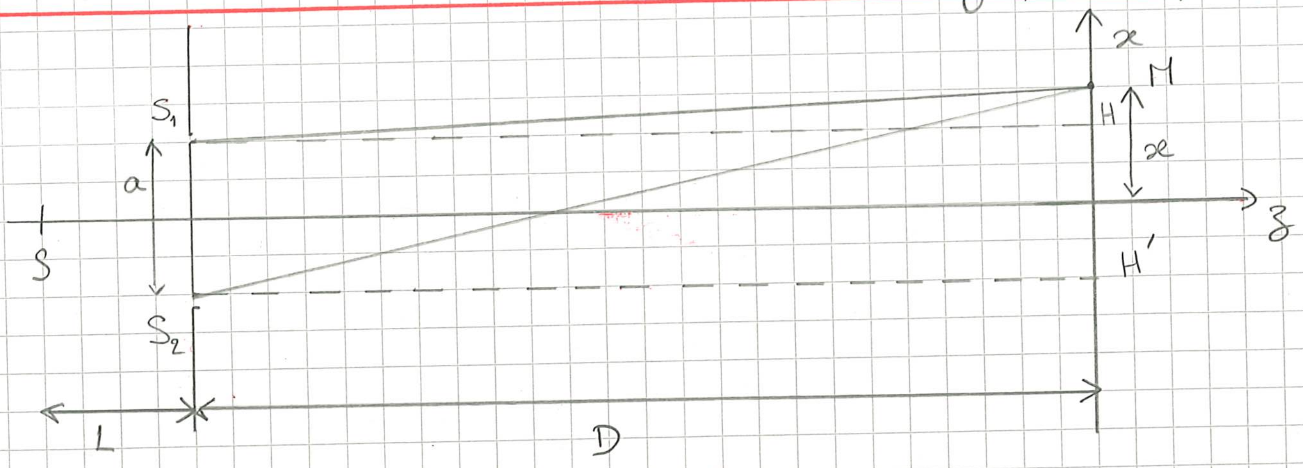
4- Exercice de cours : Les trous d'Young pas à pas



a) Les trous S_1 et S_2 sont équidistants de la source S. Il n'y a donc pas de différence de marche entre les ondes provenant de S et arrivant en S_1 ou S_2.

$(SS_1) = (SS_2) \Rightarrow$ S_1 et S_2 sont en phase

b) On va se placer dans les triangles rectangles S_1HM et $S_2H'M$.

Dans S_1HM on a :

$$S_1M^2 = S_1H^2 + HM^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \text{Pythagore}$$

$$S_1M^2 = D^2\left(1 + \left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2\right)$$

$$S_1M = D\left(1 + \left(\frac{x - a/2}{D}\right)^2\right)^{1/2}$$

Dans $S_2H'M$ on a :

$$S_2M^2 = S_2H'^2 + H'M^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \rightarrow \text{Pythagore}$$

$$S_2M^2 = D^2\left(1 + \left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2\right)$$

$$S_2M = D\left(1 + \left(\frac{x + a/2}{D}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta L = S_2M - S_1M = D\left(\left[1 + \left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2\right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2\right]^{1/2}\right)}$$

c) On sait que $x \ll D$ et $a \ll x \ll D$

$\Rightarrow \left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2$ et $\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2 \ll 1$

$\Rightarrow$ on peut faire un développement limité :

$$(1+y)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2}y$$

$$S_1M \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{D} - \frac{a}{2D}\right)^2\right)$$

et

$$S_2M \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{D} + \frac{a}{2D}\right)^2\right)$$

$$\Delta L = S_2M - S_1M = D\left[\cancel{1} + \frac{1}{2}\left(\cancel{\left(\frac{x}{D}\right)^2} + \frac{ax}{D^2} + \cancel{\frac{a^2}{4D^2}}\right) - \cancel{1} - \frac{1}{2}\left(\cancel{\left(\frac{x}{D}\right)^2} - \frac{ax}{D^2} + \cancel{\frac{a^2}{4D^2}}\right)\right]$$

$$= D\left[\frac{1}{2}\frac{ax}{D^2} + \frac{1}{2}\frac{ax}{D^2}\right]$$

$$= D\,\frac{ax}{D^2}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{ax}{D}}$$

d) $$\boxed{\Delta\phi} = 2\pi\frac{\Delta L}{\lambda} = \boxed{2\pi\frac{ax}{\lambda D}}$$

e) S_1 et S_2 sont deux sources obtenues à partir de S, elles sont donc cohérentes mutuellement. Elles sont également monochromatique de même longueur d'onde et de même intensité car les trous sont de même dimension.

On peut donc utiliser l'expression du cours :

$$\boxed{I = 2I_0(1 + \cos(\Delta\phi))}$$

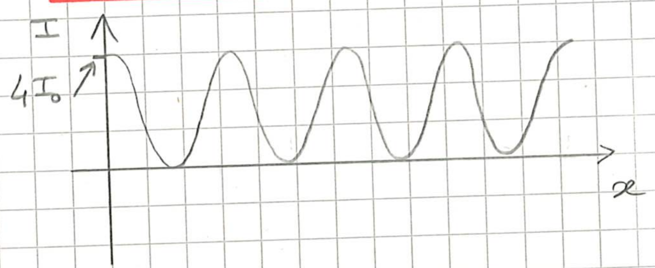
$$I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\phi_{S_1S_2} + \frac{2\pi\,\Delta L}{\lambda}\right)\right)$$

avec $\phi_{S_1S_2} = 0$ d'après a)

et $\Delta L = \dfrac{ax}{D}$

$$\Longrightarrow \boxed{I = 2I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\, a x}{\lambda D}\right)}$$

f) Sur l'écran on observe une alternance de franges brillantes et sombres.



Ecran

g) L'interfrange i est la distance entre 2 max OU 2 min d'intensité.

On recherche les maxima de I (ou les minima)

$I = I_{max}$

$\Longleftrightarrow \cos\left(\dfrac{2\pi\, a x}{\lambda D}\right) = 1$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\cancel{2\pi}\, a x}{D\lambda} = k \times \cancel{2\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ à préciser !

$$\boxed{x_k = k\,\frac{\lambda D}{a}}$$

$$\boxed{i} = x_{k+1} - x_k = \boxed{\frac{\lambda D}{a}}$$

AN : $i = \dfrac{656{,}5 \cdot 10^{-9} \times 1}{0{,}25 \cdot 10^{-3}} = 2{,}62 \text{ mm}$

De même en recherchant les min de I

$I = I_{min}$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \frac{2\pi a x}{\lambda D} = (2k'+1)\pi \quad k' \in \mathbb{Z}$

$\frac{a x}{\lambda D} = k' + \frac{1}{2}$

$x_{k'} = \frac{\lambda D}{a}\left(k' + \frac{1}{2}\right)$

$i = x_{k'+1} - x_{k'} = \frac{\lambda D}{a}\left(\cancel{k'} + 1 - \cancel{k'} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\lambda D}{a}$

h) Avec un tel dispositif, connaissant D et a, facilement accessibles, il est possible, par simple mesure de l'interfrange i, d'accéder à λ !
C'est ce que fit le jeune Thomas Young !