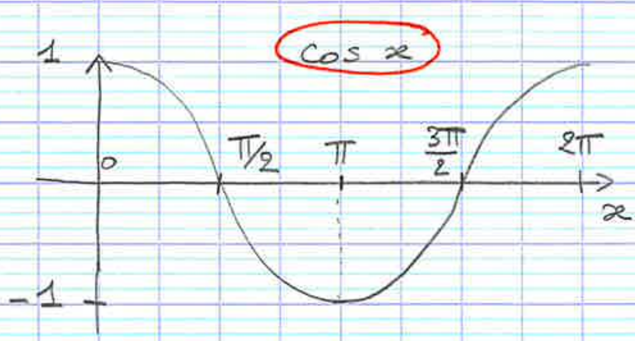
Rappels de trigonométrie
(optique ondulatoire BUT2 Alt)

1. Représentations graphiques

a)

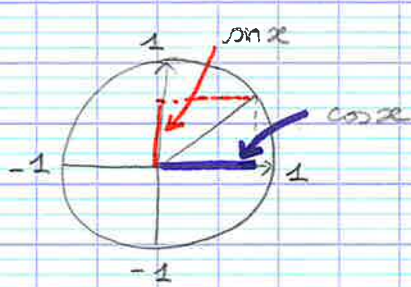


$\cos(0) = 1$

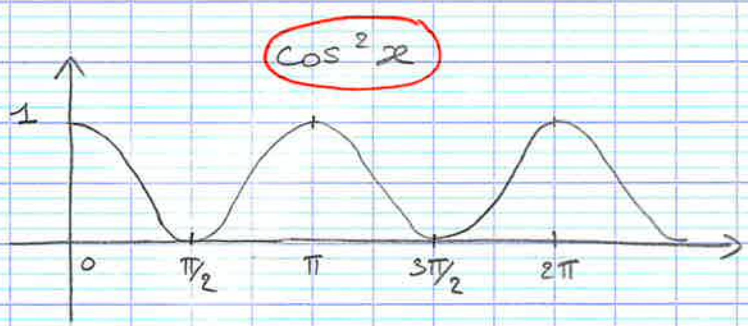
$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\cos(\pi) = -1$

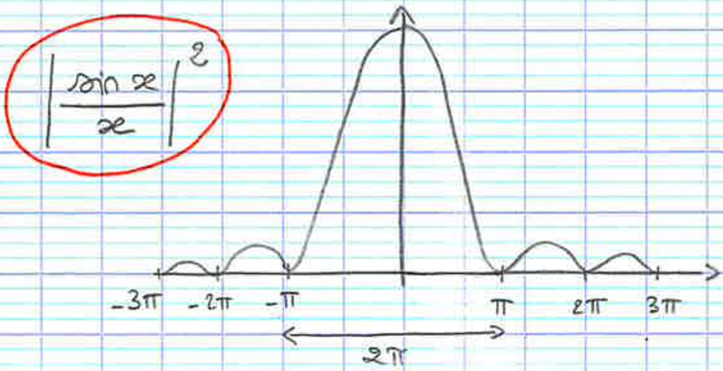
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$



b)



c)



$\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = k\pi$

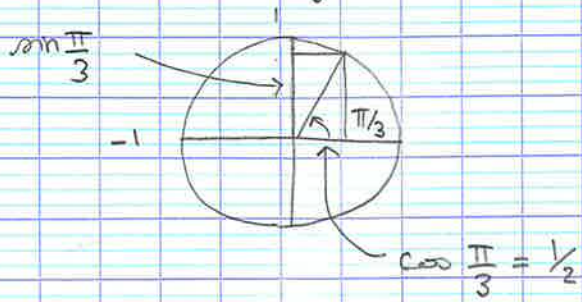
$k \in \mathbb{Z}$

ici $x = 0$ interdit

C'est la fonction sinus cardinal au carré.
Utile pour le chapitre Diffraction.

2. Simplifiez

Cercle trigo bien utile !



a) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \underline{-\sin x}$

c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{-\cos x}$

3. Démontrez

$$1 + \cos x = 2\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$1 + \cos x = \cos 0 + \cos x$$

$$= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \underbrace{\cos\left(-\frac{x}{2}\right)}_{= \cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$= \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ car $\cos(x) = \cos(-x)$

$$= 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

4. Exprimez ou calculez

a) $\dfrac{d\cos(\omega t + \phi)}{dt} = \underline{-\omega\sin(\omega t + \phi)}$

b) $\dfrac{d\sin(\omega t + \phi)}{dt} = \underline{\omega\cos(\omega t + \phi)}$

c) $\displaystyle\int_0^T \sin(\omega t + \phi)\,dt = \left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t + \phi)\right]_0^T$

$$= -\frac{1}{\omega}\left[\cos(\omega T + \phi) - \cos(\phi)\right]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \cos(\omega T + \phi) = \cos(2\pi + \phi) = \cos\phi$$

$$\Rightarrow \cos(\omega T + \phi) - \cos\phi = 0$$

$$\int_0^T \sin(\omega t + \phi)\,dt = \underline{0}$$

d) $\displaystyle\int_0^T \cos(\omega t + \phi)\, dt = \frac{1}{\omega}\left[\sin(\omega t+\phi)\right]_0^T$

La moyenne d'un cos ou d'un sin sur une période est nulle.

$$= \frac{1}{\omega}\left[\sin(\omega T+\phi) - \sin(\phi)\right]$$

$$= 0 \quad \text{car} \quad \sin(\underbrace{\omega T}_{\omega T = 2\pi} + \phi) = \sin\phi$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$

$\sin x \simeq x$ lorsque $x \ll 1 \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} \simeq \dfrac{x}{x} \simeq 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

f) $\cos x = 1 \iff x = k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\cos^2 x = 0 \iff \cos x = 0$

$\iff x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Bonus : calcul de la valeur moyenne d'un $\cos^2 t$

$$\langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 t\, dt = 1/2$$ (voir démo ci-dessous)

On a montré $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$

$\Rightarrow 1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$

$\Rightarrow \cos^2 t = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2t)$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2T}\int_0^T dt + \underbrace{\frac{1}{2T}\int_0^T \cos 2t}_{=0\ !}$$

moyenne d'un cosinus

$$= \frac{1}{2T}\left[t\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2T} \times (T - 0) = \frac{1}{2}$$

→ à connaître !

TD 1 - Bases de l'optique ondulatoire

1. Questions de cours

a) $\lambda_0 = \dfrac{c}{f}$ $\qquad$ $\lambda = \dfrac{\lambda_0}{n} = \dfrac{c}{nf} = \dfrac{v}{f}$

b) $v = \dfrac{c}{n}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda_0}{n}$$

λ_0 : longueur d'onde dans le vide

λ : longueur d'onde dans un milieu d'indice n

L'indice optique a pour effet de diminuer la période spatiale λ (ou longueur d'onde) comparée à la période spatiale λ_0 dans le vide.

$$\lambda < \lambda_0$$

c) $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda} \vec{u_z}$

$\hookrightarrow$ direction de propagation de l'onde

u_z vecteur unitaire

d) $\boxed{I(z) = \langle E^2(z,t) \rangle}$

e) $\boxed{E = E_0 \cos(\omega t - kz + \phi_0)}$

E_0 = amplitude

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ = pulsation

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ = vecteur d'onde

ϕ_0 = phase à $t=0$ en $z=0$

f)
$$I = \langle E^2 \rangle = \langle E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \phi_0) \rangle$$
$$= E_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - kz + \phi_0) \rangle}_{1/2} = \frac{E_0^2}{2}$$

g) $E = E_0 \cos(\underbrace{\omega t + kz + \phi_0}_{\phi(z,t)})$

Que fait z lorsque $t \nearrow$?
On s'intéresse au déplacement d'un front d'onde. Un front d'onde est l'ensemble des points pour lesquels $\phi(z,t) = cste$

$\Rightarrow \omega t + kz + \phi_0 = cste$
$\Leftrightarrow kz = cste - \phi_0 - \omega t$

$\Leftrightarrow z = \underbrace{\frac{cste}{k} - \frac{\phi_0}{k}}_{\to cste'} - \frac{\omega}{k} t = cste' - v t$

$v = \frac{\omega}{k}$

C'est la vitesse de déplacement du front d'onde.

$\boxed{z = cste - vt} \Rightarrow t \nearrow \; z \searrow$, l'onde se déplace vers les z décroissants / négatifs.

2. Vrai ou Faux

a) Faux. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires
b) Vrai
c) Vrai
d) Faux. Dans le visible $\lambda \simeq 600\,nm$

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.10^8}{6.10^{-7}} = \frac{1}{2}.10^{15} = 5.10^{14}$$
$$= 500\,THz$$

10^{12}

e) Faux. Les détecteurs sont sensibles uniquement à une moyenne du flux énergétique.
f) Faux
↪ ex: $\langle \cos^2 t \rangle = 1/2 \neq \langle \cos t \rangle^2 = 0$

3. Casque anti-bruit actif

a) Le bruit est un signal de fréquence f, d'amplitude b_0 et de phase ϕ donc :

$$\underline{b(t) = b_0 \cos(\omega t - kz + \phi)} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

On choisit $z = 0$ pour simplifier l'expression.

$$\underline{b(t) = b_0 \cos(2\pi f t + \phi)}$$

b) Afin d'annuler $b(t)$, le signal $c(t)$ doit avoir la même fréquence f et la même amplitude b_0 :

$$\underline{c(t) = b_0 \cos(2\pi f t + \psi)}$$

c) Calculs des intensités sonores (moyennes temporelles)

- Sans casque :

$$\begin{aligned} I &= \langle b(t)^2 \rangle \\ &= \langle b_0^2 \cos^2(2\pi f t + \phi) \rangle \\ &= b_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(2\pi f t + \phi) \rangle}_{= 1/2} \\ &= \frac{b_0^2}{2} \end{aligned}$$

car $\langle \cos^2 t \rangle = \frac{1}{2}$

- Avec le casque : $I = \langle (b(t) + c(t))^2 \rangle$

$$I = \langle b_0^2 \cos^2(2\pi f t + \phi) + 2 b_0^2 \cos(2\pi f t + \phi) \cos(2\pi f t + \psi)$$
$$+ b_0^2 \cos^2(2\pi f t + \phi) \rangle$$

or $\langle a + b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$ donc

$$I = b_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(2\pi f t + \phi) \rangle}_{1/2} + 2 b_0^2 \underbrace{\langle \cos(2\pi f t + \phi) \cos(2\pi f t + \psi) \rangle}_{\hookrightarrow \text{ à calculer !}} + b_0^2 \underbrace{\langle \cos^2(2\pi f t + \psi) \rangle}_{1/2}$$

$$\langle \cos(2\pi f t + \phi)\cos(2\pi f t + \psi) \rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{2}\left(\cos(4\pi f t + \phi + \psi) + \cos(\phi - \psi)\right) \right\rangle$$

car $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\langle \cos(4\pi f t + \phi + \psi) \rangle}_{= 0} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle \cos(\phi - \psi) \rangle}_{= \cos(\phi - \psi)}$$

car $\langle \cos t \rangle = 0$ → car indépendant du temps

$$\Rightarrow I = b_0^2 + b_0^2\cos(\phi - \psi) = b_0^2\left(1 + \cos(\phi - \psi)\right)$$

$$= 2b_0^2\cos^2\left(\frac{\phi - \psi}{2}\right)$$ → autre écriture

- Etude du signal :

Cas des ondes en phase : $\phi = \psi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow I = 2b_0^2$

$\Rightarrow$ amplification du bruit !

Cas des ondes en opposition de phase : $\phi = \psi + (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow I = b_0^2\left(1 + \underbrace{\cos((2k+1)\pi)}_{-1}\right) = 0 !$$

$\Rightarrow$ compensation parfaite du bruit !

d) Le casque antibruit reproduit le bruit avec un déphasage de π $\Rightarrow$ c'est donc un micro qui enregistre le bruit, en temps réel, et le restitue via un haut parleur, déphasé de π.

Rq : en pratique le bruit n'est pas monofréquentiel, ce n'est donc pas si simple de le compenser

e) Un casque antibruit est composé d'un micro, d'un haut-parleur, d'une alim, de microprocesseurs pour générer le signal compensateur de bruit. Ex : casque Bose ~ 300 euros