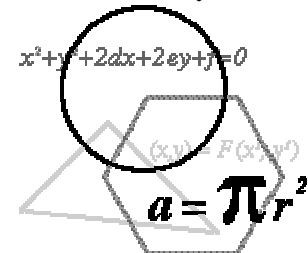


**PREREQUIS A L'ENTREE
EN 1^{ère} ANNEE DUT GC et
1^{ère} année ENEPS**

IUT GRENOBLE

**MEMENTO DE CALCUL MATHEMATIQUE
A L'USAGE DES MATIERES TECHNOLOGIQUES**



1 Unités

1.1 Unités de base du système international

Grandeur	Nom de l'unité de base	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité de courant électrique	ampère	A
Température thermodynamique	kelvin	K
Quantité de matière	mole	mol
Intensité lumineuse	candela	cd

1.2 Unités dérivées du S.I. utilisées en D.U.T. génie civil

Grandeur	Nom	Symbole	Expression
Angle plan	radian	rad	$1 \text{ rad} = 1 \text{ m/m} = 1$
Fréquence	Hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$
Force	Newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
Pression, contrainte	Pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
Energie, travail, quantité de chaleur	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$
Puissance, flux énergétique	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$
Charge électrique, quantité d'électricité	Coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$
Potentiel électrique, différence de potentiel, tension, force électromotrice	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W/A}$
Capacité électrique	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$
Résistance électrique	Ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V/A}$
Energie	Watt.heure	W.h	
Température Celsius	degré Celsius	$^{\circ}\text{C}$	$1 \text{ }^{\circ}\text{C} = 1 \text{ K}$
Flux lumineux	lumen	lm	$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd} \cdot \text{sr}$
Eclairement	lux	lx	$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$

1.3 Unités hors du S.I., mais reconnues

Grandeur	Nom	Symbole	Définition
Niveau de pression, niveau de puissance, indice d'affaiblissement acoustique	bel	B	
Temps	minute heure jour	min h d	1 min = 60 s 1 h = 60 min 1 d = 24 h
Angle plan	degré minute seconde grade	° ' '' gon	1 ° = ($\pi/180$) rad 1 ' = (1/60) ° 1 '' = (1/60) ' 1 gon = ($\pi/200$) rad
Surface	are	a	1 a = 10 ² m ²
Volume	litre	L, l	1 l = 1 dm ³
Masse	tonne	t	1 t = 10 ³ kg

⊗ Remarques : l'accélération de pesanteur sur la terre vaut approximativement $g = 10 \text{ [m/s}^2\text{]}$;

$$1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa} = 0,1 \text{ MPa} ;$$

$$T \text{ [K]} = 273,15 + T \text{ [}^\circ\text{C]} ;$$

des grandeurs sont exprimées par multiplication des unités S.I.. Il est indispensable de les séparer par un point (exemple : mN : milli Newton \neq m.N : mètre Newton).

1.4 Fractions et multiples d'unités

Unité					
fractions d'unité			multiples d'unité		
déci	d	10^{-1}	déca	da	10^1
centi	c	10^{-2}	hecto	h	10^2
milli	m	10^{-3}	kilo	k	10^3
micro	μ	10^{-6}	méga	M	10^6
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^9
pico	p	10^{-12}	téra	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{15}
atto	a	10^{-18}	exa	E	10^{18}
zepto	Z	10^{-21}	zetta	Z	10^{21}
yocto	Y	10^{-24}	yotta	Y	10^{24}

Les multiples et fractions d'unités à connaître par coeur sont indiqués en gras

⊗ Remarque : pour les unités d'ordre 2 (tels que m^2 ...), les puissances sont évidemment à multiplier par 2 !

Pour les unités d'ordre 3 (tels que m^3 ...), les puissances sont évidemment à multiplier par 3 !

⊗ Exemples : $1 \text{ cm}^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$, $1 \mu\text{s}^{-1} = (10^{-6} \text{ s})^{-1} = 10^6 \text{ s}^{-1}$, $1 \text{ mm}^2/\text{s} = (10^{-3} \text{ m})^2/\text{s} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

⊗ Remarque : des erreurs de calcul peuvent être évitées plus facilement si toutes les grandeurs sont exprimées en unité SI (les puissances de 10 étant utilisées à la place des préfixes)

1.5 Nombre de chiffres significatifs

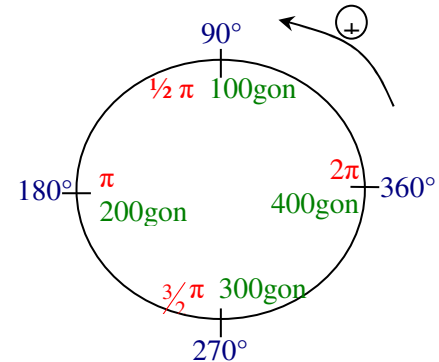
Pour les grandeurs courantes du génie civil (selon l'incertitude), les résultats indiqués doivent comporter 3 chiffres significatifs (3 chiffres à partir du premier non nul – exemples : $1,08 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; $0,0108 \text{ m}$; $10800 \cdot 10^{-6} \text{ m}$).

1.6 Conversions

- Angles :**

$90 \text{ degrés} \leftrightarrow \frac{1}{2} \pi \text{ radians} \leftrightarrow \frac{1}{4} \text{ tour} \leftrightarrow 100 \text{ gon (grades)}$
 $1 \text{ minute } ['] \leftrightarrow 1/60^\circ$
 $1 \text{ seconde } [1''] \leftrightarrow 1/60'$

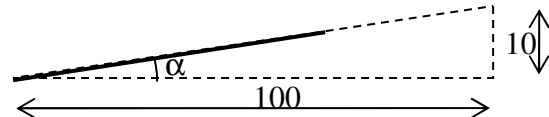
⊗ Remarque : Il est impératif de faire attention au mode de votre calculatrice lorsque vous calculez (degrés, grades ou radians ?) !



$360^\circ = 0^\circ$

- Pentes :**
Une pente de 10% :

$$\alpha = \text{Arctan}(10/100)$$



- Surfaces :**

$100 \text{ m}^2 = 1 \text{ are [a]}$

$10\,000 \text{ m}^2 = 1 \text{ hectare [ha]}$

2 Opérations

2.1 Priorités d'opérations

Les calculs entre parenthèse sont prioritaires devant les calculs en dehors des parenthèses.

Les exposants sont prioritaires devant toute autre opération.

Les multiplications et divisions sont prioritaires devant les additions et soustractions.

Illustration : $a \times b + c = c + a \times b = (a \times b) + c$

2.2 Fractions

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

2.3 Résolution

si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \rightarrow x = \frac{b}{a}$$

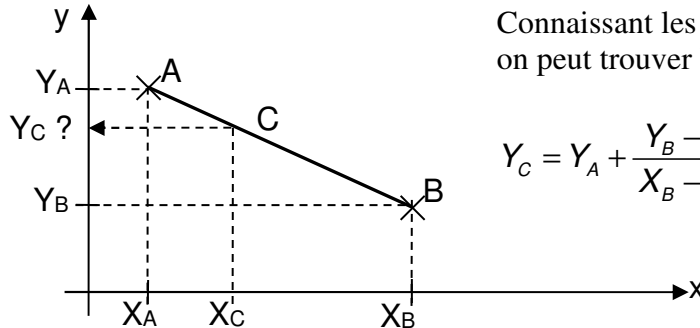
3 Règle de 3 et interpolation linéaire

3.1 Règle de 3 ou produit en croix

a	b
c	x ?

$$x = \frac{b}{a} \times c$$

3.2 Interpolation linéaire



Connaissant les coordonnées des points A et B, on peut trouver Y_C tel que :

$$Y_C = Y_A + \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \times (X_C - X_A)$$

4 Périmètres, aires et volumes usuels

4.1 Périmètres et aires

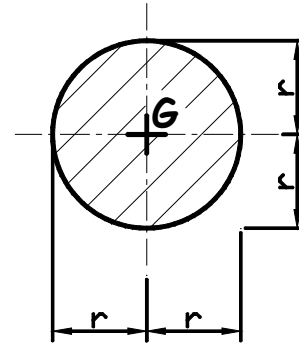
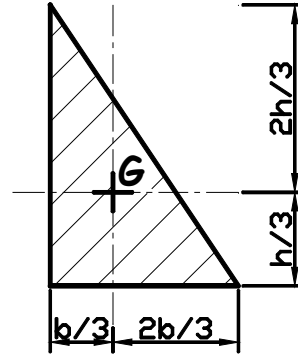
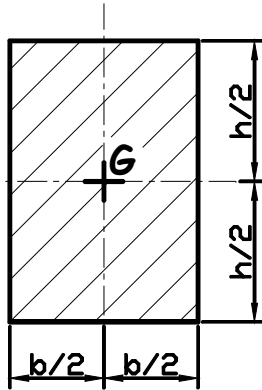
	Périmètre	Aires
Rectangle de coté a et b	$2 \times (a + b)$	$a \times b$
Triangle de base a et de hauteur h		$a \times b / 2$
Disque de diamètre $D = 2 \times r$ (r : rayon)	$2 \times \pi \times r = \pi \times D$	$\pi \times r^2 = \frac{\pi \times D^2}{4}$
Surface d'un cylindre de diamètre r et de longueur L		$2 \pi r L + \pi \times r^2$
Surface d'une sphère		$4 \times \pi \times r^2$
Arc de cercle d'angle α (en degrés)	$2 \times \pi \times r \times \frac{\alpha}{360}$	

4.2 Volumes

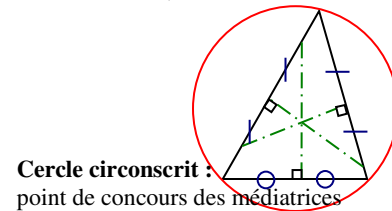
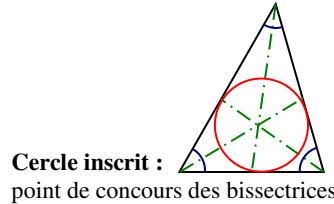
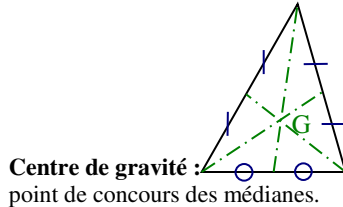
Cylindre d'aire A et une hauteur h	$A \times h$
Sphère de rayon r	$\frac{4}{3} \pi \times r^3$
Pyramide	$\frac{1}{3} \text{Base} \times \text{hauteur}$

4.3 Centre de gravité

Centre de gravité : point de concours des médianes.



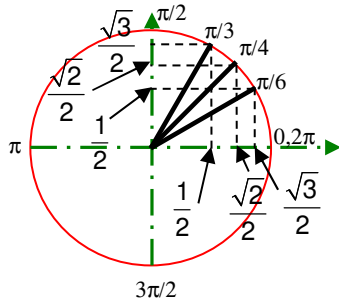
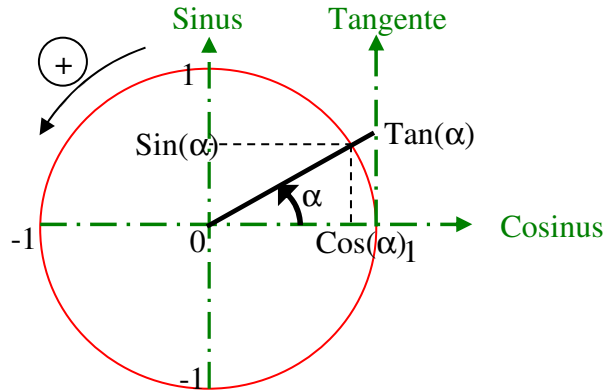
⚠ Remarque : Le centre du cercle inscrit se situe à l'intersection des bissectrices ;
Le centre du cercle circonscrit se situe à l'intersection des médiatrices ;



5 Relations dans un triangle

5.1 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique (sens inverse des aiguilles d'une montre).



5.2 Relations dans le triangle rectangle

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

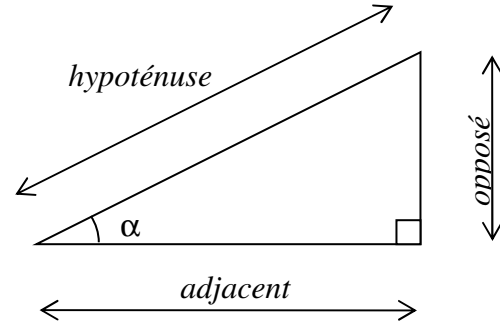
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot an(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\text{hypoténuse}^2 = \text{opposé}^2 + \text{adjacent}^2$$



5.3 Relations trigonométriques de base

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\cos(\theta) \times \sin(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$$

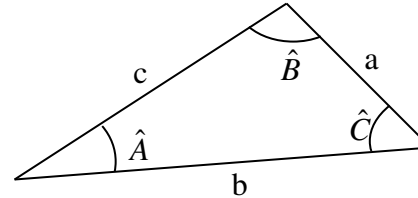
5.4 Relations dans le triangle quelconque

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\frac{a}{\sin(\hat{A})} = \frac{b}{\sin(\hat{B})} = \frac{c}{\sin(\hat{C})}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos(\hat{A})$$

$$\text{Aire} = \frac{1}{2} b \times c \times \sin(\hat{A})$$

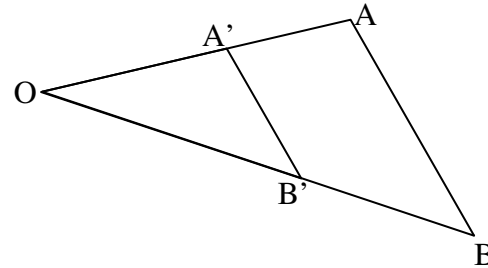


cas particulier du triangle rectangle en \hat{A} : $a^2 = b^2 + c^2$

5.5 Thalès

Si $(AB) \parallel (A'B')$, alors :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$



6 Coordonnées

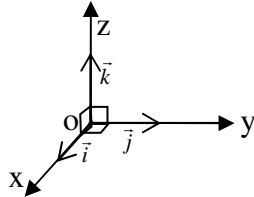
6.1 Repères

Repère orthonormé

Les angles formés par les axes valent 90° .

Repère direct

Les axes x , y , z forment un trièdre direct (règle des 3 doigts de la main droite).



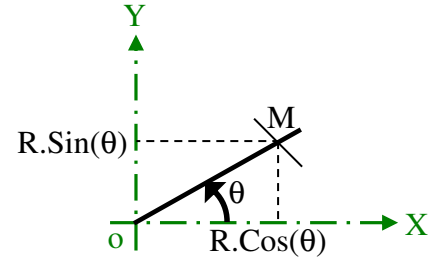
(x, y, z) est direct si x est vers vous.

(méthode du bonhomme d'Ampère ou des 3 doigts de la main droite).

6.2 Changements de repère

Soit M un point du plan

- de coordonnées polaires :
 $\{R, \theta\}$
- de coordonnées cartésiennes :
 $\{X_M = R.\cos(\theta) ; Y_M = R.\sin(\theta)\}$



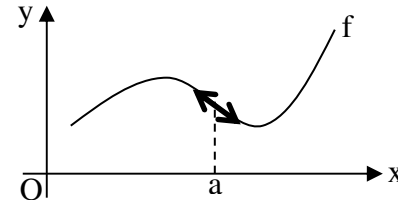
7 Dérivées et primitives

7.1 Définition d'une dérivée

La dérivée d'une fonction f en un point a correspond au coefficient directeur de la tangente.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f' \text{ peut se noter } \frac{df}{dx}$$

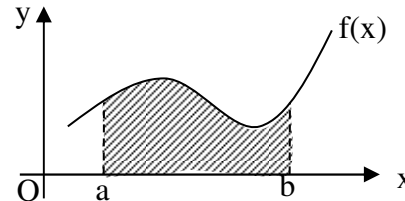


7.2 Définition d'une primitive

F primitive de f sur I si et seulement si :

$$F' = f$$

$$\int_a^b f(x) \times dx = F(b) - F(a)$$



$$\int_a^b f(x) \times dx = \text{aire hachurée si } f \geq 0$$

7.3 Fonctions - dérivée et intégrale

Fonctions	Dérivées	Primitives	Conditions
$a \times x$	a	$\frac{a \times x^2}{2} + \text{constante}$	$x \in \mathfrak{R}$
$a \times x^n$	$n \times a \times x^{n-1}$	$\frac{a \times x^{n+1}}{n+1} + \text{constante}$	$x \in \mathfrak{R}$ si $n > 0$ $x \in \mathfrak{R}^*$ si $n < 0$ $n \neq -1$ <i>selon dérivée ou primitive</i>
$1/x$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln(x) + \text{constante}$	$x \in]-\infty, 0[$ ou $x \in]0, \infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x) + \text{constante}$	$x \in \mathfrak{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x) + \text{constante}$	$x \in \mathfrak{R}$
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$	$-\ln(\cos(x)) + \text{constante}$	

⊗ Remarque : $\sqrt{x} = x^{1/2}$ et $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

8 Vecteurs

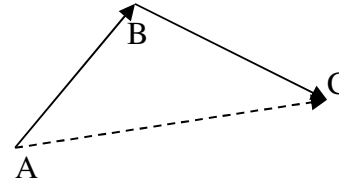
8.1 Caractéristiques d'un vecteur

Un vecteur non nul a une direction, un sens et une norme.

8.2 Somme de 2 vecteurs

Relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$



8.3 Produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

8.4 Produit vectoriel

$$\text{soit } \overrightarrow{AB} \text{ de coordonnées } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ de coordonnées } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} y_1 \times z_2 - y_2 \times z_1 \\ z_1 \times x_2 - z_2 \times x_1 \\ x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1 \end{pmatrix}$$

9 Complexes

$$i^2 = -1$$

9.1 Forme algébrique

$$z = x + i \times y$$

$$\text{module : } |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

le conjugué de z : $\bar{z} = x - i \times y$

argument : θ

9.2 Forme trigonométrique

$$z = r \times [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

9.3 Forme exponentielle

$$z = r \times e^{i\theta}$$

9.4 Formules de Moivre

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2 \cdot i}$$

10 Résolution des équations du second degré

Soit l'équation du second degré suivante : $a \times x^2 + b \times x + c = 0$

On peut déterminer les solutions en calculant :

- le discriminant $\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$
- la solution 1 : $X_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$ pour $\Delta \geq 0$
- la solution 2 : $X_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$ pour $\Delta \geq 0$

L'équation peut aussi s'écrire sous la forme $a \times (x - X_1) \times (x - X_2) = 0$

11 Lettres grecques

Alpha	α A	Bêta	β B	Gamma	γ Γ
Delta	δ Δ	Epsilon	ϵ E	Dzêta	ζ Z
Eta	η H	Thêta	θ Θ	Iota	ι I
Kappa	κ K	Lambda	λ Λ	Mu	μ M
Nu	ν N	Xi	ξ Ξ	Omicron	\omicron O
Pi	π Π	Rhô	ρ P	Sigma	σ Σ ζ
Tau	τ T	Upsilon	υ Y	Phi	ϕ Φ φ
Khi	χ X	Psi	ψ Ψ	Oméga	ω Ω

Les lettres grecques à connaître sont en gras – elles sont employées en Résistance des Matériaux, Géotechnique, Béton Armé, Béton Précontraint, Charpente métallique

1 Unités	1	5.3 Relations trigonométriques de base	12
1.1 Unités de base du système international	1	5.4 Relations dans le triangle quelconque	13
1.2 Unités dérivées du S.I. utilisées en D.U.T. génie civil	2	5.5 Thalès	13
1.3 Unités hors du S.I., mais reconnues	3	6 Coordonnées	14
1.4 Fractions et multiples d'unités	4	6.1 Repères	14
1.5 Nombre de chiffres significatifs	5	6.2 Changements de repère	15
1.6 Conversions	5	7 Dérivées et primitives	16
2 Opérations	6	7.1 Définition d'une dérivée	16
2.1 Priorités d'opérations	6	7.2 Définition d'une primitive	16
2.2 Fractions	6	7.3 Fonctions – dérivée et intégrale	17
2.3 Résolution	6	8 Vecteurs	18
3 Règle de 3 et interpolation linéaire	7	8.1 Caractéristiques d'un vecteur	18
3.1 Règle de 3 ou produit en croix	7	8.2 Somme de 2 vecteurs	18
3.2 Interpolation linéaire	7	8.3 Produit scalaire	18
4 Périmètres, aires et volumes usuels	8	8.4 Produit vectoriel	18
4.1 Périmètres et aires	8	9 Complexes	19
4.2 Volumes	8	9.1 Forme algébrique	19
4.3 Centre de gravité	10	9.2 Forme trigonométrique	19
5 Relations dans un triangle	11	9.3 Forme exponentielle	19
5.1 Cercle trigonométrique	11	9.4 Formules de Moivre	19
5.2 Relations dans le triangle rectangle	12	10 Résolution des équations du second degré	20
		11 Lettres grecques	21