Généralités sur les fonctions

- Définitions :

Domaine de définition : D_f une partie de IR : ensemble des valeurs de x pour lesquelles on sait évaluer la fonction

On note f : $D_f \rightarrow$ IR
$x \rightarrow f(x)$

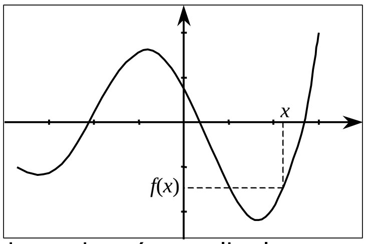
Une fonction f de D_f vers IR associe, à tout élément x de D_f, un réel et un seul noté f (x).
f(x) est l'image par f de x.
Pour tout réel $x \in D_f$, on appelle **image** de x par f, le nombre unique f(x)
Pour tout réel a, on appelle **antécédent** de a par f, le (ou les) réels x tels que f (x) = a.
Remarque : un réel peut avoir un ou plusieurs antécédents ou n'en avoir aucun.
S'il n'y a qu'un seul antécédent, on dira alors que f réalise une bijection.

Méthodes :
Pour déterminer l'image d'un réel par une fonction définie par une formule, il suffit de remplacer x par la valeur désirée dans l'expression de f(x).
Pour déterminer le ou les antécédents par f d'un réel a, il suffit de résoudre l'équation f(x) = a.

- Représentation graphique :

Dans un repère donné, la courbe C représentative de la fonction f est l'ensemble des points de coordonnées (x ; f (x)) où x décrit l'ensemble de définition de f .

On dit que $y = f(x)$ est une équation de la courbe représentative de f dans ce repère.



Sur l'axe des abscisses, on lira alors les antécédents et sur l'axe des ordonnées on lira les images.

- Fonctions paires et impaires :

Définition : Une fonction f est **paire** si et seulement si D_f est symétrique par rapport à zéro et $f(-x)=f(x)$ Interprétation graphique : Dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.	Définition : Une fonction f est **impaire** si et seulement si D_f est symétrique par rapport à zéro et $f(-x)=-f(x)$ Interprétation graphique : Dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative admet le point O comme centre de symétrie.

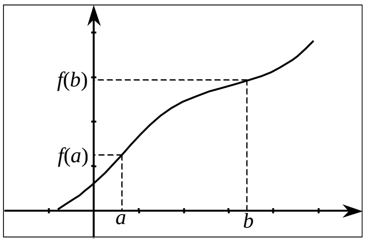
- Fonctions périodiques :

Définition :
Une fonction f est dite périodique de période T si et seulement si , pour tout réel $x \in D_f$, on a : $f(x + T) = f(x)$.

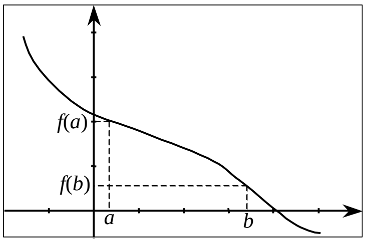
Conséquence graphique :
Si f est périodique de période T il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T « ex : $[-\frac{T}{2} ; \frac{T}{2}]$ comme cela on profitera de la symétrie par rapport à zéro » ; puis déduire la courbe de f sur D_f par translation de vecteur de coordonnées (T,0) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Fonctions croissantes et décroissantes :

Soit f une fonction définie sur D_f et I un intervalle de D_f.



On dit que f est **croissante** sur I lorsque, quels que soient les nombres a et b de I :
si a < b alors f(a) ≤ f(b).

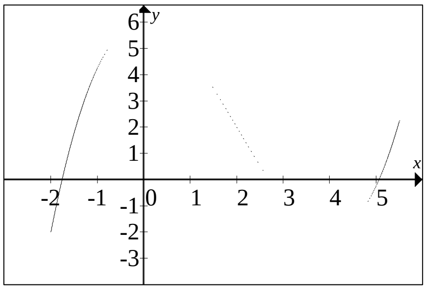


On dit que f est **décroissante** sur I lorsque, quels que soient les nombres a et b de I :
si a < b alors f(a) ≥ f(b).

<u>Tableau de variation :</u>
Une fonction peut être croissante sur un intervalle et décroissante sur un autre. Pour résumer ces résultats, on les présente dans un tableau de variation.

Exemple du tableau de variation de la fonction *f* représentée.

x	–2		0		4		5,5
Variations de *f*	–2	↗	6	↘	–2	↗	2,2

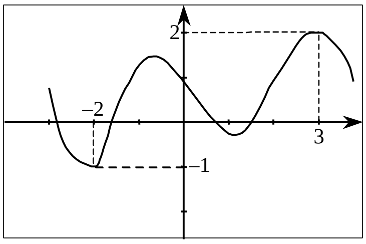


- Extremum

Soit la fonction f définie sur un intervalle I.
La fonction f admet un **maximum** M en a si f(a)=M et si, pour tout x de I, f(x)≤M.
La fonction f admet un **minimum** M en a si f(a)=M et si, pour tout x de I, f(x)≥M.

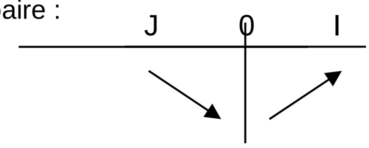
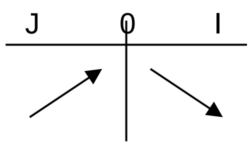
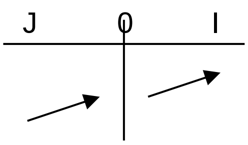
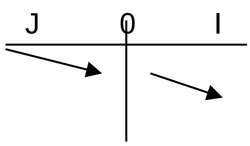
Exemple
La fonction *f* représentée ci-contre admet le maximum 2 atteint en *x* = 3 car f(3)=2 et pour tout x f(x)<2

Elle admet le minimum –1 atteint en *x* = –2 car f(-2)=-1 et pour tout x f(x)>-1



- **Conséquences de la parité sur ses variations :**

I et J sont des intervalles symétriques par rapport à 0.

Si f est paire :  *Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur J*	Si f est paire :  *Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur J*
Si f est impaire :  *Si f est croissante sur I, alors f est croissante sur J*	Si f est impaire :  *Si f est décroissante sur I, alors f est décroissante sur J*

- Composée de fonctions :

  La fonction *f* est définie sur I et *g* est définie sur J.

  On appelle la fonction notée ***f* o *g***, la fonction **composée de g suivie de f** qui au réel $x \in$ J associe le réel $f\,(g(x))$ si $g(x) \in$ I., autrement dit :
  J $\to$ I $\to$ IR
  x $\to$ g (x) $\to$ f o g (x) =f (g(x))

  On appelle la fonction notée ***g* o *f***, la fonction **composée de f suivie de g** qui au réel $x \in$ I associe le réel $g\,(f(x))$ si $f(x) \in$ J., autrement dit :
  I $\to$ J $\to$ IR
  x $\to$ f (x) $\to$ g o f (x) =g (f(x))

  Attention, en général, f o g (x) $\neq$ g o f (x).

  La composée de 2 fonctions croissantes est une fonction croissante.
  La composée de 2 fonctions décroissantes est une fonction croissante.
  La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction décroissante.

Comment déterminer un ensemble de définition :

- Si l'expression de f (x) admet un quotient, alors x appartient à l'ensemble de définition D_f si et seulement si le dénominateur est non nul.
- Si l'expression de f (x) admet une racine carrée, alors x appartient à l'ensemble de définition D_f si et seulement si l'expression sous la racine est positive.

Comment déterminer qu'une fonction est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre :