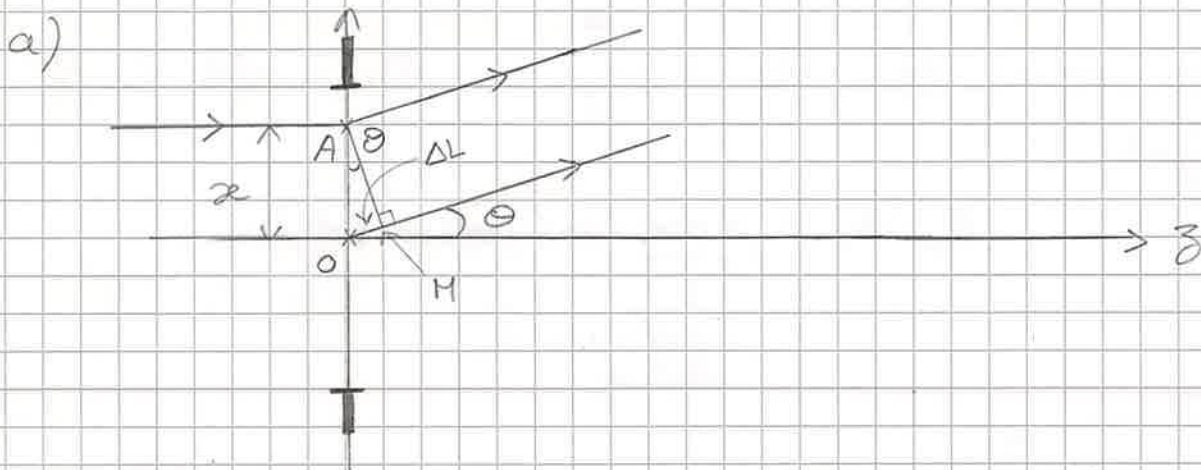


3. Exercice de cours - Diffraction par une fente pas à pas ...



- i) Sur le schéma précédent, on a projeté le point A en M. M et A appartiennent à un front d'onde. Le déphasage entre les 2 rayons représentés sur le schéma s'exprime à partir de $\Delta L = OM$, leur différence de marche.

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} OM$$

On peut exprimer OM à partir de θ et x

$$\widehat{AOM} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \text{et} \quad \widehat{OAM} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \frac{\pi}{2} = \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \frac{OM}{x} \Rightarrow OM = x \sin \theta$$

On en déduit le déphasage $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \theta$

ii) Le théorème de superposition des champs indique

$$E_T(\theta) = \sum_x E_x(\theta) = \int_a E_x(\theta) dx$$

On somme tous les champs sur l'ensemble de la fente.

$$E_x(\theta) = \underbrace{K dx}_{\substack{\text{amplitude du} \\ \text{champ}}} \cos(\omega t + \Delta\phi)$$

$$E_T(\theta) = \int_{-a/2}^{a/2} K dx \cos(\omega t + \Delta\phi) \quad \text{avec} \quad \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin\theta$$

iii) On calcule l'intégrale

$$\begin{aligned} E_T(\theta) &= \int_{-a/2}^{a/2} K \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin\theta\right) dx \\ &= K \left[\frac{\lambda_0}{2\pi \sin\theta} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin\theta x\right) \right]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{K}{\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin\theta} \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{\lambda_0} \sin\theta a\right) - \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{\lambda_0} \sin\theta a\right) \right] \end{aligned}$$

⚠ La variable sur laquelle on intègre est x.

$$\text{or } \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

$$\Rightarrow E_T(\theta) = \frac{K}{\frac{2\pi}{\lambda_0} \sin\theta} \times 2 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0} \sin\theta a\right)$$

$$E_T(\theta) = \frac{K a}{\frac{\pi}{\lambda_0} \sin\theta} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{\lambda_0} a \sin\theta\right)$$

$$E_T(\theta) = k a \cos(\omega t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \sin \theta}{d_0}\right)$$

avec $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

inv. $I(\theta) = \langle E_T(\theta)^2 \rangle$

$$= k^2 a^2 \langle \cos^2(\omega t) \times \underbrace{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{d_0}\right)}_{\text{indépendant du temps}} \rangle$$

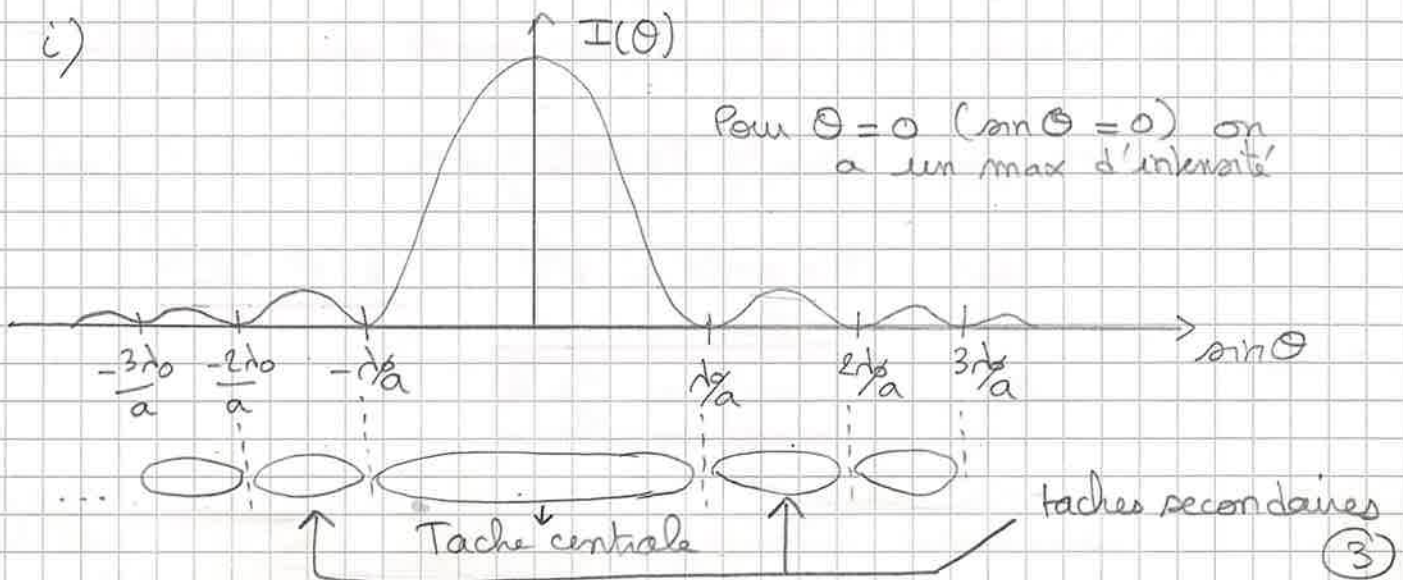
$$= k^2 a^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{d_0}\right) \underbrace{\langle \cos^2(\omega t) \rangle}_{\text{" } \frac{1}{2} \text{ car } \langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{2}}$$

" $\frac{1}{2}$ car $\langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{2}$

$$I(\theta) = \frac{k^2 a^2}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin \theta}{d_0}\right)$$

$$I(\theta) = I_0 \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \sin \theta}{d_0}\right) \right]^2 \quad \text{avec } I_0 = \frac{k^2 a^2}{2}$$

c) i)



Le max central est 2 x plus large et beaucoup plus intense que les max secondaires.

ii) La valeur maximale de l'intensité s'obtient pour $\sin\theta = 0$

$$\underline{I_{\max}} = I_0 \underbrace{(\text{sinc}(0))^2}_1 = \underline{I_0}$$

L'intensité du max secondaire vaut seulement 4,5% de $I_0 \rightarrow I_{\max \text{ 2nd}} = 0,045 I_0$! (cf. cours)

Presque toute l'intensité est concentrée dans la tache centrale (84% cf. cours).

→ Calcul: on cherche $I_{\max \text{ sec}}$.

Le max secondaire s'obtient pour un argument égal à $\frac{3\pi}{2}$ (cf. exo 1 TD Diffraction).

$$\left(\text{sinc}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)^2 = \frac{(\sin(3\pi/2))^2}{\frac{9\pi^2}{4}} = \frac{1}{9\pi^2} = \underline{0,045}$$

$$\Rightarrow \underline{I_{\max \text{ sec}} = 0,045 I_0}$$

iii) On cherche les valeurs de $\sin\theta$ qui annulent $I(\theta)$

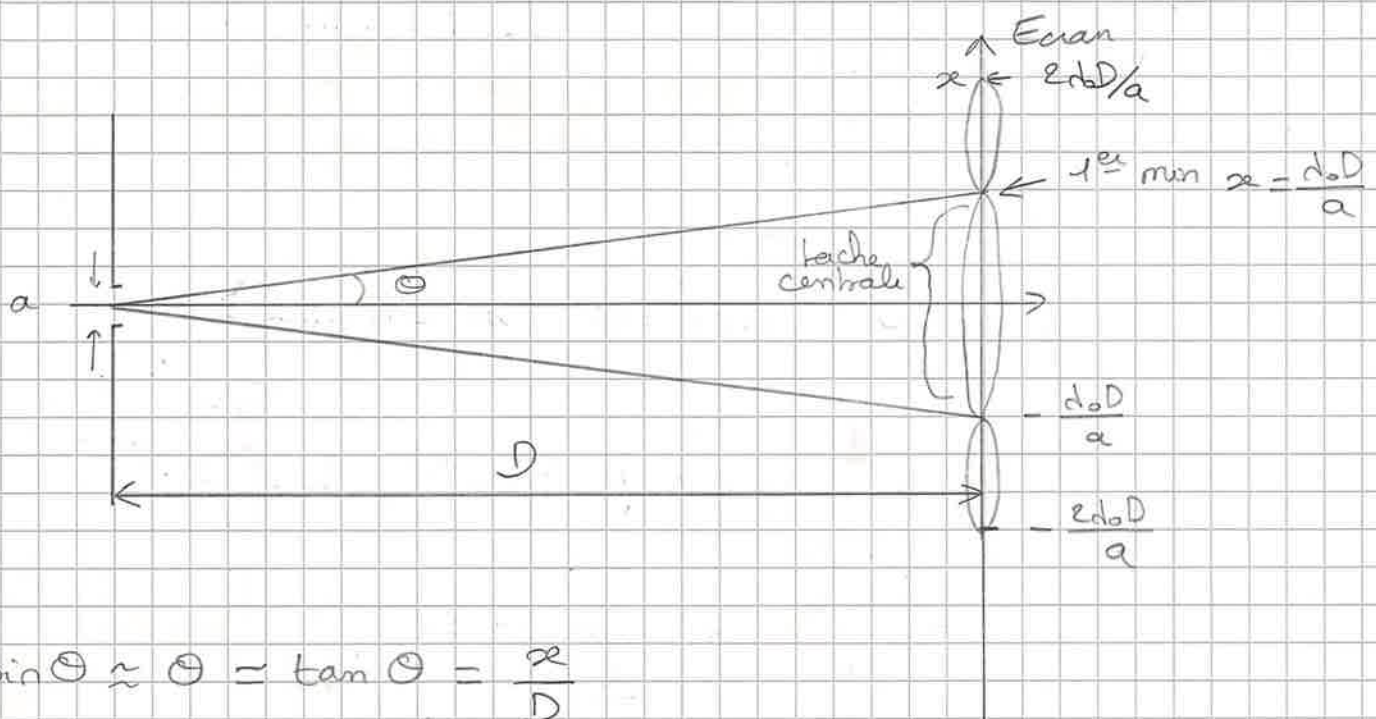
$$I(\theta) = 0 \Leftrightarrow \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{d_0}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi a \sin\theta}{d_0} = k\pi \quad \underline{k \in \mathbb{Z}^*}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\sin\theta = \frac{d_0}{a} k}$$

car $\text{sinc}(0) = 1$

ici) La figure de diffraction est observée sur un écran très loin de la fente : $D \gg a$ $D \gg d_0$



$$\sin \theta \approx \theta = \tan \theta = \frac{x}{D}$$

$$\Rightarrow I(x) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\pi a x}{d_0 D} \right)$$

$$I(x) \text{ s'annule pour } \frac{\pi a x}{d_0 D} = k \pi \quad \underline{k \in \mathbb{Z}^*}$$

$$x_k = \frac{d_0 D}{a} k$$

La tache centrale a pour largeur $L = x_1 - x_{-1}$

$$L = \frac{2 d_0 D}{a}$$

Les taches secondaires ont pour largeur : $L' = x_2 - x_1$

$$L' = \frac{d_0 D}{a} = \frac{L}{2}$$