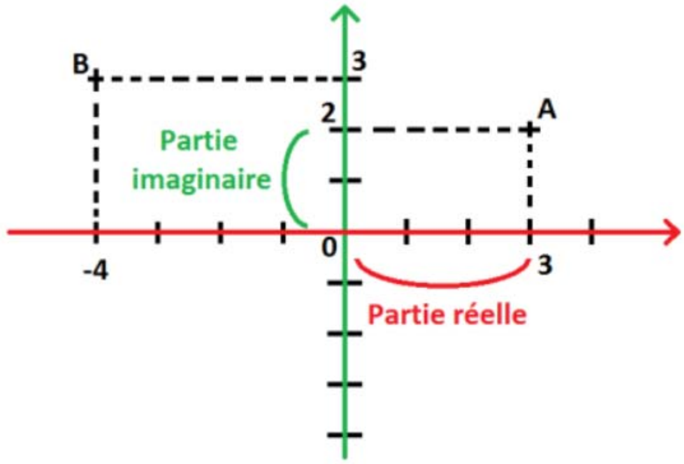
Exemple :

$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{4+5i} &= \frac{(2+3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} \\ &= \frac{8-10i+12i-15i^2}{4^2-(5i)^2} \\ &= \frac{23+2i}{16+25} \\ &= \frac{23}{41}+\frac{2}{41}i\end{aligned}$$

Représentation graphique

Si on note $z_A = 3+2i$, cela signifie que les coordonnées de A sont 3 en abscisse et 2 en ordonnée.
Si on note $z_B = -4+3i$, cela signifie que les coordonnées de B sont -4 en abscisse et 3 en ordonnée :

La partie réelle se trouve en abscisse, la partie imaginaire en ordonnée



Quantité conjuguée – forme cartésienne

$$z_A = \frac{3+2i}{4-5i} \quad \rightarrow \quad z_A = \frac{(3+2i)\times(4+5i)}{(4-5i)\times(4+5i)} \quad \rightarrow \quad z_A = \frac{12+15i+8i-10}{16+20i-20i+25}$$

$$z_A = \frac{2+23i}{41} \quad \rightarrow \quad z_A = \frac{2}{41} + \frac{23i}{41}$$

Calcul de module

1) Déterminer le module de $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + i$.

2) Déterminer le module des nombres suivants, en utilisant si possible la question 1)

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i} \qquad -\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) \qquad \frac{(1-i\sqrt{3})^2}{(1-i)^3} \qquad \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \qquad z_1 + z_2$$

Rappels :

$z = a + ib \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad |\bar{z}| = |z|$

$|-z| = |z| \qquad |z^n| = |z|^n$

1) $z_1 = 1 - i\sqrt{3} = \underbrace{1}_{a} + i \times \underbrace{(-\sqrt{3})}_{b}$ $\quad |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$z_2 = -1 + i = \underbrace{-1}_{a} + i \times \underbrace{1}_{b}$ $\quad |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

2) $$\left|\frac{-1+i\sqrt{3}}{-1-i}\right| = \frac{|-1+i\sqrt{3}|}{|-1-i|} = \frac{|-z_1|}{|\bar{z}_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$-z_1 = -1 + i\sqrt{3} \qquad\qquad = \sqrt{2}$$

$$\bar{z}_2 = \overline{-1+i} = -1 - i$$

$$\left|-\frac{1}{2} \times (-1 + i\sqrt{3})\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| \times |-1+i\sqrt{3}|$$

$$= \frac{1}{2} \times |-z_1| = \frac{1}{2} \times |z_1| = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = 1$$

$$\left|\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{(1-i)^3}\right| = \frac{|(1-i\sqrt{3})^2|}{|(1-i)^3|} = \frac{|1-i\sqrt{3}|^2}{|1-i|^3} = \frac{|z_1|^2}{|-z_2|^3}$$

$$= \frac{2^2}{|z_2|^3} = \frac{4}{\sqrt{2}^3} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}^3 = \underbrace{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}_{2} \times \sqrt{2}$$
$$2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i\right| = \left|\frac{1}{4} \times (1-i)\right| = \left|\frac{1}{4}\right| \times |1-i|$$

$$= \frac{1}{4} \times |-z_2| = \frac{1}{4}|z_2| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$z_2 = -1 + i$$

$$-z_2 = 1 - i$$

$|z_1 + z_2| = |\cancel{1} - i\sqrt{3} + (\cancel{-1}) + i| = |-i\sqrt{3} + i|$

$= |i \times (-\sqrt{3} + 1)| = |i| \times |\underbrace{-\sqrt{3}+1}_{x}|$

$\cancel{|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|}$

$= 1 \times (\sqrt{3} - 1)$

$= \sqrt{3} - 1$

$|i| = |\underbrace{0}_{a} + i \times \underbrace{1}_{b}| = \sqrt{0+1} = 1$

Si $x \geq 0$ $|x| = x$

Si $x \leq 0$ $|x| = -x$

$x = -\sqrt{3} + 1 < 0$

$-x = \sqrt{3} - 1$

Écrire un nombre complexe sous forme trigonométrique et exponentielle

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 = 3 + i \times 0$ $\quad z_2 = -4 = -4 + i \times 0$ $\quad z_3 = i = 0 + i \times 1$ $\quad z_4 = -3i = 0 + i \times (-3)$

$z_5 = 2 + 2i$ $\quad z_6 = 2 - 2i$ $\quad z_7 = -\sqrt{3} + 3i$

2) Écrire ces nombres complexes sous forme trigonométrique et exponentielle.

1) $|z_1| = 3$ $\quad \text{Arg}(z_1) = 0$ $\qquad$ 2) $z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0) = 3 \times e^{i \times 0}$

$|z_2| = 4$ $\quad \text{Arg}(z_2) = \pi$ $\qquad z_2 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = 4e^{i\pi}$

$|z_3| = 1$ $\quad \text{Arg}(z_3) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad z_3 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\pi/2}$

$|z_4| = 3$ $\quad \text{Arg}(z_4) = -\frac{\pi}{2}$ $\qquad z_4 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$|z_5| = 2\sqrt{2}$ $\quad \text{Arg}(z_5) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad z_5 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$|z_6| = 2\sqrt{2}$ $\quad \text{Arg}(z_6) = -\frac{\pi}{4}$ $\qquad z_6 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$|z_7| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\alpha = \text{Arg}(z_7)$ $\quad \left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \alpha = \frac{2\pi}{3}$

$z_7 = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2\sqrt{3}\, e^{i 2\pi/3}$

$z = \underset{\mathbb{R}}{a} + i\underset{\mathbb{R}}{b}$ → forme trigo/expo :

1) $|z|$ → graphiquement

→ Calcul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2) $\text{Arg}(z)$ → graphiquement

→ Calcul : $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{a}{|z|} \\ \sin\alpha = \frac{b}{|z|} \end{array}\right.$

→ (+) cercle trigo ⟼ α

3) $z = |z|(\cos\alpha + i \sin\alpha) = |z| e^{i\alpha}$

www.jaicompris.com